

Homogeneous 型空間上の重み付き BMO について

大阪教育大学 中井英一 (Eiichi Nakai)

1 はじめに

Homogeneous 型空間上の重み付き BMO の性質として, pointwise multiplier の特徴付けと, 関数の連続性について述べる。

任意の $f \in L^1(X)$ に対して $fg \in L^2(X)$ であるような函数 g を $L^1(X)$ から $L^2(X)$ への pointwise multiplier とよぶ。 $L^1(X)$ から $L^2(X)$ への pointwise multiplier の全体を $PWM(L^1(X), L^2(X))$ と書くことにする。 X が σ -有限な測度空間で, $1/p_1 + 1/p_3 = 1/p_2$ のとき, g が $L^1(X)$ から $L^2(X)$ への pointwise multiplier であることと, $g \in L^3(X)$ は同値である。すなわち

$$PWM(L^1(X), L^2(X)) = L^3(X).$$

ここでは, 重み付きの BMO についてのこのような pointwise multiplier の特徴づけを考える。

次に, $bmo_{\phi,p}(X)$ 函数の連続性や, Lipschitz 函数との関係について述べる。これにより, pointwise multiplier の連続性の判定や, Lipschitz 空間上の pointwise multiplier の特徴付けもできる。

$X = (X, d, \mu)$ を Coifman-Weiss の homogeneous 型空間とする。すなわち d は擬距離, μ はボレル測度で

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq K_1 (d(x, z) + d(z, y)), & x, y, z \in X, \\ 0 < \mu(B(x, 2r)) &\leq K_2 \mu(B(x, r)) < \infty, & x \in X, r > 0 \end{aligned}$$

を満たすものとし,

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq K_3 (d(x, z) + d(y, z))^{1-\alpha} d(x, y)^\alpha, \quad x, y, z \in X$$

を仮定する。ただし, $B(x, r)$ は中心 $x \in X$, 半径 $r > 0$ の球, $K_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$), $0 < \alpha \leq 1$ は $x, y, z \in X, r > 0$ に依らない定数とする。

結果はユークリッド空間 \mathbb{R}^n に限っても新しいものである。

$1 \leq p < \infty$, $\phi(x, r) : X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ とし, $B = B(x, r)$ に対して $\phi(B) = \phi(x, r)$ と

する。 $f_B = \mu(B)^{-1} \int_B f(x) d\mu$ として

$$\text{bmo}_{\phi,p}(X) = \left\{ f \in L^p_{\text{loc}}(X) : \sup_B \frac{1}{\phi(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x) - f_B|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{\text{BMO}_{\phi,p}} = \sup_B \frac{1}{\phi(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x) - f_B|^p d\mu \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\text{bmo}_{\phi,p}} = \|f\|_{\text{BMO}_{\phi,p}} + |f_{B(x_0,1)}| \quad \text{for fixed } x_0 \in X$$

と定義する。また $\text{bmo}_{\phi}(X) = \text{bmo}_{\phi,1}(X)$, $\text{bmo}(X) = \text{bmo}_{\phi}(X)$ for $\phi = 1$ とする。
 $x_1 \in X$ に対して, $\|f\|_{\text{bmo}_{\phi,p}}$ は $\|f\|_{\text{BMO}_{\phi,p}} + |f_{B(x_1,1)}|$ と同値である。特に, $\mu(X) < +\infty$ ならば, $\|f\|_{\text{bmo}_{\phi,p}}$ は $\|f\|_{\text{BMO}_{\phi,p}} + \|f\|_{L^p}$ と同値である。

$\text{bmo}_{\phi,p}(X)$ は $\|f\|_{\text{bmo}_{\phi,p}}$ をノルムとして Banach 空間になる。したがって $\text{bmo}_{\phi_1,p_1}(X)$ から $\text{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)$ への pointwise multiplier は, 閉グラフ定理により有界作用素になる。一般に BMO は定数を法とした空間として扱うが, pointwise multiplier は関数または null-function を法とした元に対して定義する。このためノルムは $\|f\|_{\text{bmo}_{\phi,p}}$ を用い, 空間を表す記号も $\text{bmo}_{\phi,p}(X)$ を使う。

