数理解析研究所講究録
946 巻 1996 年 1-9

Korovkin type approximation theorems I

山形大学工学部 高橋眞映(Sin-Ei Takahasi)

1. Introduction

K. Weierstrass は熱伝導方程式の解を考察中に有名な多項式近似定理を発見したと言われる。また S. N. Bernstein は確率論の手法を用いて、Weierstrass の多項式近似定理の直接証明を与えている。これらの結果は作用素論の立場から統一的に述べることができる。

先ず、$C^b(R)$ を R 上の有界な連続関数のつくる Banach 空間とし、任意の関数 $f \in C^b(R)$ に対して

$$(W_t f)(x) = u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-(x-y)^2/4t}dy \quad (x \in \mathbf{R}, t > 0)$$

と置くと、$\{W_t\}_{t>0}$ は $C^b(R)$ からそれ自身への $\|W_t\| = 1$ $(\forall t > 0)$ なる有界線形作用素のネットであり、Weierstrass の多項式近似定理の本質は

$$\lim_{t \downarrow 0} \|W_t(f) - f\|_K = 0 \, (\forall f \in C^b(\mathbf{R}),\ \forall K : \text{compact})$$

が成り立つことを主張する。ただし $\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$ である。W_t を Weierstrass 作用素と呼ぶ。また任意の関数 $f \in C([0, 1])$ に対して、

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

と置くと、$\{B_n : n = 1, 2, \ldots\}$ はノルム空間 $C([0, 1])$ からそれ自身への有界線形作用素の列であり、Bernstein の近似定理は

$$\lim_{n \to \infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0 \quad (\forall f \in C([0, 1]))$$

が成り立つことを主張する。ただし、$\|f\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$ である。B_n を Bernstein 作用素と呼ぶ。

これらの概念をまとめて見よう。実または複素線形ノルム空間 X と、X 上のセミノルム系 $\{\| \ \|_\rho\}$ があるとき、X からそれ自身への有界な線形作用素のネット $\{T_\lambda\}$ が

$$\lim_{\lambda} \|T_\lambda(x) - x\|_\rho = 0 \quad (\forall x \in X, \forall \rho)$$

を満たすとき、$\{T_\lambda\}$ をＸ上の $\{\| \ \|_\rho\}$ に関する線形近似法と言う。もしセミノルム系がもともとのＸのノルムだけから成る場合は、単にノルム空間Ｘ上の線形近似法と省略する。従って、$\{W_t\}_{t>0}$ は $C^b(R)$ 上のセミノルム系 $\{\| \ \|_K : K \text{ is compact in } \mathbf{R}\}$ に関する線形近似法であり、$\{B_n : n = 1, 2, ...\}$ は $C([0, 1])$ 上の（$\| \ \|_\infty$ に関する）線形近似法である。

そこで与えられた線形作用素のネットがいつ線形近似法となるかと言う疑問が湧いて来るのは自然であろう。 H. Bohman [3] は Bernstein 作用素を含むようなもっと一般の補間作用素の列 に対して、それが線形近似法となる条件を発見した。その条件とはたった3個のありふれた関数 $\{1, x, x^2\}$ が線形近似されるだけで十分と言うものであった。これは P. Korovkin [7] に引き継がれ、彼によって任意の正線形作用素列でも正しいことが示された。更に D. Wulbert [16] によって、正性がある種のノルム条件で置き変えられることが示された。日本でも M. Makamura によってはじめて Korovkin の定理が紹介され、いくつかの関数解析的解釈が試みられている (cf. [4, 10, 11] 。

所で線形近似法の本質は関数近似であるが、しかしこれは見方を変えれば恒等作用素の強収束と見ることができる。このような観点に立てば、Korovkin 型近似定理は Banach 空間上の有界線形作用素の研究に一つの示唆を与えるのではないかと思う。実際具体的な関数空間上でこのような考えが１９７０年代に起こった。それは H. Bauer [2], C. Micchelli [9] 等に始まるのではないかと思われる。

