数理解析研究所講究録
950 巻 1996 年 233-239

有限曖昧経営オートマトンの等価性判定問題の可解性

橋口攻三郎 (Kosaburo Hashiguchi) 石黒賢一 (Kenichi Ishiguro)
岡山大学工学部情報工学科

平成8年 3月 20日

1 序論

有限オートマトンに利益関数を導入する事によりエコノミクスオートマトンを定義する。このオートマトンは経済活動のモデルとみなし得るであろう。本論文において、有限曖昧エコノミクスオートマンの等価性判定問題が可解である事を幾つかの段階を経て証明する。部分問題として, ユニオンエコノミクスオートマトンと決定性エコノミクスオートマトンの等価性判定問題, エコノミクスオートマトン不等式問題, 有限和エコノミクスオートマトン等価性判定問題, 有限曖昧エコノミクスオートマトンの等価性判定問題について、判定アルゴリズムを与え、これらの問題がすべて可解である事を示す。本論文は 4 章からなっている。第 2 章はエコノミクスオートマトンの定義, 及び基本的性質について述べる. 第 3 章は複数個の決定性エコノミクスオートマトンにより、ユニオンエコノミクスオートマトンをを定義し, その性質について述べる。第 4 章において, まず複数個の決定性エコノミクスオートマトンの和として表現できるユニオンエコノミクスオートマトンと決定性エコノミクスオートマトンの等価性を判定するアルゴリズムを与え, その可解性を示す。更に, エコノミクスオートマトン不等式問題が可解である事を示し、この結果を用いて有限和（ユニオン）エコノミクスオートマトン等価性判定問題が可解である事を示す。この事は、有限曖昧エコノミクスオートマトンの等価性判定問題が可解である事を意味する。

2 エコノミクスオートマトン

本研究では, 空でない有限集合をアルファベット, アルファベットの要素を記号, 記号を有限個並べたものを語と呼ぶ. 語には記号を 0 個並べた空語と呼ばれるλも含まれる. アルファベットΣの語の全体をΣ^*で表し, 空語以外の語の全体をΣ^+で表す. 即ち, $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$ である.

語 $w = a_1a_2\cdots a_n (n \geq 0, a_1, \cdots, a_n \in \Sigma)$ に対して, n を語 wの長さといい $|w|$ で表す. ここで, 集合 A の要素の個数も $|A|$ で表すことに注意する. また, 実数の集合を Rで表し, $R_{-\infty}$により, $R \cup \{-\infty\}$ を表す.

定義 2.1 エコノミクスオートマトン（略してE-オートマトン）は, 6 項組 $A = <\Sigma, Q, \delta, S, F, e>$ で与えられる. ここで,

Σ : 入力記号の有限集合, Q : 状態の有限集合, δ : 状態遷移関数
S : 初期状態の有限集合, F : 受理状態の有限集合, e : エコノミクス関数

従って、$<\Sigma, Q, \delta, S, F>$は、有限オートマトンである。語 $w \in \Sigma^*$は$\delta(S, w) \in F$であるとき, 有限オートマトン A によって受理されるという. また, エコノミクス関数 e は $Q \times \Sigma \times Q$ から $R_{-\infty}$ への関数（$e : Q \times \Sigma \times Q \rightarrow R_{-\infty}$）である. 但し, e は次を満たす.

$$\forall(p,a,q) \in Q \times \Sigma \times Q,\ q \notin \delta(p,a) \Longleftrightarrow e(p,a,q) = -\infty$$

■

以下, エコノミクスオートマトンを E-オートマトンと呼ぶ。

定義 **2.2**

(1) e は次のように $e: Q \times \Sigma^* \times Q \to R_{-\infty}$ と $e: 2^Q \times \Sigma^* \times 2^Q \to R_{-\infty}$ に拡張される.

(1.1) $\forall p, q \in Q$ に対して, $e(p, \lambda, q) = 0$ $(p = q$の場合$)$, $e(p, \lambda, q) = -\infty$ $(p \neq q$の場合$)$

(1.2) $\forall p, q \in Q$, $\forall w \in \Sigma^*$, $\forall a \in \Sigma$に対して,

$$e(p, wa, q) = \max\{e(p, w, q') + e(q', a, q) \mid q' \in Q\}$$

ここで, $\forall i \in R_{-\infty}$に対して, $\max\{i, -\infty\} = i$ かつ $i + (-\infty) = -\infty$

(1.3) $\forall t, t' \subset Q$, $\forall w \in \Sigma^*$に対して, $e(t, w, t') = \max\{e(p, w, q) \mid p \in t, q \in t'\}$

(2) A により受理される語の全体を $L(A)$ と書く. $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(S, w) \cap F \neq \emptyset\}$

(3) 2 つの E-オートマトン A_1と A_2は $L(A_1) = L(A_2)$ のとき, L 等価であるという.

