

## 2つの generator をもつ shift について

新潟大 理、 渡辺 恵一 (Keiichi WATANABE)

R.T.Powers[7] は hyperfinite  $\text{II}_1$ -factor  $R$  上の (injective)  $*$ -endomorphism  $\sigma$  で  $\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma^k(R) = \mathbb{C}1$  を満たすものを shift と呼び、 $\sigma$  の index を Jones index  $[R:\sigma(R)]$  により定義した。 $R$  上の shift  $\sigma$  が Powers の binary shift であるとは、 $R$  の unitary 元  $u$  が

- (1)  $u^2 = 1$
- (2)  $\langle \sigma^i(u); i = 0, 1, 2, \dots \rangle'' = R$
- (3)  $u \sigma^k(u) = \pm \sigma^k(u) u$

を満たすように存在するときをいう。この unitary  $u$  は  $\sigma$  の generator と呼ばれる。条件(3)により、 $u \sigma^k(u) = (-1)^{a(k)} \sigma^k(u) u$  なる signature sequence  $a$  (すなわち  $\mathbb{Z}$  から  $\{0, 1\}$  への map で  $a(n) = a(-n)$  をみたすもの) が存在する。Powers は、binary shift が共役であるための必要十分条件は signature sequence が一致することであることを示した。外部共役に関しては、その後様々な興味深い研究が行われている。一方、長田 (ま) [2]、Price [9] は binary shift を、その条件(1)を  $u^n=1$  とした  $n$ -shift に一般化した。これはさらに榎本-長田 (ま) -綿谷 [4]、Bures-Yin [1] によって group shift として一般化されている。

$u^2 = 1$  の 2 を  $n$  とする代わりに、generator の個数を複数にしたらどうなるであろうか？ ここでは、見かけ上 2つの generator を持つような shift について若干の注意を述べることにする。

定義  $R$  上の shift  $\sigma$  が 2つの generator を持つとは、 $R$  の unitary 元  $u, v$  が、

- (1)  $u^2 = 1, v^2 = 1$
- (2)  $\langle \sigma^i(u), \sigma^j(v); i, j = 0, 1, 2, \dots \rangle'' = R$

$$(3) \quad u \sigma^i(u) = \pm \sigma^i(u) u \quad v \sigma^j(v) = \pm \sigma^j(v) v \\ \sigma^i(u) \sigma^j(v) = \pm \sigma^j(v) \sigma^i(u)$$

を満たすように存在するときをいう。

定義により、交換反交換を司る signature sequence は

$$u \sigma^i(u) = (-1)^{a_1(i)} \sigma^i(u) u, \quad v \sigma^j(v) = (-1)^{a_2(j)} \sigma^j(v) v, \\ \sigma^i(u) \sigma^j(v) = (-1)^{b(i,j)} \sigma^j(v) \sigma^i(u)$$

の様に3つ現れ、 $b(0) = 0$  である必要はない。

まず、Bures-Yin[1; Proposition 2.1] により、2つの generator を持つ shift は group shift であることに注意しよう。そこで、group shift を signature sequence と関連させて扱うために用語と記号の準備をする。榎本-長田(ま)-綿谷[4]は binary shift の諸結果を group shift へ一般化するために commutation relator の概念を導入し、commutation relator 全体の集合と、その群の制限直積上の bicharacter のあるクラスとの間に一対一対応があることを示した。

定義  $G$  を可算離散群、 $G_i = G (i = 0, 1, 2, \dots)$ ,  $X = \prod_{i=0}^{\infty} G_i$  (制限直積)、 $\rho_i: G \rightarrow G_i \subset X$  (canonical isomorphism) とする。このとき、 $\text{map } a; \mathbb{Z} \times G \times G \rightarrow \mathbb{T}$  が commutation relator であるとは、

$$(1) \quad a(n; gh, k) = a(n; g, k) a(n; h, k)$$

$$(2) \quad a(n; g, hk) = a(n; g, h) a(n; g, k)$$

$$(3) \quad a(n; g, h) = \overline{a(-n; h, g)} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad g, h, k \in G$$