また,

$$L_{\phi,p}(X) = \left\{ f \in L^p_{\text{loc}}(X) : \sup_B \frac{1}{\phi(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{L_{\phi,p}} = \sup_B \frac{1}{\phi(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}$$

と定義する。 $L_{\phi}(X) = L_{\phi,1}(X)$ とする。

さらに

$$\Lambda_{\phi}(X) = \left\{ f : \sup_{x,y \in X} \frac{2|f(x) - f(y)|}{\phi(x, d(x,y)) + \phi(y, d(y,x))} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{\Lambda_{\phi}} = \sup_{x,y \in X} \frac{2|f(x) - f(y)|}{\phi(x, d(x,y)) + \phi(y, d(y,x))}$$

と定義する。 $\phi(x,r) = r^{\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) のとき, $\text{bmo}_{\phi,p}(\mathbb{R}^n) = \Lambda_{\phi}(\mathbb{R}^n) = \text{Lip}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ である。

ϕ について次の条件を考える。

$$\frac{1}{A_1} \leq \frac{\phi(a,s)}{\phi(a,r)} \leq A_1, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{s}{r} \leq 2, \quad (1)$$

$$\frac{\phi(a,r)}{r^{\alpha}} \leq A_2 \frac{\phi(a,s)}{s^{\alpha}} \quad 0 < s < r, \quad (2)$$

$$\int_0^r \mu(B(a,t))^{1/p} \frac{\phi(a,t)}{t} dt \leq A_3 \mu(B(a,r))^{1/p} \phi(a,r), \quad r > 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{A_4} \leq \frac{\phi(a,r)}{\phi(b,r)} \leq A_4, \quad d(a,b) \leq r, \quad (4)$$

ただし $A_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) は $r, s > 0$, $a, b \in X$ に依らない定数とする。また,

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow \phi(B_1) \leq A_5 \phi(B_2) \quad (5)$$

ならば John-Nirenberg の不等式により $\text{bmo}_{\phi,p}(X) = \text{bmo}_{\phi}(X)$ for $1 < p < \infty$.

2 Pointwise multipliers

2.1 定理

$\mu(X) = +\infty$ のときは次を条件を考える。

$$B(x_0, K_4 r) \setminus B(x_0, r) \neq \emptyset, \quad r > R_0, \quad (6)$$

$$\int_{R_0}^r \mu(B(x_0, t)) \frac{\phi(x_0, t)^p}{t} dt \leq A_6 \mu(B(x_0, r)) \phi(x_0, r)^p, \quad r > R_0. \quad (7)$$

ただし $R_0 \geq 0, K_4 > 1, A_6 > 0$ は r に依らない定数とする。(6) は

$$\mu(B(x_0, r)) \leq \frac{1}{2} \mu(B(x_0, K_5 r)), \quad r > R_0 \quad (8)$$

と同値である。また $\phi(x_0, r) = 1$ のとき (6) と (7) は同値である。さらに (6) のもとで,

$$\mu(B(x_0, r)) \phi(x_0, r)^{p+\varepsilon'} \leq A_7 \mu(B(x_0, s)) \phi(x_0, s)^{p+\varepsilon'}, \quad R_0 < r < s. \quad (9)$$

ならば (7) を満たす。

ϕ_i ($i = 1, 2, 3$) に対して

$$\Phi_i^*(a, r) = \int_1^{\max(2, d(x_0, a), r)} \frac{\phi_i(x_0, t)}{t} dt, \quad \Phi_i^{**}(a, r) = \int_r^{\max(2, d(x_0, a), r)} \frac{\phi_i(a, t)}{t} dt$$

