数理解析研究所講究録
950 巻 1996 年 174-180

推論加群系と自動証明への応用

山崎　勇

Isamu Yamazaki

(株) 東芝　研究開発センター　情報・通信システム研究所

1996 年 2 月 2 日

1　はじめに

本稿では，一階述語論理における演繹推論に対応する演算を持ち，充足に対応する条件を記述できる加群系（推論加群系）を提案する．これらの対応により，論理における多くの問題を推論加群系における関係式で表現できる．この加群系は，２個の互いに双対な線形空間の系とほとんど同等であるので，論理における問題を推論加群系での表現に置き換えることによって，線形空間の視点から解釈したり，変形したりすることが可能となる．推論加群系が活用できる分野として，例えば自動証明，理論類似性・等価性問題などがある．

本稿では，第２章で推論加群系の定義の概要を述べ，第３章では充足と推論を推論加群系の上で表現する方法と，代数的証明原理を述べ，第４章では推論加群系の線形代数について述べ，第５章では推論加群系の応用として，自動証明への応用について述べる．

2　推論加群系

ここで提案する推論加群系は，線形空間の系に非常に似ている．線形空間の系はスカラー $\boldsymbol{R}$，列ベクトル空間 V，行ベクトル空間 U からなるものと見ることができる．例えば $\boldsymbol{u} \in U$ と $\boldsymbol{v} \in V$ との内積 $\boldsymbol{u} * \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{R}$ の元であり，ベクトルのスカラー倍は $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u}$ と記すことができる．V から V への線形変換，および U から U への線形変換はいずれも行列で表され，任意の行列は $\sum_{j\in J} \boldsymbol{v}_j \cdot \boldsymbol{u}_j$ と書ける．そして U と V とは互いに他の双対空間である．これとまったく並行した話が推論加群系でも成り立つ．

推論加群系は環 R，推論加群 D（右 R 加群），および事実加群 Ψ（左 R 加群）からなる．$\psi \in \Psi$ と $d \in$ D との内積 $\psi * d$ は R の元である．$\alpha \in$ R による $d \in$ D への右作用 $d \cdot \alpha$ ($\in$ D) と，$\psi \in \Psi$ への左作用 $\alpha \cdot \psi$ ($\in \Psi$) とが与えられている．$m = \sum_{i\in I} d_i \cdot \psi_i$ は Ψ から Ψ への右 R 準同形写像であると同時に，D から D への左 R 準同形写像である．また，D と Ψ とは，互いに他の双対加群の部分加群である．

以下にこの推論加群系の概要を述べる．詳細な議論は [3, 4] を参照していただきたい．

諸定義　項の全体を H と記す．項の列を $\hat{t}$，$\hat{s}$ などと記す．変数記号の列を $\hat{X}$，$\hat{Y}$，$\hat{X}_k$ などと記す．項，項の列，素論理式を**表現**と称し，E と記す．変数記号を含む表現を $E[X,Y]$，$E[\hat{X}]$，$\hat{t}[\hat{Y}]$ などと記す．表現 E が含む変数記号を，E の代表変数と称し，その全体を $\boldsymbol{Y}(E)$ と記す．述語記号が P，Q，P_k などである時，素論理式を $P(\hat{t})$，$Q(\hat{X})$，$P_k(\hat{s})$ などと記す．素論理式の全体を G と記す．$\tilde{P}$，$\tilde{Q}$，$\tilde{P}_k$ などを**事実記号**と称する．$\tilde{P}(\hat{t})$，$\tilde{Q}(\hat{X})$，$\tilde{P}_k(\hat{s})$ などを**素事実**と称し，その全体を $\tilde{G}$ と記す．

対象とする問題には λ 個の述語記号 P_k $(k=1,\cdots,\lambda)$ が現れるものとする．またこれとは別に arity= 0 の基準述語記号 P_0 を考える．$K_0 = \{0,1,2,\cdots,\lambda\}$ とする．

