数理解析研究所講究録
950 巻 1996 年 189-192

知識論理・様相論理の標準形展開基底による特性化

椙山女学園大学 大芝　猛　(Takeshi Ohshiba)
名古屋工業大学 小橋　一秀　(Kazuhide Kobashi)

命題論理の言語に n 人についての “know” 記号 $\mathrm{K}_1,\cdots,\mathrm{K}_n$ ($n=1$ の場合は様相論理) を加えた言語を $\mathcal{L}$ とする。演繹体系 L_0 として、推論 $\dfrac{\varphi \quad \varphi\supset\psi}{\psi}$ (M.P.) , $\dfrac{\varphi}{\mathrm{K}_i(\varphi)}$ (K_i-rule) をもち、Axiom としてトートロジー全体と $\mathrm{K}_i(\varphi\supset\psi)\supset(\mathrm{K}_i(\varphi)\supset\mathrm{K}_i(\psi))$ をもつものをとり、一般に L として L_0 に公理を追加する体系を扱う。

L について、(命題論理の主和標準形展開のように) 拡張された意味での最小項の集まり W_L を対応させ「L の論理式の W_L の要素による標準形展開」による特性化を試みる。但しここで拡張された最小項を定義するために “strictly know” なる概念と対応する記号 $\mathrm{K}_i[\ ]$ を導入する。

命題論理の場合と同様に、体系 L と言語 $\mathcal{L}$ の中の命題変数の個数を $m(\geq 1)$ 以下に制限してうる体系と言語を ${}^{(m)}\mathrm{L}$ と ${}^{(m)}\mathcal{L}$ とする。

$$\mathrm{L}=\bigcup_{m=1}^{\infty}{}^{(m)}\mathrm{L},\qquad \mathcal{L}=\bigcup_{m=1}^{\infty}{}^{(m)}\mathcal{L}$$

(I) 先に、各 m について、${}^{(m)}\mathrm{L}$ (${}^{(m)}\mathcal{L}$) に対しての標準形展開のための最小項の集まり ${}^{(m)}\mathrm{W}_L$ を構成する方法を提示し、(II) その全体としての W_L を提示することを試みる。

(I) まず演繹体系 ${}^{(m)}\mathrm{L}$ とは独立に、言語 ${}^{(m)}\mathcal{L}$ の上の最小項の全体 ${}^{(m)}\mathrm{W}$ を K_i の深さ (degree) k ごとに階層的に定義する:

$${}^{(m)}\mathrm{W}={}^{(m)}\mathrm{W}^{(0)}\cup{}^{(m)}\mathrm{W}^{(1)}\cup{}^{(m)}\mathrm{W}^{(2)}\cup\ \cdots$$

定義 1

$${}^{(m)}\mathrm{W}^{(0)}\overset{def}{=}\left\{p_1^{\delta_1}\wedge\cdots\wedge p_m^{\delta_m}\ \middle|\ \delta_1,\cdots,\delta_m\in\{0,1\}\right\}\ ,\quad p^{\delta}=\begin{cases}p & (\delta=1)\\ \neg p & (\delta=0)\end{cases}$$

$${}^{(m)}\mathrm{W}^{(k+1)}\overset{def}{=}\left\{<g\,,\begin{pmatrix}\mathrm{K}_1[\mathrm{U}_1]\\ \vdots\\ \mathrm{K}_n[\mathrm{U}_n]\end{pmatrix}>\ \middle|\ g\in{}^{(m)}\mathrm{W}^{(k)},\ \mathrm{U}_1,\cdots,\mathrm{U}_n\subseteq{}^{(m)}\mathrm{W}^{(k)}\right\}$$

定義 2 • $\mathrm{U}\subseteq{}^{(m)}\mathrm{W}^{(k)}$ に対し、

$${}^{*}\mathrm{K}_i[\mathrm{U}]\overset{def}{=}\mathrm{K}_i({}^{*}\mathrm{U})\wedge\bigwedge_{\mathrm{U}\not\supseteq\mathrm{X}\subseteq{}^{(m)}\mathrm{W}^{(k)}}\neg\mathrm{K}_i({}^{*}\mathrm{X})$$

- $\mathrm{U} = \{g_1, \cdots, g_d\}$ のとき、${}^*\mathrm{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}^*g_1 \vee \cdots \vee {}^*g_d$