とおく。

Theorem 1 ϕ_1 はある p_1 に対して (1)~(5) を, ϕ_2 は (1), (4), (5) をそれぞれ満たし, $(\Phi_2^* + \Phi_2^{**})/\phi_2 \leq C(\Phi_1^* + \Phi_1^{**})/\phi_1$ とする。 $\mu(X) = +\infty$ のときは (6) および $\phi = \phi_2/\phi_1$, $p = 1 + \varepsilon$ に対して (7) を仮定する。 $\phi_3 = \phi_2/(\Phi_1^* + \Phi_1^{**})$ とすると

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X)) = \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X).$$

また, $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\text{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}$ と同値である。

Corollary 1 さらに $\Phi_3^* + \Phi_3^{**} \leq C\phi_2/\phi_1$ ならば,

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X)) = \text{bmo}_{\phi_3}(X).$$

また, $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\text{bmo}_{\phi_3}}$ と同値である。

Corollary 2 $\mu(X) < +\infty$ とする。 ϕ_1 はある p_1 に対して (1)~(5) を, ϕ_2 は (1), (4), (5) を, ϕ_1/ϕ_2 は (5) をそれぞれ満たすならば,

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X)) = \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X).$$

また, $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\text{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}$ と同値である。

Corollary 3 *Corollary 2* と同じ仮定のもとでさらに $\Phi_3^{**} \leq C\phi_2/\phi_1$ ($r < 1$) ならば,

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X)) = \text{bmo}_{\phi_3}(X).$$

また, $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\text{bmo}_{\phi_3}}$ と同値である。

Corollary 4 *Corollary 2* と同じ仮定のもとでさらに $\Phi_1^{**} \leq C$ ($r < 1$) ならば,

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X)) = \text{bmo}_{\phi_2}(X).$$

また, $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\text{bmo}_{\phi_2}}$ と同値である。

Theorem 2 $1 < p_2 < p_1 < \infty$, $p_1 p_2 \geq p_1 + p_2$. とする。 ϕ_1, p_1 は (1)~(4) を, ϕ_2 は (1), (4) をそれぞれ満たし, $(\Phi_2^* + \Phi_2^{**})/\phi_2 \leq C(\Phi_1^* + \Phi_1^{**})/\phi_1$ とする。 $\mu(X) = +\infty$ のときは (6) および $\phi = \phi_2/\phi_1$, $p = p_1/(p_1 - 1)$ に対して (7) を仮定する。 $\phi_3 = \phi_2/(\Phi_1^* + \Phi_1^{**})$ が (5) を満たせば

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X)) = \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X).$$

また, $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\text{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}$ と同値である。

Corollary 5 さらに $\Phi_3^* + \Phi_3^{**} \leq C\phi_2/\phi_1$ ならば,

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X)) = \text{bmo}_{\phi_3}(X).$$

また, $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\text{bmo}_{\phi_3}}$ と同値である。

Theorem 3 $1 \leq p_2 \leq p_1 < \infty$ とする。 ϕ_1, p_1 は (1)~(4) を満たし, $C^{-1} \leq \phi_1/\phi_2 \leq C$ とする。 $\mu(X) = +\infty$ のときは (6) を仮定する。 $\phi_3 = \phi_2/(\Phi_1^* + \Phi_1^{**})$ のとき

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X)) = \text{bmo}_{\phi_3, p_2}(X) \cap L^\infty(X).$$

また, $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\text{BMO}_{\phi_3, p_2}} + \|g\|_{L^\infty}$ と同値である。

Corollary 6 (Nakai and Yabuta [7]) ϕ, p は (1)~(4) を満たし, $\mu(X) = +\infty$ のときは (6) を仮定する。 $\psi = \phi/(\Phi^* + \Phi^{**})$ のとき

$$PWM(\text{bmo}_{\phi, p}(X), \text{bmo}_{\phi, p}(X)) = \text{bmo}_{\psi, p}(X) \cap L^\infty(X).$$