総代入　基礎項 t_0 を任意に選んで固定する．次により**総代入**と呼ぶ表現から表現への右写像 $\left\langle \frac{\hat{t}}{\hat{X}} \right\rangle$ を定義する．

$$E[\hat{X},\hat{Y}]\left\langle \frac{\hat{t}}{\hat{X}} \right\rangle = E[\hat{t},\hat{u}] \qquad (\,\hat{u} = (t_0,t_0,t_0,\cdots)\,)$$

すなわち，総代入 $\left\langle \frac{\hat{t}}{\hat{X}} \right\rangle = \left\langle \frac{t_1}{X_1},\frac{t_2}{X_2},\cdots,\frac{t_n}{X_n} \right\rangle$ は表現中の変数記号のうち，$X_i \in \{\hat{X}\}$ は項 $t_i \in \hat{t}$ で置き換えるが，$\hat{X}$ 以外の変数記号は t_0 で置き換える．1 は，あらゆる表現を不変に保つ総代入とする．総代入の全体を T_X と記す．$\hat{t}$ が基礎項のみからなる総代入を**基礎総代入**と称し，その全体を T と記す．

左単一化関数　T から T への左写像

$$l(\hat{s};\hat{t}) : \tau \mapsto l(\hat{s};\hat{t}) \cdot \tau \quad (\tau \in T)$$

であって，次で定義されるものを，**左単一化関数**と称する．

$$l(\hat{s};\hat{t}) \cdot \tau = \begin{cases} \rho & \Leftarrow \quad \hat{s}\cdot\rho = \hat{t}\cdot\tau \\ 0 & \Leftarrow \quad \forall\rho\in T\left[\,\hat{s}\cdot\rho \neq \hat{t}\cdot\tau\,\right] \end{cases}$$

左単一化関数の全体を L と記す．T から T への恒等写像 1 を L に含める．

$$L=\{l(\hat{s};\hat{t})\mid \hat{s},\ \hat{t}\in H^n\ (n\geq 1)\}\cup\{1\}$$

$l(\hat{u};\hat{v})$ と $l(\hat{s};\hat{t})$ の合成写像を $l(\hat{u};\hat{v})\cdot l(\hat{s};\hat{t})$ と記す．

$$\Big(l(\hat{u};\hat{v})\cdot l(\hat{s};\hat{t})\Big)\cdot\tau=l(\hat{u};\hat{v})\cdot\Big(l(\hat{s};\hat{t})\cdot\tau\Big)$$

L はこの合成に関して閉じていない．ところが，任意の左単一化関数，および任意個の左単一化関数の合成写像は次の積標準形に変換できる．

$$l(\hat{X};\hat{t})\cdot l(\hat{u};\hat{Y})$$

従って $L^2=L\cdot L$ は写像の合成に関して閉じている．

次によって表現 E への左単一化関数の作用を定義する．

$$\forall\tau\in T\big[\ (E\cdot l(\hat{s};\hat{t}))\tau=E\big(l(\hat{s};\hat{t})\cdot\tau\big)\ \big]$$

すると一般に次の総代入解釈が成り立つ．

$$P(\hat{X})\cdot l(\hat{X};\hat{t})=P(\hat{t})$$

また後に定義する内積から，次の逆代入解釈が成り立つ．

$$l(\hat{u};\hat{Y})\cdot\tilde{P}(\hat{Y})=\tilde{P}(\hat{Y})$$

環 R　L^2 の元 x を一つ選ぶ．x の右に "$\cdot$" を介して $\boldsymbol{Q}$ の元 r を並べたものの全体 $\mathsf{R}_x=\{x\cdot r\mid r\in\boldsymbol{Q}\}$ は，次により加法と $\boldsymbol{Q}$ の右作用を定義すると，右 $\boldsymbol{Q}$ 加群となる．

$$\begin{aligned}x\cdot r_1+x\cdot r_2&\overset{\text{def}}{=}x\cdot(r_1+r_2),\\(x\cdot r_1)\cdot r_2&\overset{\text{def}}{=}x\cdot(r_1r_2).\end{aligned}$$