- $f = <g\ ,\ \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1[\mathrm{U}_1] \\ \vdots \\ \mathrm{K}_n[\mathrm{U}_n] \end{pmatrix}>$ に対し、${}^*f \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}^*g \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} {}^*\mathrm{K}_i[\mathrm{U}_i]$

定理 1 ${}^{(m)}\mathrm{L}_0 \vdash {}^{*(m)}\mathrm{W}^{(k)}$

定義 3 論理式 $A \in {}^{(m)}\mathcal{L}$ に対応する最小項の集合 ${}^{(m)}\mathrm{W}_A$ (条件無し展開):

$$\begin{aligned}
{}^{(m)}\mathrm{W}_{p_j} &= \left\{ p_1^{\delta_1} \wedge \cdots \wedge p_{j-1}^{\delta_{j-1}} \wedge p_j \wedge p_{j+1}^{\delta_{j+1}} \wedge \cdots \wedge p_m^{\delta_m} \,\middle|\, \delta_1, \cdots, \delta_{j-1}, \delta_{j+1}, \cdots, \delta_m \in \{0,1\} \right\} \\
{}^{(m)}\mathrm{W}_{B \wedge C} &= {}^{(m)}\mathrm{W}_B^{<k>} \cap {}^{(m)}\mathrm{W}_C^{<k>} \qquad k = \max(\deg(B), \deg(C)) \\
{}^{(m)}\mathrm{W}_{\neg B} &= {}^{(m)}\mathrm{W}^{(k)} - {}^{(m)}\mathrm{W}_B \qquad k = \deg(B) \\
{}^{(m)}\mathrm{W}_{\mathrm{K}_i(B)} &= \left\{ f \in {}^{(m)}\mathrm{W}^{(k+1)} \,\middle|\, f_i^{(k)} \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}_B \right\}
\end{aligned}$$

但し $f = <g\ ,\ \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1[\mathrm{U}_1] \\ \vdots \\ \mathrm{K}_n[\mathrm{U}_n] \end{pmatrix}> \in {}^{(m)}\mathrm{W}^{(k+1)}$ に対し、g を $f^{<k+1}$、U_i を $f_i^{(k)}$ とかく。

定義 4

$$\mathrm{U} \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}^{(k)} \quad \text{に対し} \quad \mathrm{U}' = \left\{ <f\ ,\ \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1[\mathrm{U}_1] \\ \vdots \\ \mathrm{K}_n[\mathrm{U}_n] \end{pmatrix}> \,\middle|\, f \in \mathrm{U},\ \mathrm{U}_1, \cdots, \mathrm{U}_n \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}^{(k)} \right\}$$

とし、$\mathrm{U}^{<l>} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{U}^{\overbrace{\prime \cdots \prime}^{l-k}}$ $(l \geq k)$ とする。また、

$$'\mathrm{U} = \left\{ g \,\middle|\, <g\ ,\ \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1[\mathrm{V}_1] \\ \vdots \\ \mathrm{K}_n[\mathrm{V}_n] \end{pmatrix}> \in \mathrm{U},\ \text{for some } \mathrm{V}_1, \cdots, \mathrm{V}_n \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}^{(k-1)} \right\}$$

定理 2 $A \in {}^{(m)}\mathcal{L}$ に対し

$${}^{(m)}\mathrm{L}_0 \vdash \quad A \equiv {}^{*(m)}\mathrm{W}_A$$

定義 5 ${}^{(m)}\mathrm{L}(\supseteq {}^{(m)}\mathrm{L}_0)$ に対し集合列 ${}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)}(\subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}^{(k)})(k = 0, 1, 2, \cdots)$ が ${}^{(m)}\mathrm{L}$ を特性化するとは:

任意の $A \in {}^{(m)}\mathcal{L}$ に対し $\deg(A) = k$ とおくとき

$${}^{(m)}\mathrm{L} \vdash A \iff {}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)} \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}_A \quad (\subseteq \text{ は有限集合の包含関係})$$

定理 3 ${}^{(m)}\mathrm{L}(\supseteq {}^{(m)}\mathrm{L}_0)$ に対し、${}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)}(k = 0, 1, 2, \cdots)$ が L の特性化ならば、$A, B \subseteq {}^{(m)}\mathcal{L}$ につき、$k = \max(\deg(A), \deg(B))$ ならば、

$${}^{(m)}\mathrm{L} \vdash A \equiv B \iff {}^{(m)}\mathrm{W}_A^{<k>} \cap {}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)} = {}^{(m)}\mathrm{W}_B^{<k>} \cap {}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)} \quad (= \text{ は有限集合の一致})$$