また, $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi, p}(X), \text{bmo}_{\phi, p}(X))$ の作用素ノルムは $\|g\|_{\text{BMO}_{\psi, p}} + \|g\|_{L^\infty}$ と同値である。

Theorem 4 $1 \leq p_i < \infty$, $\phi_i(x, r) = \phi_i(r)$ ($i = 1, 2$) とする。 ϕ_1 が (1)~(3) を, ϕ_2 が (1) をそれぞれ満たすとき, $\phi_2(r)/\phi_1(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$) ならば

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X)) = \{0\}.$$

2.2 例

始めに, Theorem 1 および その Corollary の例。

$X = \mathbb{T}^n$ の場合。 $0 \leq \beta_2 < \beta_1 < 1$ のとき

$$PWM(\text{bmo}_{(\log(1/r))^{-\beta_1}}(\mathbb{T}^n), \text{bmo}_{(\log(1/r))^{-\beta_2}}(\mathbb{T}^n)) = \text{bmo}_{(\log(1/r))^{\beta_1 - \beta_2 - 1}}(\mathbb{T}^n).$$

特に

$$PWM(\text{bmo}_{(\log(1/r))^{-1/2}}(\mathbb{T}^n), \text{bmo}(\mathbb{T}^n)) = \text{bmo}_{(\log(1/r))^{-1/2}}(\mathbb{T}^n).$$

また

$$PWM(\text{bmo}_{(\log(1/r))^{-1}}(\mathbb{T}^n), \text{bmo}(\mathbb{T}^n)) = \text{bmo}_{(\log \log(1/r))^{-1}}(\mathbb{T}^n),$$

$$PWM(\text{bmo}_{(\log \log(1/r))^{-1}}(\mathbb{T}^n), \text{bmo}(\mathbb{T}^n))$$

$$= \text{bmo}_{(\text{li}(\log(1/r)))^{-1}}(\mathbb{T}^n) \cap L_{(\log \log(1/r))}(\mathbb{T}^n),$$

$$\text{ただし } \text{li}(r) = \int_e^r 1/(\log t) dt,$$

$$PWM(\text{bmo}(\mathbb{T}^n), \text{bmo}(\mathbb{T}^n)) = \text{bmo}_{(\log(1/r))^{-1}}(\mathbb{T}^n) \cap L^\infty(\mathbb{T}^n). \quad (10)$$

さらに $\beta > 1$ のとき

$$PWM(\text{bmo}_{(\log(1/r))^{-\beta}}(\mathbb{T}^n), \text{bmo}(\mathbb{T}^n)) = \text{bmo}(\mathbb{T}^n).$$

$0 < \beta_2 \leq \beta_1 \leq 1$ のとき

$$PWM(\text{bmo}_{r^{\beta_1}}(\mathbb{T}^n), \text{bmo}_{r^{\beta_2}}(\mathbb{T}^n)) = \text{bmo}_{r^{\beta_2}}(\mathbb{T}^n).$$

このとき $\text{bmo}_{r^\beta}(\mathbb{T}^n) = \text{Lip}_\beta(\mathbb{T}^n)$.

$X = \mathbb{R}^n$ の場合。

$$PWM(\text{bmo}(\mathbb{R}^n), \text{bmo}(\mathbb{R}^n)) = \text{bmo}_{(\log(|a|+r+1/r))^{-1}}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (11)$$

$0 < \beta_2 < \beta_1 \leq 1$ のとき

$$PWM(\text{bmo}_{r^{\beta_1}}(\mathbb{R}^n), \text{bmo}_{r^{\beta_2}}(\mathbb{R}^n)) = \text{bmo}_{\frac{r^{\beta_2}}{(2+|a|+r)^{\beta_1}}}(\mathbb{R}^n) \cap L_{r^{\beta_2 - \beta_1}}(\mathbb{R}^n).$$