R_x の全ての $x\in L^2$ に渡る直和を R とする．

$$\mathsf{R}\overset{\text{def}}{=}(\text{直和})\sum_{x\in L^2}\mathsf{R}_x=\Big\{\sum_i x_i\cdot r_i\mid x_i\in L^2,r_i\in\boldsymbol{Q}\Big\}$$

加群 R に "$\cdot$" を結合記号とする乗法を次により定義する．これにより R は環となる．

$$\begin{aligned}(x_1\cdot r_1)\cdot(x_2\cdot r_2)&\overset{\text{def}}{=}(x_1\cdot x_2)\cdot(r_1r_2)\\\alpha\cdot(\alpha_1+\alpha_2)&\overset{\text{def}}{=}\alpha\cdot\alpha_1+\alpha\cdot\alpha_2\quad(\alpha,\alpha_1,\alpha_2\in\mathsf{R})\\(\alpha_1+\alpha_2)\cdot\alpha&\overset{\text{def}}{=}\alpha_1\cdot\alpha+\alpha_2\cdot\alpha\quad(\alpha,\alpha_1,\alpha_2\in\mathsf{R})\end{aligned}$$

次は R の元の例である．

$$\begin{aligned}\alpha_1&=l(f(X);Y)\\\alpha_2&=l(X;Y)+l(X;a)\cdot l(a;Y)\\\alpha_3&=l(X,Y;X,Y)-l(X,Y;U,U)\cdot l(U,U;X,Y)\\\alpha_4&=l(X;a)\cdot\frac{2}{3}-l(Y;f(b))\\\alpha_5&=l(f(X);Y)-l(g(X,a),Y)\end{aligned}$$

R の零元 $x\cdot 0$ を 0，乗法の単位元 $1\cdot 1$ を 1 と記す．

推論加群 D と事実加群 Ψ　$P_k(\hat{X}_k)$ $(k\in K_0)$ を生成元として，R によって生成する有限生成右 R 加群を，**推論加群** D と称する．

$$\mathsf{D}=\Big\{\sum_{k\in K_0}P_k(\hat{X}_k)\cdot\alpha_k\ \Big|\ \alpha_k\in\mathsf{R}\Big\}$$

D の元を**文**と称する．例えば次は D の元である．

$$\begin{aligned}d_1&=P(X)\\d_2&=Q(f(X,a),Y)=Q(X,Y)\cdot l(X,Y;f(X,a),Y)\\d_3&=P(g(Y))\cdot l(f(X);Y)\cdot\frac{5}{3}-Q(f(Y),a)\end{aligned}$$

$\tilde{P}_k(\hat{X}_k)$ $(k\in K_0)$ を生成元として R によって生成される有限生成左 R 加群を，**事実加群** Ψ と称する．

$$\Psi=\Big\{\sum_{k\in K_0}\alpha_k\cdot\tilde{P}_k(\hat{X}_k)\ \Big|\ \alpha_k\in\mathsf{R}\Big\}$$

例えば次は Ψ の元である．

$$\begin{aligned}\psi_1&=\tilde{P}(X)\\\psi_2&=\tilde{Q}(f(X,a),Y)=l(f(X,a),Y;X,Y)\cdot\tilde{Q}(X,Y)\\\psi_3&=\frac{5}{3}\cdot l(X;f(Y))\cdot\tilde{P}(g(Y))-\tilde{Q}(f(Y),a)\end{aligned}$$

$\psi\in\Psi$ と $d\in\mathsf{D}$ との**内積**と呼ぶ乗法を次により定義する．写像 $*:\Psi\times\mathsf{D}\to\mathsf{R}$ は双線形写像である．

$$\tilde{P}_i(\hat{t})*P_j(\hat{s})=l(\hat{t};\hat{s})\cdot\delta_{ij}$$

$$\sum_{i\in I}\alpha_i\cdot\psi_i*\sum_{j\in J}d_j\cdot\beta_j=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\alpha_i\cdot(\psi_i*d_j)\cdot\beta_j$$