『良い定理はそれ自体定義となり得る』

を信念として、次のような定義を考えて見よう。

Banach 空間 X と X の部分集合 S が与えられたとき、次のような性質を持つ $T \in B(X)$（$= X$ 上の有界線形作用素の全体）を試験集合 S に関する X 上の BKW-作用素と呼ぶ：

$$T_\lambda \in B(X),\ \lim_\lambda \| T_\lambda \| = \| T \|,\ \lim_\lambda \| T_\lambda(s) - T(s) \| = 0 \ (\forall s \in S)$$
$$\Rightarrow \lim_\lambda \| T_\lambda(x) - T(x) \| = 0 \ (\forall x \in X).$$

そしてそのような T の全体を $BKW(X\,;S)$ で表す (cf. [13])。

この言葉を用いると、 Korovkin 達の結果は、$C([0, 1])$ 上の恒等作用素は試験関数族 $\{1, x, x^2\}$ に関する BKW-作用素であると言える。

我々の研究目的の一つは具体的な X, S に対して、$BKW(X;S)$ を具体的に決定することにある。特に X としてコンパクト Hausdorff 空間 Ω 上の連続関数のつくる Banach 環 $C(\Omega)$ を対象とすることに興味がある。また S としては有限個の関数族を対象としたい。$BKW(X;S)$ を決定するには、ノルム 1 の BKW-作用素が分かればよいわけで、そのためには次の補題は基本的である。

Lemma (cf. [6]). Let Ω be a compact Hausdorff space, $C(\Omega)$ the Banach algebra of all continuous real functions on Ω, $M(\Omega)$ the space of all bounded real Borel measures on Ω and S a subset of Ω. Then T is a norm one BKW-operators on $C(\Omega)$ for a test functions S if and only if $T^*(\delta_\omega) \in U_S(M_1(\Omega))$ for every $\omega \in \Omega$. Here T^* is the adjoint of T, δ_ω is the unit point mass at $\omega \in \Omega$ and $U_S(M_1(\Omega))$ the set of all measures $\mu \in M_1(\Omega)$ such that if $\nu \in M_1(\Omega)$ and $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f d\nu$ for every $f \in S$, then $\mu = \nu$, where $M_1(\Omega) = \{\mu \in M(\Omega) : \|\mu\| \leq 1\}$.

ここに表れる集合 $U_S(M_1(\Omega))$ は S に関する uniqueness set と呼ばれ、上の補題が示すように BKW-作用素を考察するとき重要な集合となる。この基本補題を用いて、$\Omega = [0, 1], S = \{1, x, x^2\}$ のとき、$C(\Omega)$ 上の S に関するノルム 1 ユニタル BKW-作用素を次のように決定付けた。

Theorem (cf.[14, 15]). Every norm one unital BKW-operators T on $C([0, 1])$ for the test functions $\{1, x, x^2\}$ is of form

$$(Tf)(\omega) = \begin{cases} f(\varphi(\omega)), & \text{if } \omega \in \Omega \setminus G \\ f(0)\{1 - \varphi(\omega)\} + f(1)\varphi(\omega), & \text{if } \omega \in G \end{cases}$$

for every $f \in X$, where φ is a continuous map from $[0, 1]$ into itself and G is an open subset of $[0, 1]$ such that $0 < \varphi(\omega) < 1$ $(\forall \omega \in G)$ and $\varphi(\omega) = 0$ *or* 1 $(\forall \omega \in \partial G)$. Here ∂G denotes the topological boundary of G in $[0, 1]$.

ここでは上の結果を一般の $S=\{1, x, ..., x^n\}$ について考察する (cf. [6])。また $S=\{1, x, x^2\}$ の場合については任意の BKW-作用素を決定付け、更に Ω が [0,1] の特殊なコンパクト部分空間の場合についても考察する。 (cf. [12])。

Korovkin 型近似論の研究に関しては、最近出版された Altomare-Campiti [1] の本が良い教科書となろう。

2. Results

1. Uniqueness set for $S_n=\{1, t, ..., t^n\}$.

Theorem 1.1.

$$U_{S_n}(M_1([0, 1])) = \{a\mu_{A(f)} - (1-a)\mu_{B(f)} : 0 \le a \le 1,\ f \in \mathrm{span}(S_n) - \{\text{constants}\},$$
$$\|f\|_\infty = 1,\ \mu_{A(f)}, \mu_{B(f)} \text{ are probability measures on } A(f),\ B(f), \text{ resp.}\}$$

where $A(f) = \{t \in [0, 1] : f(t) = 1\}$, $B(f) = \{t \in [0, 1] : f(t) = -1\}$.

