数理解析研究所講究録
949巻 1996年 193-199

ランダムな流れ場の中の代数ソリトン

山口大教養　松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

1. 概要

2層流体系の界面を伝播する、弱非線形界面波への種々のランダムネスの影響を調べる。波動伝播を支配するモデル方程式として、以下の外力項を含む Benjamin-Ono (BO) 方程式を考える [1]:

$$\eta_t+(F-1)\eta_x-\frac{3\alpha}{2}\eta\eta_x-\frac{\Delta\delta}{2}H\eta_{xx}=\frac{\gamma\alpha F^2}{2}B_x \tag{1}$$

ここで $\eta=\eta(x,t)$ は界面変位、Fはフルード数、Δは上、下流体層の密度比を表す。右辺のγBは流体底面形状の不均一性を特徴づける関数である。また左辺最後の項の Hはヒルベルト変換の演算子である。α、および δは小さな無次元パラメータで、各々非線形、および分散の強さの目安を与える。上記方程式は、２次元非粘性、非圧縮流体の方程式系へ、特異摂動法を適用することによって導かれたが、その際の仮定として $\delta=O(\alpha)$ を置いている。

方程式（1）は右辺$=0$のときはよく知られたBO 方程式に帰着する。BO 方程式は完全可積分系であり、ソリトン解や周期波解等の厳密解を有する。ここではフルード数が１に近く、かつ時間的にゆるやかに変化する状況を考え、$F=1+\alpha\Gamma(\alpha t)$ と置く。この条件下で方程式（1）を $t\to(\Delta\delta/\alpha^2)t, x\to(\delta/\alpha)x, \eta\to(8/3)u$, $B\to(16/3F^2)B$ のように規格化すると

$$u_t+\Gamma(t)u_x-4uu_x-Hu_{xx}=\gamma B_x,\ u=u(x,t) \tag{2}$$

となる。以下では Γ, Bおよび B_xがランダムに変化する場合を考察し、これらのランダムネスがソリトンや周期波の伝播特性、特に u の平均値に与える影響を、解析的手法により調べる。

2. ランダムな流れ場

最初に流体底面は平坦、すなわち $B=0$ で流れ場がランダムに変化する場合を考える。このとき（2）は

$$u_t + \Gamma(t)u_x - 4uu_x - Hu_{xx} = 0,\ u = u(x,t) \tag{3}$$

となる。ここでΓは平均値1からのフルード数のゆらぎを表すが、これは平均値0のガウス分布に従うと仮定する。すなわち

$$< \Gamma(t) >= 0,\ < \Gamma(t_i)\Gamma(t_j) >= 2D\delta(t_i - t_j) \tag{4}$$

ここで $<\cdots>$はアンサンブル平均を表す。またDはΓの相関の強さを特徴づける正の定数、$\delta(t_1-t_2)$ はデルタ関数である。（3）は可積分方程式であり種々の統計量が厳密に計算できるが、ここではuがソリトン解と周期波解の場合について、これらの平均値を求める。

A. ソリトン

BO 方程式（3）の1ーソリトン解は、代数型の解で

$$u(x,t) = \frac{a}{a^2(x-\xi)^2+1} \tag{5a}$$

$$\xi = \int_0^t \Gamma(s)ds - at + \xi_0 \tag{5b}$$

と書ける。ここでa およびξはソリトンの振幅、および初期位置である。ランダムネスは時刻tでのソリトンの位置を表すパラメータξの中にのみ入っている。u のフーリエ変換 $\hat{u}$ は

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-ikx}dx = \pi\mathrm{e}^{-ik\xi-|k|/a}. \tag{6}$$

となるが、これとガウス分布の仮定、および（4）より導かれる公式

$$< \mathrm{e}^{ik\int_0^t \Gamma(s)ds} >= \mathrm{e}^{-k^2Dt} \tag{7}$$

を用いると、u の平均値は直ちに計算できて次のようになる：

$$< u(x,t) >= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-Dtk^2-k/a}\cos k(x+at-\xi_0)dk \tag{8}$$