(4) $\forall w \in \Sigma^*$に対して, $e(S, w, F)$ を wに関する利益と呼ぶ. また, E-オートマトン A に対して, $E(w, A) = e(S, w, F)$ とする.

(5) A_1, A_2を入力アルファベットΣ 上の 2 つの E-オートマトンとする. $\forall w \in \Sigma^*$に対して,

(5.1) $E(w, A_1) = E(w, A_2)$ が成立するとき, A_1と A_2は等価であるといい, $A_1 \equiv A_2$と書く.

(5.2) $E(w, A_1) \geq E(w, A_2)$ が成立するとき, A_1は A_2以上であるといい, $A_1 \geq A_2$と書く.

(6) E-オートマトン A は次の条件を満たすとき, 決定性である.

$\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma$に対して, $|\delta(q, a)| \leq 1$, $|S| = 1$.

A が決定性のとき, $\forall q \in Q$, $\forall a \in \Sigma$, $\forall q' \in \delta(q, a)$ に対して, $\delta(q, a) = q'$と書く.

(7) m 個の決定性 E-オートマトン $A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i >$ $(1 \leq i \leq m)$ は, $\forall j, k (1 \leq j < k \leq m)$ に対して, $Q_j \cap Q_k = \emptyset$ であるとき, 互いに素であるという.

2 つの決定性 E-オートマトン $A_1 =< \Sigma, Q_1, \delta_1, \{s_1\}, F_1, e_1 >$と $A_2 =< \Sigma, Q_2, \delta_2, \{s_2\}, F_2, e_2 >$ の等価性を調べる場合, 長さ $2 \times |Q_1| \times |Q_2|$ 以下の語に対して, $e(\{s_1\}, w, F_1) = e(\{s_2\}, w, F_2)$ かどうかを調べればよいことが証明されている [5].

3 ユニオン E-オートマトン

ここで, 本研究で主に取り扱うユニオン E-オートマトンについて定義し, 利益を考える.

定義 **3.1** 互いに素な $m (m \geq 1)$ 個の決定性 E-オートマトン $A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i >$ $(1 \leq i \leq m)$ に対して, ユニオン E-オートマトン $A_1 \cup \cdots \cup A_m =< \Sigma, Q, \delta, S, F, e >$を次のように定義する.

(1) $Q = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$
$S = \{s_1, \cdots, s_m\}$
$F = F_1 \cup \cdots \cup F_m$

(2) $\forall i (1 \le i \le m)$, $\forall q \in Q_i$, $\forall a \in \Sigma$に対して,

$$\delta(q,a) = \delta_i(q,a) \text{ かつ } e(q,a,\delta(q,a)) = e_i(q,a,\delta_i(q,a))$$

命題 3.1　$A_i = < \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i >$ $(1 \le i \le m)$ を $m(m \ge 1)$ 個の互いに素な決定性 E-オートマトンとすると, $\forall w \in \Sigma^*$ に対して,

$$E(w, A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \max\{E(w, A_i) \mid 1 \le i \le m\}$$

が成立する.

4　有限和 E-オートマトン等価性判定問題

本章では, 決定性 E-オートマトンの複数個の有限和をとり有限和（ユニオン）E-オートマトンを定義する。有限和 E-オートマトンの等価性判定問題が可解である事を証明する。3.1 節で定義（定義 3.1）した $m(m \ge 1)$ 個の決定性 E-オートマトンからなるユニオン E-オートマトンと $n(n \ge 1)$ 個の決定性 E-オートマトンからなるユニオン E-オートマトンの等価性を判定するアルゴリズムを与える。本節ではまず $n(n \ge 1)$ 個の決定性 E-オートマトンからなるユニオン E-オートマトンと 1 個の決定性 E-オートマトンの等価性問題が可解である事を示す。以下において, $n \ge 1$ に対して, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ と A_{n+1}が等価であるための必要十分条件を求める.

定義 4.1　決定性有限オートマトン$\Gamma(A_1, \cdots, A_{n+1}) = < \Sigma, Q, \delta, \{s\}, F >$を次のように定義する.