環 M　一般に

$$m=\sum_{j\in J}d_j\cdot\psi_j\quad(d_j\in\mathsf{D},\ \psi_j\in\Psi)$$

と表記されるものに，D から D への左 R 準同形写像機能と，Ψ から Ψ への右 R 準同形写像機能を与える．

$$\begin{cases}m*(d\cdot\alpha)=\displaystyle\sum_{j\in J}d_j\cdot(\psi_j*d)\cdot\alpha\\m*(d_1+d_2)=m*d_1+m*d_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\beta\cdot\psi)*m=\displaystyle\sum_{j\in J}\beta\cdot(\psi*d_j)\cdot\psi_j\\(\psi_1+\psi_2)*m=\psi_1*m+\psi_2*m\end{cases}$$

このような m の全体を M とする．

$$M\overset{\text{def}}{=}\Big\{\sum_{i\in I}d_i\cdot\psi_i\ \Big|\ d_i\in\mathsf{D},\ \psi_i\in\Psi\Big\}$$

M は環 $\mathrm{End}_{\mathsf{R}}(\mathsf{D})$ と環 $\mathrm{End}^{\mathrm{O}}_{\mathsf{R}}(\Psi)$ の部分環である．M の単位元 1_M は具体的に次のように書ける．

$$1_M=\sum_{k\in K_0}P_k(\hat{X}_k)\cdot\tilde{P}_k(\hat{X}_k)$$

3　推論と充足の表現

ここでは推論加群系と充足，推論とを関係づける方法の概要を述べる．詳しくは [3] 参照のこと．

R', D, D_T, **割当加群** U　　総代入と等価な左単一化関数だけから生成する R の部分環を R' と記す.

$$R' = \Big\{ \sum_{j \in J} l(\hat{X}_j; \hat{t}_j) \cdot z_j + z_0 \;\Big|\; z_j \in \boldsymbol{Z} \Big\}$$

$\{P_k(\hat{X}_k)\}_{k \in K_0}$ を生成元として R' によって生成する, 右 R' 加群を D と記す.

$$\begin{aligned} D &= \Big\{ \sum_{k \in K_0} P_k(\hat{X}_k) \cdot \alpha_k \;\Big|\; \alpha_k \in R' \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{j \in J} A_j \cdot z_j \;\Big|\; A_j \in G,\ z_j \in \boldsymbol{Z} \Big\} \quad \subset \mathsf{D} \end{aligned}$$

さらに G_T から生成する D の部分加群を D_T とする.

D_T から $\boldsymbol{Z}$ への $\boldsymbol{Z}$ 準同形写像の全体を割当加群 U と称する. $u \in U$ による $d \in D_T$ の像を $u * d$ と記す. U の中に G_T の元を 1 に写像する定写像がただ一つ存在する. それを 1_U と記す. $D_T = D \cdot T$ となるので, $u \in U$, $d \in D$, $\tau \in T$ とすると, $u * (d \cdot \tau) \in \boldsymbol{Z}$ である. また非負の作用 β を, 任意の $A \in G_T$ と全ての $\tau \in T$ に対して

$$1_U * (A \cdot (\beta \cdot \tau)) \geq 0$$

となる $\beta \in \mathsf{R}$ と定義する. 非負の作用の全体を R^+ と記す.

変換 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{c}$　　割当て $w \in W$ と節 $c \in C$ について,

$$w \models c \;\Rightarrow\; \forall \tau \in T \Big[\boldsymbol{u}(w) * \boldsymbol{d}(c) \cdot \tau \geq 0 \Big]$$

となるように, 変換 $\boldsymbol{u} : W \to U$ と変換 $\boldsymbol{d} : C \to D$ を定めることができる. 例えば変換 $\boldsymbol{d}$ は次で定義すればよい.

$$\boldsymbol{d}(c) \overset{\text{def}}{=} \sum_{A_q \in c} A_q + \sum_{(\neg A_q) \in c} (P_0 - A_q) - P_0.$$