この積分を $t \to \infty$ $(x + at - \xi_0 = \text{const.})$ で評価すると

$$< u(x,t) > \sim \sqrt{\frac{\pi}{4Dt}} \exp\left[-\frac{(x+at-\xi_0)^2}{4Dt}\right] \propto t^{-1/2} \tag{9}$$

となり、初期の代数ソリトンはガウシアン的な波束に近づくことがわかる。同様な計算により u が $N-$ソリトン解の場合においてもその平均値、さらに $< u(x,t)u(y,t) >$等の相関関数も厳密に計算できるがここでは省略する。

B. 周期波

（３）の 1–周期波解は次のように書ける。

$$u(x,t) = \frac{k}{2}\frac{\sinh\phi}{\cos\eta + \cosh\phi} \tag{10a}$$

$$\eta = k(x-\xi),\ \phi = \tanh^{-1}(k/a),\ (\phi > 0) \tag{10b}$$

ここで kは波数を表す。u の平均値は（７）を用いると

$$< u(x,t) > = \frac{k}{2} + k\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathrm{e}^{-n^2k^2Dt - n\phi}\cos(nkz),\ (z = x + at - \xi_0) \tag{11}$$

のように無限級数で表現できる。長波長極限 $k \to 0$ では上式は（８）に帰着する。$t \to \infty$ の極限においては（１１）は

$$\begin{aligned} < u(x,t) > &\sim \frac{k}{2} + k\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathrm{e}^{-n^2k^2Dt}\cos(nkz) \\ &= \frac{k}{2}\theta_4(\frac{kz}{2}, q),\ (q = \mathrm{e}^{-k^2Dt}) \end{aligned} \tag{12}$$

のような漸近形をもつ。ここでθ_4は Jacobi のテータ関数である。

3. ランダムな底面形状変化

ここでは流体底面形状がランダムに変化する場合を考える。ただし簡単のため、Γは時間によらず一定としておく。モデル方程式は

$$u_t + \Gamma u_x - 4uu_x - Hu_{xx} = \gamma B_x,\ u = u(x,t) \tag{13}$$

と書ける。底面形状の変化は平均 0 のガウス分布とする。すなわち

$$< B(x) >= 0, \; < B(x)B(y) >= 2D\delta(x-y) \tag{14}$$

BO 方程式と異なり（１３）は一般には可積分とならないため、u の平均値を求めるには何らかの近似計算を必要とするが、以下では$\gamma << 1$ の場合を考え、ランダムな底面形状変化がソリトンの伝播特性に与える影響を、ソリトンの摂動論により調べる。

A. ソリトンの摂動論

小さな摂動項を含む BO 方程式の摂動論 [2, 3] によると、摂動によって誘起されるソリトンの振幅、および位置の変化の時間発展は、$O(\gamma)$ の近似で次のように書ける：

$$\frac{da}{dt} = -\frac{4\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_2 B_x dx \equiv -\frac{4\gamma}{\pi}(g_2, B_x) \tag{15}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \Gamma - a + \frac{4\gamma}{\pi}(g_1, B_x) \tag{16}$$

ここで

$$g_1 = \frac{x-\xi}{a^2(x-\xi)^2+1}, \; g_2 = -\frac{a}{a^2(x-\xi)^2+1} \tag{17}$$

（１５）、（１６）を逐次的に解くために a、および ξを

$$a(t) = a_0 + \gamma a_1, \; \xi(t) = \bar{\xi} + \gamma\xi_1 \tag{18}$$

のように　γのべきに展開する。ここで$\bar{\xi} = (\Gamma - a_0)t + \xi_0$.（１５）－（１８）より

$$a_1 = -\frac{4}{\pi}\int_0^t (g_2^{(0)}, B_x)dt', \; (g_2^{(0)} = g_2 \mid_{\gamma=0}) \tag{19}$$

$$\xi_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^t dt' \int_0^{t'} (g_2^{(0)}, B_x)dt'' + \frac{4}{\pi}\int_0^t (g_1^{(0)}, B_x)dt' \tag{20}$$

を得る。

B. u の平均値

u の平均値は $O(\gamma)$ の近似の範囲で

$$< u(x,t) > \sim \frac{1}{2} < (a_0 + \gamma a_1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik[\phi_0 + \gamma\{a_1(x-\bar{\xi}) - a_0\xi_1\}] - |k|} dk > \tag{21}$$