(1) $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_{n+1}$, $S = (s_1, \cdots, s_{n+1}$, $F = F_1 \times \cdots \times F_{n+1}$

(2) $\forall a \in \Sigma$, $\forall (q_1, \cdots, q_{n+1}) \in Q_1 \times \cdots \times Q_{n+1}$に対し,

$$\delta((q_1, \cdots, q_{n+1}), a) = (\delta_1(q_1, a), \cdots, \delta_{n+1}(q_{n+1}, a))$$

命題 4.1　$A_1 \cup \cdots \cup A_n \equiv A_{n+1}$とする. このとき, $\forall x, z \in \Sigma^*$, $y \in \Sigma^+$, $(q_1, \cdots, q_{n+1}) \in Q$ に対し, $\delta(s,x) = \delta(s,xy) = (q_1, \cdots, q_{n+1})$ かつ$\delta(s,xyz) \in F$ならば, ある $1 \le i \le n$ が存在し, 次の (1)〜(3) が成立する.

(1) $E(xyz, A_1 \cup \cdots \cup A_n) = E(xyz, A_i) = E(xyz, A_{n+1})$

(2) $E(xz, A_1 \cup \cdots \cup A_n) = E(xz, A_i) = E(xz, A_{n+1})$

(3) $e_i(q_i, y, q_i) = \max\{e_j(q_j, y, q_j) \mid 1 \le j \le n\} = e_{n+1}(q_{n+1}, y, q_{n+1})$

次に, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ と A_{n+1}が等価である為の必要十分条件を求める。

定理 4.1　$A_i = < \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i >$ $(1 \le i \le n+1, n \ge 1)$ を $n+1$ 個の L 等価な決定性 E-オートマトンとし, $\Gamma(A_1, \cdots, A_{n+1})$ を定義 4.1 のように定義する. このとき, 次の 4 つの条件は同値である.

(1) $A_1 \cup \cdots \cup A_n \equiv A_{n+1}$

(2) 任意の $w \in \Sigma^*$に対し, $E(w, A_1 \cup \cdots \cup A_n) = E(w, A_{n+1})$

(3) 長さ $3 \times (n+1) \times |Q_1| \times \cdots \times |Q_{n+1}|$ 以下の全ての $w \in \Sigma^*$に対し, 次の (A) が成立する.

(A): $\forall x, y, z \in \Sigma^*$, $(q_1, \cdots, q_{n+1}) \in Q$ に対し, もし, $w = xyz$, $\delta(s, x) = \delta(s, xy) = (q_1, \cdots, q_n)$ かつ$\delta(s, xyz) \in F$ならば, ある $1 \leq i \leq n$ が存在し, 次の (3.1) 〜(3.3) が成立する.

(3.1) $E(xyz, A_1 \cup \cdots \cup A_n) = E(xyz, A_i) = E(xyz, A_{n+1})$

(3.2) $E(xz, A_1 \cup \cdots \cup A_n) = E(xz, A_i) = E(xz, A_{n+1})$

(3.3) $e_i(q_i, y, q_i) = \max\{e_j(q_j, y, q_j) \mid 1 \leq j \leq n\} = e_{n+1}(q_{n+1}, y, q_{n+1})$

(4) 全ての $w \in \Sigma^*$に対し, 次の (B) が成立する.

(B): $\forall x, y, z \in \Sigma^*$, $(q_1, \cdots, q_{n+1}) \in Q$ に対し, もし, $w = xyz$, $\delta(s, x) = \delta(s, xy) = (q_1, \cdots, q_n)$ かつ$\delta(s, xyz) \in F$ならば, ある $1 \leq i \leq n$ が存在し, 次の (4.1) 〜(4.3) が成立する.

(4.1) $E(xyz, A_1 \cup \cdots \cup A_n) = E(xyz, A_i) = E(xyz, A_{n+1})$

(4.2) $E(xz, A_1 \cup \cdots \cup A_n) = E(xz, A_i) = E(xz, A_{n+1})$

(4.3) $e_i(q_i, y, q_i) = \max\{e_j(q_j, y, q_j) \mid 1 \leq j \leq n\} = e_{n+1}(q_{n+1}, y, q_{n+1})$

定理 4.1 より, $A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i > (1 \leq i \leq n+1, n \geq 1)$ を L 等価な決定性 E-オートマトンとしたとき, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$と A_{n+1}が等価であるための必要十分条件が得られた. この事から, $A_1 \cup \cdots \cup A_n \equiv A_{n+1}$か否かを判定する問題の可解性が導かれる。

定理 4.2 $n+1$ 個の L 等価な決定性 E-オートマトン $A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i > (1 \leq i \leq n+1)$ が与えられたとき, $A_1 \cup \cdots \cup A_n \equiv A_{n+1}$か否かを決定する問題は可解である.