また $0 < \beta_1, \beta_2 \leq 1$ のとき

$$PWM(\text{bmo}_{(2+|a|+r)^{\beta_1}}(\mathbb{R}^n), \text{bmo}_{(2+|a|+r)^{\beta_2}}(\mathbb{R}^n))$$

$$= \text{bmo}_{\frac{(2+|a|+r)^{\beta_2 - \beta_1}}{\log(|a|+r+1/r)}}(\mathbb{R}^n) \cap L_{(2+|a|+r)^{\beta_2 - \beta_1}}(\mathbb{R}^n).$$

以上において (10) は Janson [2] の結果, (11) は Nakai and Yabuta [6] の結果である。

Theorem 2 およびその Corollary の例。

$-1 < \beta_1 < \beta_2 \leq \beta_1 + 1$, $1 < p_2 < p_1 < \infty$, $p_1 p_2 \geq p_1 + p_2$ のとき

$$PWM(\text{bmo}_{(\log(1/r))^{\beta_1}, p_1}(\mathbb{T}^n), \text{bmo}_{(\log(1/r))^{\beta_2}, p_2}(\mathbb{T}^n)) = \text{bmo}_{(\log(1/r))^{\beta_2 - \beta_1 - 1}}(\mathbb{T}^n).$$

$1 < p < \infty$ のとき

$$PWM(\text{bmo}(\mathbb{R}^n), \text{bmo}_{\log(|a|+r+1/r), p}(\mathbb{R}^n)) = \text{bmo}(\mathbb{R}^n).$$

2.3 定理の証明

まず、次の Lemmas が成り立つ。

Lemma 1 (Nakai and Yabuta [7]) ϕ, p が (1)~(4) を満たすとき、

$$f_a(x) = \int_{d(a,x)}^1 \frac{\phi(a,t)}{t} dt$$

とおくと、 $f_a \in \text{bmo}_{\phi,p}(X)$ であり、 $\exists C > 0, \forall a \in X$ s.t. $\|f_a\|_{\text{bmo}_{\phi,p}} \leq C$.

Lemma 2 $\exists C > 0, \forall f \in \text{bmo}_{\phi,p}(X), \forall B$ s.t.

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq C \|f\|_{\text{bmo}_{\phi,p}} (\Phi^*(B) + \Phi^{**}(B)).$$

Lemma 3 $\exists C_i > 0 (i = 1, 2, 3), \forall B, \exists f \in \text{bmo}_{\phi,p}(X), \exists E \subset B$ s.t.

$$\begin{aligned} f(x) &\geq C_1 (\Phi^*(B) + \Phi^{**}(B)), \quad x \in E, \\ \|f\|_{\text{bmo}_{\phi,p}} &\leq C_2, \quad \mu(E) \geq C_3 \mu(B). \end{aligned}$$

ここで E は B と中心が同じ球かまたは円環領域とすることができる。

この Lemma は Lemma 1 の f_a を用いて証明する。

Lemma 4 $1/p_1 + 1/p_3 = 1/p_2, f \in \text{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), g \in L_{\phi_2/\phi_1,p_3}$ ならば、

$$fg \in \text{bmo}_{\phi_2,p_2}(X) \iff \sup_B \frac{|f_B|}{\phi_2(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B|^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2} < \infty.$$

このとき

$$\left| \|fg\|_{\text{bmo}_{\phi_2,p_2}} - \sup_B \frac{|f_B|}{\phi_2(B)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B|^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2} \right| \leq C \|f\|_{\text{bmo}_{\phi_1,p_1}} \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1,p_3}}.$$

Theorem 1 の証明。まず $1 < p_2 \leq 1 + \varepsilon, 1/p_1 + 1/p_2 = 1$ として、Hölder の不等式と John-Nirenberg の不等式により

$$\begin{aligned} \text{bmo}_{\phi_1,p_1}(X) &= \text{bmo}_{\phi_1}(X), \quad \text{bmo}_{\phi_2,p_2}(X) = \text{bmo}_{\phi_2}(X), \\ C^{-1} &\leq \|g\|_{O_p(\text{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2,p_2}(X))} / \|g\|_{O_p(\text{bmo}_{\phi_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X))} \leq C \end{aligned}$$