($A \in {}^{(m)}\mathcal{L}$ に対し、${}^{(m)}\mathrm{W}_A^{<k>} \cap {}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)}$ を A の $k(\geq \deg(A))$ 次の標準形展開という。)

定理 4 ${}^{(m)}\mathrm{L}(\supseteq {}^{(m)}\mathrm{L}_0)$ に対し、${}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)}(k=0,1,2,\cdots)$ が${}^{(m)}\mathrm{L}$ の特性化となるための必要十分条件は次の *1)* 〜 *3)* である。

1) $\forall f(f \in ({}^{(m)}\mathrm{W}^{(k)} - {}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)}) \Rightarrow {}^{(m)}\mathrm{L} \vdash {}^{*}f \equiv \perp)$

2) $\forall A(A \in \mathrm{Axiom}({}^{(m)}\mathrm{L}) \Rightarrow {}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)} \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}_A)$

3) $\forall r = \dfrac{A_1, \cdots, A_{d_r}}{A_0} \in \mathrm{rule}({}^{(m)}\mathrm{L})$ に対し、

$${}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k_i)} \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}_{A_i}(i=1,\cdots,d_r) \Rightarrow {}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k_0)} \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}_{A_0}(\text{但し、}\deg(A_i)=k_i)$$

(II)

定理 5 任意の $m(\geq 1)$ に対し${}^{(m)}\mathrm{L}(\supseteq {}^{(m)}\mathrm{L}_0)$ を特性化する集合列${}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)}(k=0,1,2,\cdots)$ が与えられるなら、

$\forall A \in \mathcal{L}$ $\mathrm{rank}(A)=m$, $\deg(A)=k$ とおけば、

$$\mathrm{L} \vdash A \Leftrightarrow {}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)} \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}_A$$

但し $\mathrm{rank}(A)=A$ の中の命題変数の個数。

(証明) "$\Leftarrow$" は定義から明らか。"$\Rightarrow$" も $\mathrm{L}\vdash A \Rightarrow {}^{(m)}\mathrm{L}\vdash A$ から明らか。

この定理の意味で "$\left\{\{{}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)} \mid k=0,1,2,\cdots\},\ m=1,2,\cdots\right\}$ あるいは $\mathrm{W}_L = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{\infty}{}^{(m)}\mathrm{W}_L^{(k)}$ は L を特性化している。" といえる。

[特性化の例]

(1) 最初の L_0 に対し:

$${}^{(m)}\mathrm{W}_{L_0}^{(0)} = {}^{(m)}\mathrm{W}^{(0)},$$

$${}^{(m)}\mathrm{W}_{L_0}^{(k+1)} = \left\{ <g\ ,\ \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1[\mathrm{U}_1] \\ \vdots \\ \mathrm{K}_n[\mathrm{U}_n] \end{pmatrix} > \ \middle|\ \begin{array}{l} g \in {}^{(m)}\mathrm{W}_{L_0}^{(k)}, \\ \forall j(\mathrm{U}_j \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}_{L_0}^{(k)}), \\ k \geq 1 \text{ に対し} \underline{\forall j({}'\mathrm{U}_j = g_j^{(k)})} \end{array} \right\}$$

(2) ${}^{(m)}\mathrm{T} = {}^{(m)}\mathrm{L}_0 \cup \{\mathrm{K}_i(\varphi) \supset \varphi \mid i=1,\cdots,n,\ \ \varphi \in {}^{(m)}\mathcal{L}\}$:

$${}^{(m)}\mathrm{W}_T^{(0)} = {}^{(m)}\mathrm{W}^{(0)},$$

$${}^{(m)}\mathrm{W}_T^{(k+1)} = \left\{ <g\ ,\ \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1[\mathrm{U}_1] \\ \vdots \\ \mathrm{K}_n[\mathrm{U}_n] \end{pmatrix} > \ \middle|\ \begin{array}{l} g \in {}^{(m)}\mathrm{W}_T^{(k)}, \\ \forall j(\underline{g \in \mathrm{U}_j} \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}_T^{(k)}), \\ k \geq 1 \text{ に対し } \forall j({}'\mathrm{U}_j = g_j^{(k)}) \end{array} \right\}$$