$m(m \geq 1)$ 個と $n(n \geq 1)$ 個の決定性 E-オートマトンからなる 2 個のユニオン E-オートマトンの等価性判定問題が可解である事を示す。

命題 4.2 $m+n(m, n \geq 1)$ 個の決定性 E-オートマトン $A_k =< \Sigma, Q_k, \delta_k, \{s_k\}, F_k, e_k > (1 \leq k \leq m+n)$ に対し, 次の 2 つの条件は同値である.

(1) $A_1 \cup \cdots \cup A_m \equiv A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{m+n}$

(2) 全ての $1 \leq i \leq m$ に対し, $A_i \leq A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{m+n}$かつ
全ての $m+1 \leq j \leq m+n$ に対し, $A_j \leq A_1 \cup \cdots \cup A_m$

定義 4.3 次の問題を E-オートマトン不等式問題と呼ぶ.

問題 入力: $n+1(n \geq 1)$ 個の決定性 E-オートマトン
$A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i > (1 \leq i \leq n+1)$.
出力: $A_1 \cup \cdots \cup A_n \geq A_{n+1}$のとき, "yes".
$A_1 \cup \cdots \cup A_n \not\geq A_{n+1}$ のとき, "no".

定義 4.4 $n+1(n \geq 0)$ 個の決定性 E-オートマトン $A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i > (1 \leq i \leq n+1)$ に対し, 決定性有限 E-オートマトン$\Pi(A_1, \cdots, A_{n+1}) =< \Sigma, Q, \delta, \{s\}, F >$を次のように定義する.

(1) $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_{n+1}$, $s = (s_1, \cdots, s_{n+1})$

(2) $\forall a \in \Sigma$, $\forall (p_1, \cdots, p_{n+1}) \in Q$ に対し,

$$\delta((p_1, \cdots, p_{n+1}), a) = (\delta_1(p_1, a), \cdots, \delta_{n+1}(p_{n+1}, a))$$

(3) $F = (F_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_{n+1}) \cup (Q_1 \times F_2 \times Q_3 \times \cdots \times Q_{n+1}) \cup \cdots \cup (Q_1 \times \cdots \times Q_n \times F_{n+1})$

命題 4.3　$n+1(n \geq 0)$ 個の決定性 E-オートマトン $A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i > (1 \leq i \leq n+1)$ に対し, $L(\Pi(A_1, \cdots, A_{n+1})) = L(A_1) \cup \cdots \cup L(A_{n+1})$ が成立する.

命題 4.4　$n+1(n \geq 1)$ 個の決定性 E-オートマトン $A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i > (1 \leq i \leq n+1)$ が与えられたとき, もし, $A_1 \cup \cdots \cup A_n \geq A_{n+1}$ なら, $L(\Pi(A_1, \cdots, A_n)) \supseteq L(A_{n+1})$ が成立する.

$n \geq 1$ として, $A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i > (1 \leq i \leq n+1)$ を $n+1$ 個の決定性 E-オートマトンとする. 定義 4.4 の様に決定性有限オートマトン$\Pi(A_1, \cdots, A_{n+1}) =< \Sigma, Q, \delta, \{s\}, F >$を定義する。

定義 4.5　任意の $w \in \Sigma^+$に対し, 決定性有限オートマトン $A(w) =< \Sigma, Q(w), \delta(w), \{s\}, F(w) >$ を次のように定義する.

(1) $Q(w) = \{(p_1, \cdots, p_{n+1}) \mid$ ある $x, y \in \Sigma^*$に対し, $w = xy$かつ $(p_1, \cdots, p_{n+1}) = \delta(s, x)\}$

(2) $\delta(w)$ は $Q(w) \times \Sigma$から $Q(w)$ への関数（$\delta(w) : Q(w) \times \Sigma \longrightarrow Q(w)$）で, $\forall (p_1, \cdots, p_{n+1}) \in Q(w)$ と $\forall a \in \Sigma$に対し, 次のように定義する.