を満たすときをいう。

commutation relator 全体の集合を  $\text{Comm}(G)$  とかく。

$s$  を制限直積  $X$  上の canonical shift とする。 $\text{Bich}(X, \mathbb{T})$  を次の (a), (b), (c) を満たす  $\text{map } m; X \times X \rightarrow \mathbb{T}$  全体の集合とする:

(a)  $m$  は bicharacter

$$(b) \ m(s(x), s(y)) = m(x, y)$$

$$(c) \ m(\rho_i(g), \rho_j(h)) = 1 \quad \text{if } i < j.$$

注意　上の定義が榎本-長田(ま)-綿谷のものと異なるのは次の事のみである:

commutation relator が  $\{0\} \times G \times G$  で定義され、値 1 の必要がない、

$\text{Bich}(X, T)$  の条件(c)が  $i \leq j$  でなく  $i < j$  である。

次の補題は [4; Lemma 3.1] と全く同様に示される。

補題 1.  $\text{Comm}(G)$  と  $\text{Bich}(X, T)$  の間には次によって一対一対応が存在する:

$$m(x, y) = \{a(i-j; x(i), y(j)); i \geq j, i \geq 0, j \geq 0\}$$

$$a(n; g, h) = \begin{aligned} & m(\rho_i(g), \rho_j(h)) / m(\rho_j(h), \rho_i(g)) && \text{if } n = i - j > 0 \\ & m(\rho_i(g), \rho_i(h)) && \text{if } n = 0. \end{aligned}$$

以後、 $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  とし、その元を  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  の様に書く。

また、 $e_j^1 = \rho_j\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $e_j^2 = \rho_j\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  とおいて、

制限直積  $X = \prod_{j=0}^{\infty} G_j$  の元  $g$  を

$$g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j^1 e_j^1 + g_j^2 e_j^2, \quad g_j^1, g_j^2 \in \mathbb{Z}_2$$

と書くことにする。

$a_1, a_2, b$  を signature sequence、 $a_1(0) = a_2(0) = 0$  とする。

$\text{Comm}(G)$  の元  $a$  は

$$\begin{aligned} a(n; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) &= (-1)^{a_1(n)}, \quad a(n; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (-1)^{a_2(n)} \quad \text{及び} \\ a(n; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) &= (-1)^{b(n)} \end{aligned}$$

に依って一意に定まる。このとき、補題 1 により  $a$  に対応する  $\text{Bich}(X, T)$  の元  $m$  が存在し、 $\lambda_m(X)$  上の group shift を引きおこすが ( $\lambda_m(X)$  が factor となるための条件については後述)、

これは2つの generator  $\lambda_m(e_0^1)$ ,  $\lambda_m(e_0^2)$  をもつ。但し、 $\lambda_m$  は  $m$  の引きおこす左正則射影表現、すなわち、

$$(\lambda_m(x)\xi)(y) = m(x, x^{-1}y)\xi(x^{-1}y), \quad \xi \in \ell^2(X).$$

逆に、2つの generator をもつ shift は  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift であろうか。例えば、generator  $u$  をもつ binary shift  $\sigma$  は  $v = \sigma(u)$  とおけば、2つの generator をもつことになる。このようなものを除くためには、2つの generator の shift 像が生成する von Neumann subalgebras に適当な条件を課せばよい。

命題 2.  $\sigma$  を2つの generator  $u, v$  をもつ shift とする。 $P = \{\sigma^i(u); i = 0, 1, 2, \dots\}''$ ,  $Q = \{\sigma^j(v); j = 0, 1, 2, \dots\}''$  とおく。 $P \cap Q = \mathbb{C}1$ ,  $\dim P = \infty$ ,  $\dim Q = \infty$  と仮定するならば、 $\sigma$  は  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift と共役である。