であることに注意する。第 1 に、

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1,p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2,p_2}(X)) \subset L_{\phi_2/\phi_1,p_2}(X) \quad (12)$$

を示す。 $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X))$ とする。 $f \in \text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X)$ に対して $fg \in \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X)$ だから Lemma 2 より

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |fg(x)|^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2} &\leq C \|fg\|_{\text{bmo}_{\phi_2, p_2}} (\Phi_2^*(B) + \Phi_2^{**}(B)) \\ &\leq C \|f\|_{\text{bmo}_{\phi_1, p_1}} \|g\|_{O_p} (\Phi_2^*(B) + \Phi_2^{**}(B)). \end{aligned}$$

一方 Lemma 3 より

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |fg(x)|^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2} \geq C \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E |g(x)|^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2} (\Phi_1^*(B) + \Phi_1^{**}(B))$$

かつ $\|f\|_{\text{bmo}_{\phi_1, p_1}} \leq C$ とできる。これより (7) と

$$\frac{\Phi_2^*(B) + \Phi_2^{**}(B)}{\Phi_1^*(B) + \Phi_1^{**}(B)} \leq C \frac{\phi_2(B)}{\phi_1(B)}$$

を用い、

$$\left(\frac{1}{\mu(B')} \int_{B'} |g(x)|^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2} \leq C \frac{\phi_2(B)}{\phi_1(B)} \|g\|_{O_p} \leq C \frac{\phi_2(B')}{\phi_1(B')} \|g\|_{O_p}.$$

よって

$$\|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1, p_2}} \leq C \|g\|_{O_p}.$$

第 2 に、

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X)) \subset \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1, p_2}(X) \quad (13)$$

を示す。 $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X))$ とする。 $f \in \text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X)$, $g \in L_{\phi_2/\phi_1, p_2}(X)$ に対して $fg \in \text{bmo}_{\phi_2}(X)$ だから Lemma 4 より

$$\sup_B \frac{|f_B|}{\phi_2(B)} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B| d\mu < \infty.$$

Lemma 3 より $\forall B, \exists f \in \text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X)$ s.t.

$$|f_B| \geq C(\Phi_1^*(B) + \Phi_1^{**}(B)), \quad \|f\|_{\text{bmo}_{\phi_1, p_1}} \leq C.$$

Lemma 4 の不等式より

$$\begin{aligned} \sup_B \frac{\Phi_1^*(B) + \Phi_1^{**}(B)}{\phi_2(B)} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B| d\mu \\ \leq C (\|fg\|_{\text{bmo}_{\phi_2}} + \|f\|_{\text{bmo}_{\phi_1, p_1}} \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1, p_2}}) \\ \leq C (\|g\|_{O_p} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1, p_2}}) \leq C \|g\|_{O_p}. \end{aligned}$$

よって

$$\|g\|_{\text{bmo}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1, p_2}} \leq C\|g\|_{O_p}.$$

第3に,

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X)) \supset \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1, p_2}(X) \quad (14)$$

を示す。 $g \in \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1, p_2}(X)$ とする。 $f \in \text{bmo}_{\phi_1, p_1}$ に対して, Lemma 2 より

$$\begin{aligned} \sup_B \frac{|f_B|}{\phi_2(B)} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B| d\mu \\ \leq C\|f\|_{\text{bmo}_{\phi_1, p_1}} \sup_B \frac{\Phi_1^*(B) + \Phi_1^{**}(B)}{\phi_2(B)} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g(x) - g_B| d\mu \\ \leq C\|f\|_{\text{bmo}_{\phi_1, p_1}} \|g\|_{\text{BMO}_{\phi_3}}. \end{aligned}$$