(2.1) もし, ある $x, y \in \Sigma^*$に対し, $w = xay$かつ $(p_1, \cdots, p_{n+1}) = \delta(s, x)$ ならば,

$$\delta(w)((p_1, \cdots, p_{n+1}), a) = \delta((p_1, \cdots, p_{n+1}), a)$$

(2.2) (2.1) のような $x, y \in \Sigma^*$が存在しないとき, $\delta(w)((p_1, \cdots, p_{n+1}), a) = \emptyset$

(3) $F(w) = \{\delta(s, w)\} \cap F$

定義 4.6　集合 $S(A_1, \cdots, A_{n+1})$ の定義：$S(A_1, \cdots, A_{n+1}) = \{A(w) \mid w \in \Sigma^+\}$

定義 4.7　$m \geq 1, 1 \leq r \leq m$ に対し, ${}_mP_r = m(m-1)\cdots(m-(r-1))$ とおく.

定義 4.8　整数 $I(A_1, \cdots, A_{n+1})$ を次式により定義する. 但し, $m = |Q| \times |\Sigma|$.

$$I(A_1, \cdots, A_{n+1}) = ({}_mP_1 +{}_m P_2 + \cdots +{}_m P_m + 1)(|Q| + 1)$$

定義 4.9　$w \in \Sigma^+$, $A(w) =< \Sigma, Q(w), \delta(w), \{s\}, F(w) >$とする. $\forall p \in Q(w)$, $i \geq 1$, $a_1, \cdots, a_i \in \Sigma$に対し, もし, $\delta(w)(p, a_1 \cdots a_i) = p$ かつ $i = 1$ または $0 \leq j < k \leq i$ に対し, $\delta(w)(p, a_1 \cdots a_j) \neq \delta(w)(p, a_1 \cdots a_k)$ が成立するとき、$(p, a_1 \cdots a_i, p)$ は $A(w)$ の極小閉路であると言われる。

補題 4.1　任意の $w \in \Sigma^+$に対し, $A(w)$ は高々${}_mP_1 +{}_m P_2 + \cdots +{}_m P_m$個の極小閉路をもつ. ここで, $m = |Q| \times |\Sigma|$.

命題 4.5　$S(A_1, \cdots, A_{n+1}) = \{A(w) \mid w \in \Sigma^+$かつ $|w| < I(A_1, \cdots, A_{n+1})\}$

定義 4.10　各 $w \in \Sigma^+ \cap L(A_{n+1})$ に対し, $A(w)$ が極小閉路をもつとき, 次の (1), (2) を定義する.

(1) wの極小閉路分解の集合 MCD[1](w) を次の条件 (1.1),(1.2) を満たす全ての系列

$$(s, x_1, p_1, y_1, p_1, x_2, p_2, y_2, p_2, \cdots, x_k, p_k, y_k, p_k, x_{k+1}, p_{k+1})$$

の集合とする. $MCD(w)$ の要素を wの極小閉路分解と呼ぶ.

(1.1) $w = x_1y_1x_2y_2\cdots x_ky_kx_{k+1}$

(1.2) 各 $1 \leq i \leq k$に対し, $p_i = \delta(s, x_1y_1x_2y_2\cdots x_{i-1}y_{i-1}x_i)$. (p_i, y_i, p_i) は $A(w)$ の極小閉路かつ $|x_i| \leq |Q|$.

(2) $MCD(w) = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}(t \geq 1)$ とする. 各$\beta_i(1 \leq i \leq t)$ に対し, 線形不等式の集合 LIS[2](w, β_i) を次のように定義する.

$$\beta_i = (s, x_1, p_1, y_1, p_1, x_2, p_2, y_2, p_2, \cdots, x_k, p_k, y_k, p_k, x_{k+1}, p_{k+1})$$

とする. k個の変数 $X_1, X_2, \cdots, X_k$に対する次の不等式の集合を $LIS(w, \beta_i)$ とする.
各 $1 \leq i \leq n$ に対し,

$$X_j \geq 0 \ (1 \leq j \leq k), \ \ a_i + b_{i\,1}X_1 + b_{i\,2}X_2 + \cdots + b_{i\,k}X_k < a_{n+1} + b_{n+1\,1}X_1 + b_{n+1\,2}X_2 + \cdots + b_{n+1}$$

但し, $a_f = E(x_1x_2\cdots x_{k+1}, A_f)(1 \leq f \leq n+1)$. また, 各 $1 \leq f \leq n+1$, $1 \leq j \leq k$に対し, $b_{f\,j} = e_f(\delta_f(s_f, x_1x_2\cdots x_j), y_j, \delta_f(s_f, x_1x_2\cdots x_j))$.

補題 4.2 次の 2 つの条件は同値である.