証明  $S = \{u, v\}$  とおき、 $\{\sigma^k(S); k = 0, 1, 2, \dots\}$  の生成する unitary subgroup を  $G_\sigma(S)$ 、商群  $G_\sigma(S)/G_\sigma(S) \cap \mathbb{C}$  を  $Y$  とかく。[1; Proposition 2.1] を考えれば、 $Y$  が  $\coprod \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  に同型であることを示せばよいことがわかる。群同型  $\Phi; Y \rightarrow \coprod \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  は次のように定義できる：

$$\begin{aligned} & \Phi([u^{k(0)} \sigma(u)^{k(1)} \dots \sigma^n(u)^{k(n)} v^{l(0)} \sigma(v)^{l(1)} \dots \sigma^n(v)^{l(n)}]) \\ &= k(0)e_0^1 + \dots + k(n)e_n^1 + l(0)e_0^2 + \dots + l(n)e_n^2. \end{aligned}$$

実際、 $[u^{k(0)} \dots \sigma^n(u)^{k(n)} v^{l(0)} \dots \sigma^n(v)^{l(n)}] = 1_Y$  ならば、

あるスカラー  $\alpha$  が存在して

$$u^{k(0)} \dots \sigma^n(u)^{k(n)} = \alpha v^{l(0)} \dots \sigma^n(v)^{l(n)}$$

であるから、 $P \cap Q = \mathbb{C}1$  の仮定により

$$u^{k(0)} \dots \sigma^n(u)^{k(n)} \in \mathbb{C}1$$

となる。さらに  $\dim P = \infty$ ,  $\dim Q = \infty$  の仮定により

$k(0) = \dots = k(n) = l(0) = \dots = l(n) = 0$  でなければならない。終

注意 上の命題の仮定について、もし  $u \notin \sigma(R)$  ならば  $\dim P$

$= \infty$  となる。実際、 $\{\sigma^k(u); k = 0, 1, 2, \dots\}$  が一次独立。

### 相対可換子環について

以後、 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift の相対可換子環について考える。group shift としては、相対可換子環はある部分群の言葉で述べられるが ([1; Proposition 1.2])、ここではそれを、binary shift の場合に準じて、3つの signature sequence と具体的に関連させたい。 $a_1, a_2, b$  を  $b(0) = 0$  とは限らない signature sequence とし、 $m$  を対応する  $\text{Bich}(X, \mathbb{T})$  の元とする。 $m$  は次のように second exterior product  $X \wedge X$  上の multiplier  $\rho$  を誘導する：

$$\rho(g \wedge h) = m(g, h) \overline{m(h, g)}, \quad g, h \in X.$$

相対可換子  $\sigma^n(\lambda_m(X)^\#)' \cap \lambda_m(X)^\#$  を調べるには、 $\{g \in X; \rho(g \wedge s^n(X)) = 1\}$  を調べればよい (cf. [1; Proposition 1.2])。次の補題は簡単な計算で示される。

補題 3.  $X$  の元  $g = \sum g_j^1 e_j^1 + g_j^2 e_j^2$  に対して次は同値：

$$(1) \quad \rho(g \wedge s^n(X)) = 1$$

$$(2) \quad \sum g_j^1 a_1(k-j) + g_j^2 b(k-j) = 0, \quad k \geq n$$

$$\sum g_j^1 b(k-j) + g_j^2 a_2(k-j) = 0, \quad k \geq n$$

Price は 2-shift に対して、 $\perp\!\!\!\perp \mathbb{Z}_2$  上の multiplier  $m$  が non degenerate (i.e.,  $\lambda_m(X)^\#$  が factor) であることは、対応する signature sequence  $a$  が non periodic であることと同値である事を示した。 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift ではこれは成立しない。

例 1.  $a_1 = a_2 = (0, 0, \underline{1}, 0, \dots)$ ,  $b = (1, \underline{0}, \dots)$  とすると (アンダーラインは反復する部分を示す)、これらはすべて non periodic であるが、対応する  $m$  は degenerate である。実際、 $g = e_0^1$