For the case of $n=2$, we can completely describe all measures in $U_{S_n}(M_1([0, 1]))$ as follows:

Theorem 1. 2. $\mu \in U_{S_2}(M_1([0, 1]))$ if and only if μ has one of the following forms:

i) $\mu = \pm\,\delta_x$, $0 \le x \le 1$,

ii) $\mu = a\delta_0 + b\delta_1$, $|a| + |b| = 1$,

iii) $\mu = a\delta_x + b\delta_1$, $|a+b| \le |a| + |b| = 1$ *and* $0 < x < 1/2$,

iv) $\mu = a\delta_0 + b\delta_x$, $|a+b| \le |a| + |b| = 1$ *and* $1/2 < x < 1$,

v) $\mu = a\delta_0 + b\delta_1 + c\delta_{1/2}$, $|a+b+c| \le |a+b| + |c| = |a| + |b| + |c| = 1$.

For the general case, we can completely describe all positive measures in $U_{S_n}(M_1([0, 1]))$ as follows:

Theorem 1.3. i) Let $n = 2k$, $k \ge 1$. Then $0 \le \mu \in U_{S_n}(M_1([0, 1]))$ if and only if μ has one of the following forms:

a) $\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i\delta_{x_i}$, $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$, $a_i \ge 0$ and $x_i \in [0, 1]$ for every i,

b) $\mu = a_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\delta_{x_i} + a_k\delta_1$, $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$, $a_i \ge 0$ and $x_i \in [0, 1]$ for every i.

ii) Let $n = 2k+1$, $k \ge 0$. Then $0 \le \mu \in U_{S_n}(M_1([0, 1]))$ if and only if μ has one of the following forms:

c) $\mu = a_0\delta_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i\delta_{x_i}, \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,\ a_i \ge 0$ and $x_i \in [0, 1]$ for every i.

d) $\mu = a_0\delta_1 + \sum_{i=1}^{k} a_i\delta_{x_i}, \sum_{i=0}^{k} a_i = 1,\ a_i \ge 0$ and $x_i \in [0, 1]$ for every i.

2. BKW-operators for S_n

Theorem 2.1. $T \in BKW(C([0, 1])\,;\, S_2)$ with $\|T\| = 1$ if and only if

$$(Tf)\,(t) = a(t)f(0) + b(t)f(1) + c(t)f(x(t))$$

for every $f \in C([0, 1])$ and $t \in [0, 1]$, where a, b, c and x are real functions satisfying the following conditions:

i) $|a| + |b| + |c| = 1$ on $[0, 1]$.

ii) $0 \le x \le 1$ on $[0, 1]$, and if $x(t_0) = 0$ or 1 for some $t_0 \in [0, 1]$ then $c(t_0) = 0$.

iii) If $0 < |c(t_0)| < 1$, then $|(a + b + c)(t_0)| < |(a + b)(t_0)| + |c(t_0)| = 1$.

iv) If $0 < |c(t_0)| < 1$ and $0 < x(t_0) < 1/2$, then $a(t_0) = 0$.

v) If $0 < |c(t_0)| < 1$ and $1/2 < x(t_0) < 1$, then $b(t_0) = 0$.

vi) $a(t)\delta_0 + b(t)\delta_1 + c(t)\delta_{x(t)}$, $t \in [0, 1]$, moves continuously in $M_1([0, 1])$ with the waek*-topology.