(1) $A_1 \cup \cdots \cup A_n \geq A_{n+1}$

(2) 全ての $w \in \Sigma^+ \cap L(A_{n+1})$ に対し, 次の (2.1) または (2.2) が成立する.

(2.1) $A(w)$ が極小閉路をもたないとき, $E(w, A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq E(w, A_{n+1})$

(2.2) $A(w)$ が極小閉路をもつとき, wの各極小閉路分解$\beta \in MCD(w)$ に対し, 連立不等式 $LIS(w, \beta)$ は整数解をもたない.

定理 4.3 次の 3 つの条件は同値である.

(1) $A_1 \cup \cdots \cup A_n \geq A_{n+1}$

(2) 長さ $|Q| \times I(A_1, \cdots, A_{n+1})$ 未満の各 $w \in \Sigma^+ \cap L(A_{n+1})$ に対し, 次の (2.1) または (2.2) が成立する.

(2.1) $A(w)$ が極小閉路をもたないとき, $E(w, A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq E(w, A_{n+1})$

(2.2) $A(w)$ が極小閉路をもつとき, wの各極小閉路分解$\beta \in MCD(w)$ に対し, 連立不等式 $LIS(w, \beta)$ は整数解をもたない.

(3) 全ての $w \in \Sigma^+ \cap L(A_{n+1})$ に対し, 次の (3.1) または (3.2) が成立する.

(3.1) $A(w)$ が極小閉路をもたないとき, $E(w, A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq E(w, A_{n+1})$

---

[1]MCD: Minimal Closed-path Decomposition
[2]LIS: Linear Inequality Set

(3.2) $A(w)$ が極小閉路をもつとき, wの各極小閉路分解$\beta \in MCD(w)$ に対し, 連立不等式 $LIS(w, \beta)$ は整数解をもたない.

定理 4.3 により, E-オートマトン不等式問題は長さ $|Q| \times I(A_1, \cdots, A_{n+1})$ 未満の有限個の語 $w \in \Sigma^+ \cap L(A_{n+1})$ に対して有限集合 $MCD(w)$ が構成され, $\beta \in MCD(w)$ に対する線形不等式の集合を考え, これを連立不等式として解く問題に帰着させることができる. 線形不等式を解くアルゴリズムは存在する [4] ので, 次の定理 4.4 が成立する.

定理 4.4　E-オートマトン不等式問題は可解である.

定義 4.11　次の問題を有限和 E-オートマトン等価性判定問題と呼ぶ.

問題　入力： $m(m \geq 1)$ 個の決定性 E-オートマトン

$$A_i =< \Sigma, Q_i, \delta_i, \{s_i\}, F_i, e_i > (1 \leq i \leq m).$$

$n(n \geq 1)$ 個の決定性 E-オートマトン

$$A_{m+j} =< \Sigma, Q_{m+j}, \delta_{m+j}, \{s_{m+j}\}, F_{m+j}, e_{m+j} > (1 \leq j \leq n).$$

出力： $A_1 \cup \cdots \cup A_m \equiv A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{m+n}$のとき, "yes".

$A_1 \cup \cdots \cup A_m \not\equiv A_{m+1} \cup \cdots \cup A_{m+n}$のとき, "no".

定理 4.5　有限和 E-オートマトン等価性判定問題は可解である.

有限曖昧 Eーオートマトン A より、$A \equiv A_1 \cup \cdots \cup A_m$ を満たす有限個の決定性 Eーオートマトン $A_1, \cdots, A_m (m \geq 1)$ を求めるアルゴリズムが存在する（証明省略）。従って、次の定理を得る。

定理 4.6　有限曖昧 E-オートマトンの等価性判定問題は可解である。

参考文献

[1] J. ホップクロフト, J. ウルマン（野崎 昭弘, 高橋 正子, 町田 元, 山崎 秀記 共訳）: オートマトン言語理論 計算論 I, サイエンス社, 1984.

[2] J. ホップクロフト, J. ウルマン（野崎 昭弘, 高橋 正子, 町田 元, 山崎 秀記 共訳）: オートマトン言語理論 計算論 II, サイエンス社, 1984.

[3] 新留 孝一 :" エコノミクスオートマトンの等価性問題に関する研究", 豊橋技術科学大学修士論文, 1992.

[4] Harvey M.Salkin, Kamlesh Mathur : *FUNDATIONS OF INTEGER PROGRAMMING*, Robert Haas, 1989.

[5] 有川 節夫, 宮野 悟 : オートマトンと計算可能性, 培風館, 1986.