+  $e_0^2 + e_2^1 + e_2^2$  とおくと  $\rho(g \wedge X) = 1$  となる。

signature sequence  $a$  が essentially periodic であるとは、整数  $p > 0$  及び  $N \geq 0$  が  $a(i+p) = a(i)$ ,  $i \geq N$  を満たすように存在するときをいう。次の命題の証明は、 $n$ -shift に対するものと同様にすればできる (cf. たとえば [1; Lemma 3.4])。

命題 4.  $\lambda_m(X)''$  が factor でないならば、 $a_1, a_2, b$  は全て essentially periodic である。

この命題の逆は成立しない。

例 2.  $a_1 = (0, 1, \underline{0}, \dots)$ ,  $a_2 = (0, \underline{1}, \dots)$ ,  $b = (1, \underline{0}, \dots)$  とすると、これらはすべて essentially periodic であるが、 $\lambda_m(X)''$  は factor である。

定理 5.  $a_1, a_2, b$  を 0 でない signature sequence で support が有限なものとする。

$$d_1 = \max\{i \in \mathbb{N}; a_1(i) \neq 0\}$$

$$d_2 = \max\{i \in \mathbb{N}; a_2(i) \neq 0\}$$

$$d_b = \max\{i \in \mathbb{N}; b(i) \neq 0\}$$

とおく。  $m$  を  $a_1, a_2, b$  に対応する  $\text{Bich}(X, T)$  の元とする。つぎの

(i) または (ii) を仮定する:

$$(i) \quad d_b \leq d_1 \leq d_2, \quad d_b < d_2$$

$$(ii) \quad d_1 \leq d_2 \leq d_b, \quad d_1 < d_b.$$

このとき、 $\lambda_m(X)''$  は (hyperfinite  $\Pi_1$ -)factor であって ( $R$  と書く)、(i) の場合には

$$\begin{aligned} \sigma^n(R)' \cap R &= \mathbb{C}1 & (0 \leq n \leq d_1) \\ &\{u_i; 0 \leq i \leq n-d_1-1\}'' & (d_1+1 \leq n \leq d_2) \\ &\{u_i, v_j; 0 \leq i \leq n-d_1-1, 0 \leq j \leq n-d_2-1\}'' \end{aligned}$$

$$(d_2+1 \leq n)$$

(ii)の場合には

$$\sigma^n(R)' \cap R = \mathbb{C}1 \quad (0 \leq n \leq d_b)$$

$$\{u_i, v_j; 0 \leq i, j \leq n-d_b-1\}'' \quad (d_b+1 \leq n).$$

ここで、 $u_i = \lambda_m(e_i^1)$  および  $v_j = \lambda_m(e_j^2)$  と書いた。

証明  $X$  の部分群  $Y$  に対して、

$$D(Y) = \{g \in X; \rho(g \wedge h) = 0, h \in Y\}$$

とおく。(i)の場合のみ示す ((ii)の場合も同様だから)。[1; Corollary 1.3]により、次を示せば十分:

$$D(s^n(X)) = \{0\} \quad (0 \leq n \leq d_1)$$

$$[e_i^1; 0 \leq i \leq n-d_1-1] \quad (d_1+1 \leq n \leq d_2)$$

$$[e_i^1, e_j^2; 0 \leq i \leq n-d_1-1, 0 \leq j \leq n-d_2-1]$$

$$(d_2+1 \leq n)$$

ここで  $[e_i^1; 0 \leq i \leq n-d_1-1]$  は  $e_i^1, 0 \leq i \leq n-d_1-1$  の生成する  $X$  の部分群をあらわす。左辺が右辺を含むことは容易である。

$D(s^n(X))$  が 0 でない元  $g$  を含むと仮定して、

$$j_1 = \max\{j; g_j^1 \neq 0\} \text{ または } j_2 = \max\{j; g_j^2 \neq 0\} \text{ とおく。}$$

