数理解析研究所講究録
946巻 1996年 61-69

Radial growth of starlike holomorphic mappings in the unit ball in $\mathbb{C}^n$

東京電機大学工学部　鶴見和之
(Kazuyuki Tsurumi)

1. 序

単位円$U:=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$で正則単葉な函数の半径方向の増大についての問題及び関連する問題についてはDurenの本[2]（文献中に）に見られる。

$f(z)$をUで正則な函数とし，$M_\infty(r,f):=\max_{|z|=r}|f(z)|$ $(0<r<1)$とおく。いま，$f(z)$が単葉ならば，歪曲定理により，

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^2 M_\infty(r,f)=\alpha$$

となるα $(0\leqq\alpha\leqq 1)$が存在する（[2], p. 157. Lemma），このαをfのHayman indexという。このとき，fの最大増大方向に関して，次の定理が成り立つ：

定理 A（[2], p.158, Theorem 5.4）. $f(z)$をUで正則単葉な函数とし，$f(z)$のHayman index $\alpha>0$ならば，

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^2|f(ra)|=\alpha\qquad(|a|=1)$$

となるただ1つの方向aが存在する。

本講の目的は，定理Aを$\mathbb{C}^n$の単位球$\mathbb{B}$で正則単葉な星型写像に拡張することである。ここで，定理Aの方向aがただ1つであるという事は成り立たない。また，正則単葉な星型写像のいくつかの例を与える。

2. Starlike mappings

n一次元複素ベクトル空間$\mathbb{C}^n$の点zを列ベクトルで表す：

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

また，z'，z^*をそれぞれzの転置ベクトル，転置共役ベクトルを表す。zのノルムを$\|z\| := \sqrt{z^* z}$と表す。また，原点0を中心とする$\mathbb{C}^n$の単位球を$\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}$と書く。

$\mathbb{B}$から$\mathbb{C}^n$への写像を列ベクトルで表す：

$$f(z) := \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}.$$

ここで，各成分函数$f_j(z)$が$\mathbb{B}$で正則であるとき，写像$f(z)$は正則であるという。$\mathbb{B}$で正則な写像の全体を$\mathcal{H}(\mathbb{B})$と書く。

写像 $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ の Jacobian 行列を

$$Df(z) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

で表し，Jacobian（$Df(z)$ の行列式）を $J_f(z)$ と書く。そうすると，$J_f(z_0) \neq 0$ ならば，$f(z)$ は z_0 で locally injective（局所単葉）である。写像 $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ が，$f(0)=0$ で $Df(0) = I$（単位行列）のとき，$f(z)$ は正規化された写像であるという。

写像 $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ が，$f(0)=0$ で単葉で $(1-t)f(\mathbb{B}) \subset f(\mathbb{B})$ $(0<t<1)$ となるとき，$f(z)$ は（原点 0 に関して）星型（starlike）であるといい，$\mathbb{B}$ において正規化された星型写像の全体を $S^*(\mathbb{B})$ と書く。

このとき，次の定理が成り立つ：

<u>定理 $\mathbb{B}$</u>（[3], [6]）. $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ を正規化された単葉写像とすると，次の3条件は同値である：

(i) $f(z) \in S^*(\mathbb{B})$.

(ii) $\mathrm{Re}\{z^*(Df(z))^{-1}f(z)\} > 0 \quad (z \in \mathbb{B} \setminus \{0\})$.

(iii) $\forall X \in f(\mathbb{B})$ に対して，初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -w, \qquad w(0) = X$$

は解 $w(t) := w(t, x)$ を持ち, $w(t) \in f(\mathbb{B})\ (t \geqq 0)$ で $w(t) \to 0\ (t \to \infty)$ である。

次の増大定理(歪曲定理)は本講で基本的である:

<u>定理C.</u> ([1], p.16. Theorem 2.1). $f(z) \in S^*(\mathbb{B})$ に対して, 次の式が成り立つ:

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leqq \|f(z)\| \leqq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2} \qquad (z \in \mathbb{B}).$$

(一般の正則写像に対しては, 定理Cの式は成り立たない。)

3. 主定理.