(3) ${}^{(m)}\mathrm{S}_4 = {}^{(m)}\mathrm{T} \cup \{\mathrm{K}_i(\varphi) \supset \mathrm{K}_i(\mathrm{K}_i(\varphi)) \mid i=1,\cdots,n,\ \ \varphi \in {}^{(m)}\mathcal{L}\}$:

$${}^{(m)}\mathrm{W}_{\mathrm{S4}}^{(0)} = {}^{(m)}\mathrm{W}^{(0)},$$

$${}^{(m)}\mathrm{W}_{\mathrm{S4}}^{(k+1)} = \left\{ <g\ ,\ \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1[\mathrm{U}_1] \\ \vdots \\ \mathrm{K}_n[\mathrm{U}_n] \end{pmatrix} > \ \middle|\ \begin{array}{l} g \in {}^{(m)}\mathrm{W}_{\mathrm{S4}}^{(k)}, \\ \forall j(g \in \mathrm{U}_j \subseteq {}^{(m)}\mathrm{W}_T^{(k)}), \\ k \geq 1 \text{ に対し } \forall j({}'\mathrm{U}_j = g_j^{(k)}), \\ \underline{\forall j((\bigcup_{h \in \mathrm{U}_j} h^{(k)})' \subseteq g_j^{(k)})} \end{array} \right\}$$

(4) ${}^{(m)}S_5 = {}^{(m)}S_4 \cup \{\neg K_i(\varphi) \supset K_i(\neg K_i(\varphi)) | i = 1, \cdots, n, \ \varphi \in {}^{(m)}\mathcal{L}\}$:

$$
{}^{(m)}W^{(0)}_{S_5} = {}^{(m)}W^{(0)},
$$

$$
{}^{(m)}W^{(k+1)}_{S_5} = \left\{ <g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix}> \middle| \begin{array}{l} g \in {}^{(m)}W^{(k)}_{S_5}, \\ \forall j (g \in U_j \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}_T), \\ k \geq 1 \text{ に対し } \forall j ('U_j = g^{(k)}_j), \\ \forall j ((\bigcup_{h \in U_j} h^{(k)}{}_j) \subseteq g^{(k)}_j), \\ \underline{\forall j (g^{(k)}_j \subseteq \bigcap_{h \in U_j} h^{(k)}_j)} \end{array} \right\}
$$

(5) ${}^{(m)}K_{(I \to J)} = {}^{(m)}S_5 \cup \{K_I(\varphi) \supset K_J(\varphi) | \varphi \in {}^{(m)}\mathcal{L}\}$:

$$
{}^{(m)}W^{(0)}_{K_{(I \to J)}} = {}^{(m)}W^{(0)},
$$

$$
{}^{(m)}W^{(k+1)}_{K_{(I \to J)}} = \left\{ <g, \begin{pmatrix} K_1[U_1] \\ \vdots \\ K_n[U_n] \end{pmatrix}> \middle| \begin{array}{l} g \in {}^{(m)}W^{(k)}_{K_{(I \to J)}}, \\ \forall j (g \in U_j \subseteq {}^{(m)}W^{(k)}_T), \\ k \geq 1 \text{ に対し } \forall j ('U_j = g^{(k)}_j), \\ \forall j ((\bigcup_{h \in U_j} h^{(k)}{}_j) \subseteq g^{(k)}_j), \\ \forall j (g^{(k)}_j \subseteq \bigcap_{h \in U_j} h^{(k)}_j), \\ \underline{U_J \subseteq U_I} \end{array} \right\}
$$

公理 $K_I(\varphi) \supset K_J(\varphi)$ の存在は $K_{(I \to J)}$ が、n 人のうち I から J への情報伝達のある体系であることを表している。

参考文献

[1] R. Fagin, J. Y. Halpern, M. Y. Vardi: *A Model-Theoretic Analysis of Knowledge Preliminiary Report, 25thFOCS*

[2] J. Hintikka: *Knowledge and belief , Cornell University Press 1962*

[3] M. Sato: *A study of Kripke-type Models for some Modal Logics by Gentzen's Sequential Method Publications Research Institute for Mathematical Science , Kyoto University ,1977*

[4] 大芝　猛, 小橋　一秀, 知識命題の標準形を用いる妥当性検証数理解析研究所講究録 *906 ,1995*