補題 3 により、

$$(*) \sum_0^{j_1} g_j^1 a_1(k-j) + \sum_0^{j_2} g_j^2 b(k-j) = 0$$

$$(**) \sum_0^{j_2} g_j^2 a_2(k-j) + \sum_0^{j_1} g_j^1 b(k-j) = 0$$

が  $k \geq n$  に対して成り立つ。

ステップ(1)  $0 \leq n \leq d_1$  のとき、 $g_j^1 \neq 0$  なる  $j$  が存在するとする。もし  $j_1 \leq j_2$  ならば、 $k = d_2 + j_2 \geq d_1 \geq n$  に対する等式(\*\*)を用いる。 $d_b < d_2$  であるから、等式(\*\*)の項は

$$g_{j_2}^2 a_2(d_2) \text{ 以外は } 0, \text{ 従って } g_{j_2}^2 a_2(d_2) = 0 \text{ である。}$$

$a_2(d_2) = 1$  であるから、 $g_{j_2}^2 = 0$  となるが、これは矛盾。もし  $j_1 > j_2$  または

$g_j^2 = 0, j \geq 0$  ならば、 $k = d_1 + j_1 \geq n$  に対する等式(\*)を用いる。等式(\*)の項は  $g_{j_1}^1 a_1(d_1)$  以外は 0、従って  $g_{j_1}^1 a_1(d_1) = 0$

であり、これは矛盾。結局  $g_j^1 = 0, j \geq 0$  でなければならない。

ステップ(2)  $d_1+1 \leq n$  のとき、 $g_s^2 = 1$  なる  $s \geq 0$  が存在するとする。(1)と同様に矛盾が導けて、 $g_j^2 = 0, j \geq 0$  とわかる。 $g_s^1 = 1$  なる  $s \geq n-d_1$  が存在するとする。もし  $j_1 \leq j_2$  ならば、仮定より  $j_1 \geq s \geq n-d_1$  だから、 $k = d_2 + j_2 \geq d_1 + j_1 \geq n$  に対する等式(\*\*)を用いて、またもし  $j_1 > j_2$  ならば  $k = d_1 + j_1 \geq n$  に対する等式(\*)を用いて矛盾を導ける。従って  $g_j^1 = 0, j \geq n-d_1$  でなければならない。

ステップ(3)  $d_2+1 \leq n$  のとき、上と同様に  $g_j^2 = 0, j \geq n-d_2$  が示せる。 終

注意 上の定理で、(i) および (ii) の条件は落とすことができない。たとえば、 $a_1 = a_2 = b$  とすると、 $g_j^1 = g_j^2, j \geq 0$  なるどのような  $X$  の元  $g$  も  $\rho(g \wedge X) = 0$  を満たす。

系  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift の外部共役類は少なくとも可算無限個存在する。

証明 整数  $d \geq 1$  に対して、 $a_1^d = a_2^d = (0, \dots, 0, \overset{(d)}{1}, 0, \dots)$  および  $b = (1, 0, \dots)$  とする。このとき、 $d_b < d_1 = d_2$  である。

$\sigma_d$  を対応する  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift とすると、定理によって

$$\sigma_d^n(R)' \cap R = \mathbb{C}1, 0 \leq n \leq d \text{ および}$$

$$\sigma_d^n(R)' \cap R \neq \mathbb{C}1, n \geq d+1$$

である。相対可換子環は外部共役不変量だから、 $d_1 \neq d_2$  ならば  $\sigma_{d_1}$  と  $\sigma_{d_2}$  は外部共役ではない。 終

命題4と定理5のある意味の逆を考えてみよう。 $a_1, a_2, b$  を signature sequence とし、 $m$  を対応する  $\text{Bich}(X, T)$  の元とする。