また次を満たすように変換 $\boldsymbol{c} : D \to C$ を定めることができる.

$$\forall \tau \in T \Big[\boldsymbol{u}(w) * d \cdot \tau \geq 0 \Big] \;\Rightarrow\; w \models \boldsymbol{c}(d)$$

具体的には次のように定めればよい.

$$\boldsymbol{c}\Big(\sum_{q \in Q} A_q \cdot z_q + P_0 \cdot z_0 \Big) \overset{\text{def}}{=} \Big(\bigvee_{z_q > 0} A_q \Big) \vee \Big(\bigvee_{z_q < 0} \neg A_q \Big) \vee c'$$

$$c' \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \Box \cdots\cdots\cdots\cdots \texttt{if } \sum_{z_q<0} z_q + z_0 < 0 \\ A_0 \vee \neg A_0 \cdots\cdots \texttt{if } \sum_{z_q<0} z_q + z_0 \geq 0 \end{cases}$$

すると以上のことから, D の和は次のようにして健全な推論として利用できる.

$$(w \models c_1) \wedge (w \models c_2) \;\Rightarrow\; w \models \boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}(c_1) + \boldsymbol{d}(c_2))$$

非負の作用 $\beta \in R'^+ = R' \cap \mathsf{R}^+$ も健全な推論として利用できる.

$$w \models c \;\Rightarrow\; w \models \boldsymbol{c}(\boldsymbol{d}(c) \cdot \beta)$$

完全性に関しては次の**代数的証明原理**が成り立つ [3, 4].

節集合 $S = \{c_i\}_{i \in I}$ が一般 Horn 条件を満足するならば, S が充足不可能であるための必要十分条件は, 次の一次方程式（証明方程式）:

$$\sum_{i \in I} \boldsymbol{d}(c_i) \cdot \alpha_i = \boldsymbol{d}(\Box), \quad \alpha_i \in \mathsf{R}^+$$

が解 α_i を持つことである.

一般 Horn 条件とは, 節集合 S に対する次の条件である.

$$\exists u \in Y [\, \mathrm{pos}(u, S) \,] \;\Rightarrow\; \exists u \in V [\, \mathrm{pos}(u, S) \,]$$

ただし

$$\begin{cases} V \overset{\text{def}}{=} \{ u \in U \mid u * P_0 = 1 \}, \\ Y \overset{\text{def}}{=} \{ u \in U \mid u * P_0 \geq 1 \}, \\ \mathrm{pos}(u, S) \overset{\text{def}}{=} \forall c \in S \cdot \forall \tau \in T [\, u * \boldsymbol{d}(c) \cdot \tau \geq 0 \,]. \end{cases}$$

一般 Horn 条件は Horn 節集合であるという条件を最大限緩めたものに相当する.

代数的証明原理の例として, 例えば次の Horn 節集合を考える.

$$\begin{cases} c_1 = R(a, X, X) \\ c_2 = R(s(A, X), Y, s(A, Z)) \vee \neg R(X, Y, Z) \\ c_3 = \neg R(s(b, s(c, a)), s(d, a), Q) \end{cases}$$

これらを $\boldsymbol{d}$ で変換した文集合と証明方程式は次の通り.

$$\begin{cases} d_1 = \boldsymbol{d}(c_1) = R(a, X, X) - P_0 \\ d_2 = \boldsymbol{d}(c_2) = R(s(A, X), Y, s(A, Z)) - R(X, Y, Z) \\ d_3 = \boldsymbol{d}(c_3) = -R(s(b, s(c, a)), s(d, a), Q) \end{cases}$$

証明方程式:　$d_1 \cdot \alpha_1 + d_2 \cdot \alpha_2 + d_3 \cdot \alpha_3 = -P_0$

この証明方程式は次の非負の解を持つから, 代数的証明原理により S は充足不能である.

$$\begin{cases} \alpha_1 = l(X; s(d, a)) \\ \alpha_2 = l(A, X, Y, Z; c, a, s(d, a), s(d, a)) \\ \qquad + l(A, X, Y, Z; b, s(c, a), s(d, a), s(c, s(d, a))) \\ \alpha_3 = l(Q; s(b, s(c, s(d, a)))) \end{cases}$$

4　推論加群系の線形代数

推論加群の元は零化元をもつので, 推論加群は自由加群ではない. しかし, 通常の一次独立の概念を緩めた準一次独立なる概念を定義すると, ほとんど自由加群のように扱えて, 線形代数的取扱いができる.