We note that a, b, c and x may not be continuous. However these functions have the following properties:

a) If $c(t_0) \neq 0$, then a, b, c and x are continuous on some neighbourhood of t_0.

b) $x(t)$ may not be continuous at the point $t_0 \in [0, 1]$ with $c(t_0) = 0$.

c) If $t_n \to t_0$ and $x(t_n) \to 0$, then $a(t_n) + c(t_n) \to a(t_0)$.

d) If $0 < x(t_0) < 1$ and x is continuous at t_0, then a, b, c are continuous at t_0.

Theorem 2.2. Let T be a norm one positive operator on $C([0, 1])$ and $n = 2k$ or $2k + 1$. Then $T \in BKW(C([0, 1])\,;\, S_n)$ if and only if

$$(Tf)(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i(t)\ f(x_i(t)), \quad f \in C([0, 1]) \text{ and } t \in [0, 1],$$

where

i) $\sum_{i=0}^{k} a_i(t) = 1$ and $a_i(t) \ge 0$ for every i and $t \in [0, 1]$,

ii) $x_i(t) \in [0, 1]$ for every i and $t \in [0, 1]$ (x_i may be not continuous),

iii) When $n = 2k$, if there exists a point $t_0 \in [0, 1]$ such that $x_i(t_0) = x_j(t_0)$ for every $i \neq j$ and $a_i(t_0) \neq 0$ for every i, then $0, 1 \in \{x_i(t_0) : 0 \leq i \leq k\}$,

iv) When $n = 2k+1$ for every i, then 0 or 1 is contained in $\{x_i(t_0) : 0 \leq i \leq k\}$,

v) $\sum_{i=0}^{k} a_i(t)\delta_{x_i(t)}$ is continuous with respect to the weak*-topology.

We discuss on a non-positive operator of a special form. For $\varphi_i \in C([0, 1])$ and $a_i \in \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ with $\varphi_i([0,1]) \subset [0, 1]$, let $T = \sum_{i=1}^{n} a_i C_{\varphi_i}$, where $C_{\varphi_i}(f) = f \circ \varphi_i$ for $f \in C([0, 1])$. Then $\| T \| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. Suppose that $\| T \| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1$. Then if $a_i \geq 0$ for every i, then $T \in BKW(C([0, 1])\,; S_{2n})$ by Theorem 2.2. But

$$\frac{C_t - C_{1-t}}{2} \notin BKW(C([0, 1])\,; S_k).$$

for every $k \geq 2$.

Theorem 2.3. Let $T = \sum_{i=1}^{n} a_i C_{\varphi_i}$ with $\| T \| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1$. Then there exists a positive integer N, depends on T, such that $T \in BKW(C([0, 1])\,; S_N)$ for some N if and only if the condition:

$$1 = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\varphi_i(t)} \right\|$$

for every $t \in [0, 1]$.

3. BKW-operators on the sequence space

Let $K = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\ldots\} \subset [0, 1]$. Then K is a compact subset of $[0, 1]$ and $C(K)$ is isomorphic to the space of real convergent sequences. We completely determine all operators in $BKW(C(K); \{1, t, t^2\})$. According to Theorem 2.1, the reader may suspect that such an operator T has form

$$(Tf)(t) = a(t)\ f(0) + b(t)\ f(1) + c(t)\ f(x(t)),\ t \in \mathrm{K}.$$

But there are some other possibilities.

Theorem 3.1. $T \in BKW(C(K); \{1, t, t^2\})$ with $\| T \| = 1$ if and only if

$$(Tf)(t) = a(t)\ f(0) + b(t)\ f(1) + c(t)\ f(x(t)) + d(t)\ f(y(t)), \quad t \in \mathrm{K}$$

for every $f \in C(K)$, where a, b, c, d, x and y are real functions on K satisfying the following conditions:

i) $|a| + |b| + |c| + |d| = 1$ on K.

ii) $x(K) \subset K$, $y(K) \subset K$, $x \leq y$ on K, and if $x(t_0) = 0$ or 1, $t_0 \in K$, then $c(t_0) = 0$.