$\lambda_m(X)''$  が factor と仮定する。このとき、 $a_1, a_2, b$  の少なくとも1つは not essentially periodic でなければならないであろうか、また、それらの support は有限でなければならないであろうか？

例 3.  $a_1 = (0, 1, \underline{0}, \dots)$ ,  $a_2 = (0, \underline{1}, 1, \dots)$ ,  $b = (1, \underline{0}, 0, \dots)$  とする。このとき、これらすべては essentially periodic であり、うち  $a_2$  は support が有限でない。しかし  $\lambda_m(X)''$  は factor である。

index 4 の shift として、 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift と 4-shift の関係は興味深い問題であると思われる。

命題 6.  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift と 4-shift は共役になり得ない。

証明 任意の 4-shift  $\sigma_4$  に対して  $\sigma_4(R)' \cap R = \mathbb{C}1$  であるから ([1; Proposition 3.1] を参照)、 $\sigma$  を任意の  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift とするとき、 $\sigma(R)' \cap R \neq \mathbb{C}1$  ならば (外部) 共役ではあり得ず、 $\sigma(R)' \cap R = \mathbb{C}1$  ならば [1; Proposition 2.5] によって共役ではない。 終

例 4. (4-shift と外部共役になり得ない  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift)

$a_1 = (0, 1, \underline{0}, \dots)$ ,  $a_2 = (0, 0, 0, 1, \underline{0}, \dots)$ ,  $b = (0, 0, 1, \underline{0}, \dots)$  とする。このとき、( $d_1 < d_b < d_2$  であって、)

$$\begin{aligned}
 D(s^n(X)) &= \{0\} & n &= 0 \\
 &[e_1^1 + e_0^2] & n &= 1 \\
 &[e_1^1 + e_0^2, e_2^1 + e_1^2] & n &= 2 \\
 &[e_0^1, e_1^1 + e_0^2, e_2^1 + e_1^2, e_3^1 + e_2^2] & n &= 3 \\
 &[e_i^1, e_j^2, e_{n-2}^1 + e_{n-3}^2, e_{n-1}^1 + e_{n-2}^2, \\
 &e_n^1 + e_{n-1}^2; 0 \leq i \leq n-3, 0 \leq j \leq n-4] & n &\geq 4.
 \end{aligned}$$

特に、 $\sigma(R)' \cap R \neq \mathbb{C}1$  であるから、この  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -shift はいかなる 4-shift とも外部共役になり得ない。

## References

- [1] D.Bures and H.S.Yin, Shifts on the hyperfinite factor of type  $\text{II}_1$ , J.Operator Theory 20(1988), 91-106.
- [2] M.Choda, Shift on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor, J.Operator Theory 17(1987), 223-235.
- [3] M.Enomoto and Y.Watatani, Powers' binary shifts on the hyperfinite factor of type  $\text{II}_1$ , Proc.Amer.Math.Soc.,105 No.2(1989), 371-374.
- [4] M.Enomoto, M.Choda, Y.Watatani, Generalized Powers' binary shifts on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor, Math.Japon., 33 No.6(1988), 831-843.
- [5] M.Enomoto, M.Nagisa, Y.Watatani, H.Yosida, Relative commutant algebras of Powers' binary shifts on the hyperfinite  $\text{II}_1$ -factor, preprint 1989.
- [6] V.Jones, Index for subfactors, Invent Math.,72(1983), 1-25.
- [7] R.T.Powers, An index theory for semigroups of \*-endo morphisms of  $B(H)$  and type  $\text{II}_1$  factors, Can.J.Math., 40(1988), 86-114.
- [8] G.Price, Shifts on type  $\text{II}_1$  factors, Can.J.Math., 39(1987), 492-511.
- [9] G.Price, Shifts on integer index on the hyperfinite  $\text{II}_1$  factor, Pacific J.Math.,132(1988), 379-390.
- [10] K.Watanabe, Shifts with two generators on the hyperfinite  $\text{II}_1$ -factor, Nihonkai Math.J.,1(1990),121-135.