準一次独立性　　文集合 $\{d_i[\hat{X}_i]\}_{i \in I}$ が次の条件

$$\sum_{i \in I} d_i \cdot \alpha_i = 0 \; (\alpha_i \in \mathsf{R}) \;\Rightarrow\; \forall i \in I \Big[l(\hat{X}_i; \hat{X}_i) \cdot \alpha_i = 0 \Big]$$

を満すとき**準一次独立**，満さないときは**真一次従属**，と定義する．

ただ1個の元 $d[\hat{X}] \in \mathsf{D}$ が準一次独立であるときは**準自由元**と称し，真一次従属であるときは**真ねじれ元**と称する．さらに真ねじれ元の中で，特に非負の零化元を持つものを**強ねじれ元**，そうでない真ねじれ元を**弱ねじれ元**と称する．準自由元，弱ねじれ元，強ねじれ元の例を次に示す．

$$\begin{cases} \text{準自由元} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots P(X) \\ \text{真ねじれ元} \begin{cases} \text{弱ねじれ元} \cdots P(X)+Q(Y) \\ \text{強ねじれ元} \cdots P(X)-P(a) \end{cases} \end{cases}$$

汎逆元　次の関係を満たす $\psi \in \Psi$ を，$d \in \mathsf{D}$ の**汎逆元**と呼ぶ．

$$d \cdot (\psi * d) = d$$

汎逆元は一意ではない．汎逆元は線形代数でいう一般逆行列に相当する．任意の $d \in \mathsf{D}$ には汎逆元 ($\in \mathrm{Hom}_{\mathsf{R}}(\mathsf{D},\mathsf{R})$) が存在する．しかし，$\Psi$ の元として表現可能であるとは限らない．ψ が d の汎逆元であれば，一次方程式：

$$d \cdot \alpha = e, \quad (d, e \in \mathsf{D},\ \alpha \in \mathsf{R})$$

に解があるとき，$\psi * e$ は解である．さらに ψ が d の汎逆元であれば，

$$m = d \cdot \psi$$

は D から d が張る部分加群 $d \cdot \mathsf{R}$ への射影であり，

$$m = 1_M - d \cdot \psi$$

は D から $d \cdot \mathsf{R}$ の補部分加群への射影である．

逆元　次の関係を満たす $\psi \in \Psi$ を $d[\hat{X}]$ の逆元と呼ぶ．

$$\psi * d[\hat{X}] = l(\hat{X}; \hat{X}).$$

定義から逆元は汎逆元でもある．準自由元の汎逆元は逆元である．すなわち準自由元には逆元がある．逆元は一意ではない．

（汎）逆元は次のように文の形から分かることがある．

（汎）逆元		文
$\tilde{Q}(f(Y), X)$	逆	$Q(f(Y), X) - R(Y)$
$\tilde{Q}(f(Y), X)$	逆	$Q(f(Y), X) - Q(c, Y)$
$\tilde{P}(a, U, U)$	逆	$P(a, U, U) - P(a, b, c)$
$l(\hat{X}; \hat{t}[\hat{Y}]) \cdot \tilde{P}(\hat{Y})$	汎	$P(\hat{Y}) \cdot l(\hat{t}[\hat{Y}]; \hat{X})$
$\frac{1}{2} \cdot \tilde{P}(X, Y)$	汎	$P(X, Y) - P(Y, X)$
$\tilde{P}(X, Y)$	汎	$P(X, a) - P(a, X)$
$\frac{1}{2} \cdot (\tilde{P}(X, a) - \tilde{P}(a, X))$	汎	$P(X, a) - P(a, X)$
$\tilde{P}(X)$	汎	$P(X) - P(a)$
$(1 - \frac{1}{2} \cdot l(a; a)) \cdot (\tilde{P}(X) - \tilde{Q}(Y))$	汎	$P(X) - Q(Y)$