iii) There exist subsets K_1 and K_2 with $K_1 \cup K_2 = K$ and $K_1 \cap K_2 = \varnothing$ such that $d = 0$ on K_1 and $0 < x < 1$ on K_2.

iv) If $0 < |c(t_0)| < 1$ and $t_0 \in K_1$, then $|(a+b+c)(t_0)| < |(a+b)(t_0)| + |c(t_0)| = 1$.

v) If $0 < |c(t_0)| < 1$, $t_0 \in K_1$ and $0 < x(t_0) < 1/2$, then $a(t_0) = 0$.

vi) $\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{y(t)} = 1$ for every $t \in K_2$.

vii) $a = b = 0$ and $|c + d| = |c| + |d| = 1$ on K_2.

viii) $a(t)\delta_0 + b(t)\delta_1 + c(t)\delta_{x(t)} + c(t)\delta_{y(t)}$, $t \in K$, are continuous with respect to the weak*-topology.

For a fixed positive integer m and any function f n $C(K)$, set

$$(T_m\ f)(1/n) = \begin{cases} -\dfrac{f(1) + f(1/m)}{2}, & if\ n = 1 \\ f(1/(n-1)), & if\ 2 \leq n \leq \infty \end{cases}$$

$$(U_m\ f)(1/n) = \begin{cases} \dfrac{f(1) - f(1/m)}{2}, & if\ n = 1 \\ f(1/(n-1)), & if\ 2 \leq n \leq \infty \end{cases}$$

In [12], we proved that T_1, T_2, U_m, $m \geq 2$ are contained in $BKW(C(K); \{1, t, t^2\})$, but didn't decide whether $T_m, m \geq 3$, and U_1 are BKW-operators or not. Note that U_1 ia the unilateral shift operator on $C(K)$. As an application of Theorem 3.1, we have that $T_m, m \geq 3$, and U_1 are not BKW-operators for $\{1, t, t^2\}$. Also the bacward shift operator defined by

$$(Bf)(1/n) = f(1/(n+1)) \quad \text{for} \quad f \in C(K)$$

and the operator defined by

$$(Tf)(1/n) = \frac{f(1/n) + f(1/(n+1))}{2} \quad \text{for} \quad f \in C(K)$$

are BKW-operator for $\{1, t, t^2\}$.

参考文献

1. F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications, W. de Gruyter & Co., Berlin-New York, 1994.
2. H. Bauer, Theorems of Korovkin type for adapted spaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 23(1973), 245-260.
3. H. Bohman, On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat. 2(1952), 43-56.
4. H. Choda and M. Echigo, On theorem of Korovkin, Proc. Japan Acad., 39(1963), 107-108.
5. K. Izuchi and S.-E. Takahasi, BKW-operators on the interval and the sequence spaces, to appear in J. Approx. Theory.
6. K. Izuchi and S.-E. Takahasi, BKW-operators on the interval, preprint.
7. P. P. Korovkin, On convergence of linear operators in the space of continuous functions (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S) 90(1953), 961-964.
8. P. P. Korovkin, Linear operators and approximation theeory, Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi, 1960.
9. C. A. Micchelli, Convergence of positive linear operators on C(X), J. Approx. Theory, 13(1975), 305-315.
10. R. Nakamoto and M. Nakamura, On theorem of Korovkin, Proc. Japan Acad., 41(1965),
11. T. Nishishiraho, Convergence of positive linear approximation processes, Tohoku Math. J., 35(1983), 441-458.
12. S.-E. Takahasi, BKW-operators on function spaces, Suppl. Rend. Cirrc. Mat. Palermo, Ser. 2, 33(1993), 479-488.
13. S.-E. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators on normed spaces, J. Approx. Theory, 72(1993), 174-184.

14. S.-E. Takahasi, (T, E)-Korovkin closures in normed spaces and BKW-operators, J. Approx. Theory, 82(1995), 340-351.

15. S.-E. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators from a function space into a commutative C*-algebra for special test functions, to appear in Tohoku Math. J.

16. D. E. Wulbert, Convergence of operators and Korovkin's theorem, J. Approx. Theory, 1(1968), 381-390.