よって Lemma 4 より $fg \in \text{bmo}_{\phi_2, p_2}$ すなわち

$$g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X)).$$

また Lemma 4 の不等式により

$$\|fg\|_{\text{bmo}_{\phi_2}} \leq C\|f\|_{\text{bmo}_{\phi_1, p_1}} (\|g\|_{\text{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1, p_2}}).$$

すなわち

$$\|g\|_{O_p} \leq C(\|g\|_{\text{BMO}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1, p_2}}).$$

最後に

$$\begin{aligned} \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1, p_2}(X) &= \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X), \\ C^{-1} &\leq (\|g\|_{\text{bmo}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1, p_2}}) / (\|g\|_{\text{bmo}_{\phi_3}} + \|g\|_{L_{\phi_2/\phi_1}}) \leq C \end{aligned}$$

を示すことができるので Theorem 1 が証明される。

定理 2 の証明。 $1/p_1 + 1/p_3 = 1$, $1/p_1 + 1/p_4 = 1/p_2$ とする。第1に (12) と同様にして

$$\begin{aligned} PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X)) &\subset PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_3, p_3}(X)) \\ &\subset L_{\phi_2/\phi_1, p_3}(X). \end{aligned}$$

第2に (13) と同様にして

$$\begin{aligned} PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X)) &\subset PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2}(X)) \\ &\subset \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1, p_3}(X). \end{aligned}$$

第3に (14) と同様にして

$$PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X)) \supset \text{bmo}_{\phi_3, p_2}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1, p_4}(X).$$

最後に John-Nirenberg の不等式を用いて

$$\text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1, p_3}(X) = \text{bmo}_{\phi_3, p_2}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1, p_4}(X) = \text{bmo}_{\phi_3}(X) \cap L_{\phi_2/\phi_1}(X)$$

を示すことができる。

定理 3 の証明。Lemma 4 が $p_3 = \infty$ または $C^{-1} \leq \phi_1/\phi_2 \leq C$, すなわち $L_{\phi_2/\phi_1, p_3}(X) = L^\infty(X)$ に対しても成り立つことから, 定理 2 と同様にして証明できる。

定理 4 の証明。次の Proposition 他を用いる。

Proposition 1 $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ とする。 ϕ_1 が (1)~(4) を, ϕ_2 が (1) をそれぞれ満たすとき

$$X_0 = \left\{ x \in X : \int_r^1 \frac{\phi_2(x, t)}{t} dt \Big/ \int_r^1 \frac{\phi_1(x, t)}{t} dt \rightarrow 0 \ (r \rightarrow 0) \right\}$$

とおくと $g \in PWM(\text{bmo}_{\phi_1, p_1}(X), \text{bmo}_{\phi_2, p_2}(X))$ ならば $g(x) = 0$ a.e. X_0 .

3 連続性

Theorem 5 ϕ は (1) を満たすとする。 $x \in X$ において

$$\int_0^{d(x, y)} \frac{\phi(x, t) + \phi(y, t)}{t} dt \rightarrow 0 \quad \text{as } d(x, y) \rightarrow 0 \quad (15)$$

ならば, 任意の $f \in \text{bmo}_{\phi, p}(X)$ は $x \in X$ において連続である。逆に ϕ が (1)~(4) を満たすとき (15) が成り立たなければ, $x \in X$ において不連続な $f \in \text{bmo}_{\phi, p}(X)$ が存在する。

Theorem 6 ϕ が (1)~(5) を満たすとき,

$$\int_0^{d(x, y)} \frac{\phi(x, t)}{t} dt \leq C\phi(x, d(x, y)), \quad x, y \in X \quad (16)$$

は, $\text{bmo}_{\phi, p}(X) = \Lambda_\phi(X)$ ($1 \leq p < \infty$) であるための必要十分条件である。

定理 5 の証明。[7] の Lemma 2.4 と Lemma 2.6 により

$$|f(x) - f(y)| \leq C \int_0^{d(x, y)} \frac{\phi(x, t) + \phi(y, t)}{t} dt \|f\|_{\text{BMO}_{\phi, p}} \quad (17)$$