と書ける。ただし$\phi_0 = a_0(x-\bar{\xi})$. ここで f, gが平均値0のガウス分布をもつ確率変数とするとき、

$$<e^f>= e^{\frac{1}{2}<f^2>}, \; <fe^g>=<fg> e^{\frac{1}{2}<g^2>} \tag{22}$$

等の公式が成り立つことに注意する。（１９）、（２０）を（２１）へ代入し、（２２）を用いて平均値を計算し、さらに公式 $(1+\gamma\frac{\partial}{\partial x})f(x) = f(x+\gamma) + O(\gamma^2)$ を使うと最終的に

$$<u(x,t)>\sim \frac{a_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\phi_0+\gamma^2\phi_1)-|k|-\frac{1}{2}\gamma^2 b^2 k^2} dk \tag{23}$$

が導かれる。ここで

$$\phi_1 = \frac{<a_1^2>}{a_0}(x-\bar{\xi}) - <a_1\xi_1> \tag{24}$$

$$b^2 =<a_1^2>(x-\bar{\xi})^2 - 2a_0 <a_1\xi_1>(x-\bar{\xi}) + a_0^2 <\xi_1^2> \tag{25}$$

上式に現れる期待値$<\xi_1^2>$、$<a_1^2>$、$<a_1\xi_1>$は（１９）、（２０）および（２２）を使って具体的に評価でき、以下のようになる。

$$<\xi_1^2>= \frac{32D}{\pi}\frac{1}{a_0(\Gamma-a_0)^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\tau^2}{(\Gamma-a_0)^2} + \frac{2(\Gamma-2a_0)}{a_0(\Gamma-a_0)^2}\ln(1+\frac{\tau^2}{4}) + \frac{\Gamma-3a_0}{a_0^2(\Gamma-a_0)}\frac{\tau^2}{\tau^2+4}\right] \tag{26}$$

$$<a_1^2>= \frac{32D}{\pi}\frac{a_0}{(\Gamma-a_0)^2}\frac{\tau^2}{\tau^2+4} \tag{27}$$

$$<a_1\xi_1>= -\frac{16D}{\pi}\frac{1}{(\Gamma-a_0)^3}\frac{\tau^3}{\tau^2+4} \tag{28}$$

ただしここで $\tau = a_0(\Gamma-a_0)t$ と置いた。これら表式は $t\to 0$ のとき

$$<\xi_1^2>\sim \frac{8D}{\pi a_0}t^2, \; <a_1^2>\sim \frac{8Da_0^3}{\pi}t^2, \; <a_1\xi_1>\sim -\frac{4Da_0^3}{\pi}t^3 \tag{29}$$

また $t\to\infty$ のとき

$$<\xi_1^2>\sim \frac{16D}{\pi a_0(\Gamma-a_0)^2}t^2, \; <a_1^2>\sim \frac{32D}{\pi}\frac{a_0}{(\Gamma-a_0)^2}, \; <a_1\xi_1>\sim -\frac{16D}{\pi}\frac{a_0}{(\Gamma-a_0)^2}t \tag{30}$$

となることに注意する。（３０）を用いると、（２３）の $t\to\infty$（ただし $x-\bar{\xi} = \mathrm{const.}$）における漸近形として

$$<u(x,t)>\sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{a_0}{\tilde{b}\gamma}\exp\left[-\frac{(\phi_0+\gamma^2\tilde{\phi}_1)^2}{2\gamma^2\tilde{b}^2}\right] \propto t^{-1} \tag{31}$$

が導かれる。ここで簡単のため

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{16D}{\pi}\frac{a_0}{(\Gamma - a_0)^2}t, \ \tilde{b} = \sqrt{\frac{8Da_0}{\pi}}t \tag{32}$$