正則写像 $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ に対して,

$$M_\infty(r, f) := \max_{\|z\|=r} \|f(z)\| \qquad (0 \leqq r < 1)$$

とおく。このとき, 次の補題が成り立つ

<u>補題.</u> $f(z) \in S^*(\mathbb{B})$ に対して, $r^{-1}(1-r)^2 M_\infty(r, f)$ は~~微分~~開区間 $(0, 1)$ において r の減少函数であり, 次の式が成り立つ:

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^2 M_\infty(r, f) = \alpha \leqq 1$$

(この α を $f(z)$ の Hayman index という。)

証明. r_1, r_2 を $0<r_1<r_2<1$ なる様にとる。点 $z_2 \in \mathbb{B}$ を $\|z_2\|=r_2$, $\|f(z_2)\|=M_\infty(r_2, f)$ となる様にとる。Kを原点0と点 $f(z_2)$ とを結ぶ線分の原像とおく。そうおくと, Kは $\mathbb{B}$ 内の解析曲線である。s を原点から点 $z \in K$ までのKの長さとする, そして, 点 z を s をパラメーターとして $z(s)$ と書き, $g(s):=\|f(z(s))\|^2$ とおき, s_j $(j=1,2)$ を $\|z(s_j)\|=r_j$ となるものとする。そうおくと, 文献[2, p. 18]の不等式によって

$$\begin{aligned}
&\log g(s_2)-\log g(s_1)\\
&\leqq 2\left[\left\{\log\|z(s_2)\|-2\log(1-\|z(s_2)\|)\right\}\right.\\
&\qquad\left.-\left\{\log\|z(s_1)\|-2\log(1-\|z(s_1)\|)\right\}\right]
\end{aligned}$$

従って,

$$\frac{(1-\|z(s_2)\|)^4}{\|z(s_2)\|^2}g(s_2) \leqq \frac{(1-\|z(s_1)\|)^4}{\|z(s_1)\|^2}g(s_1).$$

$$\therefore\quad \frac{(1-\|z(s_2)\|)^2}{\|z(s_2)\|}\|f(z(s_2))\| \leqq \frac{(1-\|z(s_1)\|)^2}{\|z(s_1)\|}\|f(z(s_1))\|$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \frac{(1-r_2)^2}{r_2}M_\infty(r_2, f) &\leqq \frac{(1-r_1)^2}{r_1}\|f(z(s_1))\| \\
(*)\qquad\qquad &\leqq \frac{(1-r_1)}{r_1}M_\infty(r, f).
\end{aligned}$$

よって，$r^{-1}(1-r)^2 M_\infty(r, f)$ は $(0, 1)$上で r の減少函数である。従って，次の極限値が存在する

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^2 M_\infty(r, f) = \alpha.$$

そして，定理Cにより，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ が得られる。

定理. $f(z) \in S^*(\mathbb{B})$ が Hayman index $\alpha > 0$ を持つならば，次の様な方向 $a \in \mathbb{C}^n$ $(\|a\| = 1)$ が存在する：

$$(**) \qquad \lim_{r\to 1}(1-r)^2 \|f(ra)\| = \alpha.$$

証明. 列 $\{r_k\}$ を $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k < \cdots \to 1$ なる様にとる。また，列 $\{a_k\}$ を $\|a_k\| = 1$, $M_\infty(r_k, f) = \|f(r_k a_k)\|$ なる様にとる。そうすると，$\forall r < r_k$ に対して，補題の証明における式$(*)$によって

$$\alpha \leqq \frac{(1-r_k)^2}{r_k}\|f(r_k a_k)\| \leqq \frac{(1-r)^2}{r}\|f(r, a_k)\|.$$