がいえる。後半は, $a_n \rightarrow a$, $d(a, a_{n+1}) \leq d(a, a_n)/(2K_1)$ であるような点列に対して,

$$f_n(x) = \max \left(0, \int_{d(a_n, x)}^{d(a_n, a)/(9K_1^4)} \frac{\phi(a_n, t)}{t} dt \right)$$

とおくと, $f = \sum f_n \in \text{bmo}_{\phi,p}(X)$ であり, $\text{supp } f_n \cap \text{supp } f_{n+1} = \emptyset$ かつ

$$f(x) \geq C \int_{9K_1^4 d(a_n, x)}^{d(a_n, a)} \frac{\phi(a_n, t)}{t} dt \quad \text{for } x \in B(a_n, d(a, a_n)/(9K_1^4))$$

となることからわかる。

定理 6 の証明。十分性。 $f \in \text{bmo}_{\phi,p}(X)$ ならば, (16) と (17) により

$$|f(x) - f(y)| \leq C(\phi(x, d(x, y)) + \phi(y, d(y, x))) \|f\|_{\text{BMO}_{\phi,p}}.$$

ゆえに

$$\text{bmo}_{\phi,p}(X) \subset \Lambda_{\phi}(X), \quad \|f\|_{\Lambda_{\phi}} \leq C \|f\|_{\text{BMO}_{\phi,p}}.$$

逆に $f \in \Lambda_{\phi}(X)$ ならば, $x, y \in B(z, r)$ に対して $|f(x) - f(y)| \leq C\phi(z, r) \|f\|_{\Lambda_{\phi}}$ だから

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu(B(z, r))} \int_{B(z, r)} |f(x) - f_{B(z, r)}|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\frac{1}{\mu(B(z, r))} \int_{B(z, r)} \left(\frac{1}{\mu(B(z, r))} \int_{B(z, r)} |f(x) - f(y)| d\mu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \\ & \leq C\phi(z, r) \|f\|_{\Lambda_{\phi}}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\Lambda_{\phi}(X) \subset \text{bmo}_{\phi,p}(X), \quad \|f\|_{\text{BMO}_{\phi,p}} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\phi}}.$$

必要性。Lemma 1 より

$$f_a(x) = \int_{d(a, x)}^1 \frac{\phi(a, t)}{t} dt \in \text{bmo}_{\phi,p}(X) = \Lambda_{\phi}(X)$$

だから, $d(a, y) \leq d(a, x)$ のとき

$$\begin{aligned} \int_{d(a, y)}^{d(a, x)} \frac{\phi(a, t)}{t} dt &= |f_a(x) - f_a(y)| \\ &\leq C(\phi(x, d(x, y)) + \phi(y, d(y, x))) \leq C\phi(y, d(y, x)). \end{aligned}$$

特に $d(a, y) \leq d(x, y)/(2K_1)$ のとき

$$\int_{d(a, y)}^{d(a, x)} \frac{\phi(a, t)}{t} dt \leq C\phi(a, d(a, x)).$$

よって (16) を得る。

References

- [1] R. R. Coifman and G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 569–645.
- [2] S. Janson, *On functions with conditions on the mean oscillation*, Ark. för Mat. **14** (1976), 189–196.
- [3] R. A. Macías and C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), 257–270.
- [4] E. Nakai, *On the restriction of functions of bounded mean oscillation to the lower dimensional space*, Arch. Math., **43**, (1984), 519–529.
- [5] E. Nakai, *Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation*, Studia Math., **105**, (1993), 105–119.
- [6] E. Nakai and K. Yabuta, *Pointwise multipliers for functions of bounded mean oscillation*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 207–218.
- [7] E. Nakai and K. Yabuta, *Pointwise multipliers for functions of weighted bounded mean oscillation on spaces of homogeneous type*, preprint.