と置いた。

4. ランダムな底面形状勾配変化

最後に流体底面の勾配が平均値0のガウス分布に従う場合を考える。ただし§3と同様に$\gamma << 1$と仮定する。（１４）に対応する式は今の場合

$$< B_x(x) >= 0, \ < B_x(x)B_y(y) >= 2D\delta(x-y) \tag{33}$$

と書ける。摂動論による計算の手続きは§3と同様に行えるので、ここでは結果のみ記す。

uの平均値は（２３）の形で与えられる。ただし（２６）－（２８）に対応する式は以下のようになる。

$$< \xi_1^2 >= \frac{32D}{\pi a_0^3(\Gamma - a_0)^4}\left[\frac{4}{3}\tau^2 + \frac{2}{3}(\tau^3 - 3\tau)\tan^{-1}\frac{\tau}{2}\right.$$
$$\left. -(\tau^2 - \frac{2}{3})\ln(1+\frac{\tau^2}{4}) - \frac{2a_0 - \Gamma}{a_0}\tau^2 + 2\left(\frac{2a_0-\Gamma}{a_0}\right)^2\{\tau\tan^{-1}\frac{\tau}{2} - \ln(1+\frac{\tau^2}{4})\}\right] \tag{34}$$

$$< a_1^2 >= \frac{32D}{\pi a_0(\Gamma - a_0)^2}\left[\tau\tan^{-1}\frac{\tau}{2} - \ln(1+\frac{\tau^2}{4})\right] \tag{35}$$

$$< a_1\xi_1 >= -\frac{32D}{\pi a_0^2(\Gamma - a_0)^3}\left[\tau^2\tan^{-1}\frac{\tau}{2} - \tau\ln(1+\frac{\tau^2}{4})\right] \tag{36}$$

$t \to 0$のときこれらの式は

$$< \xi_1^2 >\sim \frac{16D}{\pi a_0^3}\left(\frac{\Gamma + a_0}{\Gamma - a_0}\right)^2 t^2, \ < a_1^2 >\sim \frac{16a_0D}{\pi}t^2, \ < a_1\xi_1 >\sim -\frac{8a_0D}{\pi}t^3 \tag{37}$$

と近似でき、また$t \to \infty$では

$$< \xi_1^2 >\sim \frac{32D}{3}\frac{t^3}{|\Gamma - a_0|}, \ < a_1^2 >\sim \frac{16D}{\Gamma - a_0}t, \ < a_1\xi_1 >\sim -\frac{16D}{\Gamma - a_0}t^2 \tag{38}$$

なる漸近評価ができる。従って$t \to \infty$（ただし$x - \bar{\xi} = \text{const.}$）において$u$の平均値は漸近形

$$< u(x,t) >\sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{a_0}{\tilde{b}\gamma}\exp\left[-\frac{(\phi_0 + \gamma^2\tilde{\phi}_1)^2}{2\gamma^2\tilde{b}^2}\right] \propto t^{-\frac{3}{2}} \tag{39}$$

をもつ。ただし

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{16D}{\Gamma - a_0} t^2, \ \tilde{b} = a_0 \sqrt{\frac{32D}{3 \mid \Gamma - a_0 \mid}} t^{\frac{3}{2}} \tag{40}$$

5. まとめ

ランダム媒質中の波動伝播の研究は古くから行われているが、それらは主として線形波動に関するものである。近年、非線形波動方程式の解法の急速な発展に伴い、ランダムな非線形波動の研究も盛んになってきた。ここでは外力項を含む BO 方程式をモデル方程式として、一様な流れ場や、流体底面形状等にランダムな変動要素が含まれる場合、これらのソリトンや周期波への影響を調べた。特にランダム場として、平均値 0 のガウス分布を仮定し、波動場の平均値を積分表示の形で具体的に求めた。またこれらの漸近評価を行い、初期波形はランダム場との相互作用の結果、ガウス型の波束に近づくことを示した。関連した仕事につてはすべて省略したが、これにつては最近発行された著書 [4]、[5]、およびこれらの巻末につけられた文献が参考になる。

6. 参考文献

[1] Y. Matsuno, Phys. Rev. **E52**, 6333 (1995).

[2] Y. Matsuno, Phys. Rev. Lett. **73**, 1316 (1994).

[3] Y. Matsuno, Phys. Rev. **E51**, 1471 (1995).

[4] V.V. Konotop and L. Vázquez, *Nonlinear Random Waves* (World Scientific, Singapore, 1994).

[5] F. Abdullaev, *Theory of Solitons in Inhomogeneous Media* (Wiley, New York, 1994).