aを列$\{a_k\}$の集積点とすると，上の不等式によって，

$$\alpha \leqq \frac{(1-r)^2}{r}\|f(ra)\| \leqq \frac{(1-r)}{r} M_\infty(r, f)$$

故に，補題によって，$(**)$ が得られる。

（1変数の単葉函数においては，定理の方向 a はただ1つであるが，$n \geqq 2$ のときは a はただ1つではない。）

4．例．

$\mathbb{C}^2$ における星型写像の例を与えるが，$n > 2$ の場合も同様である。

[1]（[1], p.19）

$$f(z) := \begin{pmatrix} \dfrac{z_1}{(1-z_1)^2} \\ \dfrac{z_2}{(1-z_2)^2} \end{pmatrix}$$

Hayman index $\alpha = 1$ で，最大増大方向 a は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の2方向である

[2] $\zeta \in \mathbb{C}^2$, $\|\zeta\| = 1$ に対して

$$f(z) := \frac{1}{(1-\zeta^* z)} z$$

$$Df(z) = \frac{1}{(1-\zeta^* z)^2} \left[(1-\zeta^* z) I + z \zeta^* \right] \qquad \left(I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$J_f(z) = \frac{1}{(1-\zeta^* z)^3}$$

$$(Df(z))^{-1} f(z) = (1-\zeta^* z) z = (1-\zeta^* z) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad z^* (Df(z))^{-1} f(z) = (1-\zeta^* z) \| z \|^2$$

Hayman index $\alpha = 0$.

[3] $$f(z) := \frac{1}{(1-\zeta^* z)^2} z \qquad (\zeta \text{ は[2]と同じ})$$

$$Df(z) = \frac{1}{(1-\zeta^* z)^3}\left[(1-\zeta^* z)I + 2z\zeta^*\right]$$

$$J_f(z) = \frac{1+\zeta^* z}{(1-\zeta^* z)^5}$$

$$(Df(z))^{-1} f(z) = \frac{1-\zeta^* z}{1+\zeta^* z} z, \quad z^*(Df(z))^{-1} f(z) = \frac{1-\zeta^* z}{1+\zeta^* z}\|z\|^2$$

Hayman index $\alpha = 1$, 最大増大方向 $a = \zeta$ (1つ).

[4] $$f(z) := \frac{1}{(1-z'z)} z$$

$$Df(z) = \frac{1}{(1-z'z)^2}\begin{bmatrix} 1-(z_2^2-z_1^2) & 2z_1 z_2 \\ 2z_1 z_2 & 1-(z_1^2-z_2^2) \end{bmatrix}$$

$$J_f(z) = \frac{1+z'z}{(1-z'z)^3}$$

$$z^*(Df(z))^{-1} f(z) = \frac{1-z'z}{1+z'z}\|z\|^2$$

Hayman index $\alpha = 0$.

文　　献

[1] R. W. Bernard, C. H. FitzGerald and S. Gong, The growth and $\frac{1}{4}$-theorems for starlike mappings in $\mathbb{C}^n$, Pacific J. Math. 150 (1991) 13–22.

[2] P. L. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg and Tokyo, 1983.

[3] K. R. Gurganus, Φ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975) 389–406.

[4] L. F. Heath and T. J. Suffridge, Starlike, convex, close-to-convex, spirallike, and Φ-like maps in a commutative Banach algebra with identity, Trans. A. M. S. 250 (1979) 195–212.

[5] J. A. Pfaltzgraff, Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 210 (1974) 55–68

[6] J. A. Pfaltzgraff and T. J. Suffridge, Close-to-starlike holomorphic functions of several variables, Pacific J. M. 57 (1975) 271–279.

[7] T. J. Suffridge, The principle of subordination applied to functions of several variables, Pacific J. M. 33 (1970) 241–248

[8] T. J. Suffridge, Starlike and convex maps in Banach spaces, Pacific J. M. 46 (1973) 575–585.