一般には次の手続きで汎逆元が求められる．

【手続A】

(A1)　$d_1 = d$,　$\alpha_1 = 1_{\mathsf{R}}$,　$i \leftarrow 1$ と置く．

(A2)　$e_i = d_i \cdot \beta_i$ ($\beta_i \in \mathsf{R}$) と表せる e_i で，その汎逆元 ψ_i が簡単に求まるものを見付け出す．

(A3)　次により ψ_i を $\{e_j\}_{j<i}$ に直交化する．

$$\phi_i = \psi_i - \sum_{j<i} (\psi_i * e_j) \cdot \phi_j$$

(A4)　次により d_i を ϕ_i に直交化する．

$$d_{i+1} = d_i - e_i \cdot (\phi_i * d_i)$$
$$\alpha_{i+1} = \alpha_i \cdot (1_{\mathsf{R}} - \beta_i \cdot (\phi_i * d_i))$$

(A5)　$d_{i+1} = 0$ ならば **(A6)** へ進む．
$d_{i+1} \neq 0$ ならば，$i \leftarrow i+1$ として **(A2)** へ戻る．

(A6)　$N \leftarrow i$ とする．

$$\psi = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot \beta_j \cdot \phi_j$$

と置いて，終了する．

手続Aがもし停止するならば，ψ は d の汎逆元である．ただし停止性は保証されていない．

無限級数の収束　再帰的節の逆元は無限級数で表わされる．そこで無限級数の収束を定義する．

Rの元の無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i$$

は，任意の $\tau \in T$ に対応してある n が存在し，$i > n$ ならば $\alpha_i \cdot \tau = 0$ であるとき，**収束**すると言う．例えば，

$$\sum_{i=0}^{\infty} l(f(X); X)^i = 1 + l(f(X); X) + l(f(f(X)); X) + \cdots$$

は収束するが，次は収束しない．

$$\sum_{i=0}^{\infty} l(X; f(X))^i = 1 + l(X; f(X)) + l(X; f(f(X))) + \cdots$$

Dの元の無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i$$

は，任意の $\tau \in T$ に対応してある n が存在して，$i > n$ ならば $d_i \cdot \tau = 0$ であるとき，**収束**すると言う．Ψ の元の無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi_k$$

は，任意の基礎文 $d \in \mathrm{D}$ に対応してある n が存在して，$i > n$ ならば $\psi_i * d = 0$ であるとき，**収束する**と言う．収束する無限級数の基礎例は有限和で表現される．

無限級数を用いた逆元　α の無限べき級数を

$$\{\alpha\} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i$$

と記すことにする．すると $\{\alpha\}$ が収束するとき次が成り立つ．

$$\{\alpha\}\cdot\alpha = \{\alpha\} - \alpha, \qquad \alpha\cdot\{\alpha\} = \{\alpha\} - \alpha$$

$$\{\alpha\}\cdot\beta = \alpha\cdot\beta + \{\alpha\}\cdot(\alpha\cdot\beta)$$

そこで例えば，

$$d_1 = P(f(X)) - P(X)$$

の逆元は次で表せる．

$$\psi_1 = \{l(f(X);X)\}\cdot\tilde{P}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} l(f(X);X)^i\cdot\tilde{P}(X)$$

5　自動証明への応用

ここでは推論加群系の自動証明への応用について述べる．

【例１】　次の Horn 節集合 S_1 を考える．

$$S_1 = \{P(s(X)) \vee \neg P(X), \quad P(a), \quad \neg P(s(s(a)))\}$$

$$\text{文集合へ変換}\begin{cases} d_1 = \boldsymbol{d}(c_1) = P(s(X)) - P(X) \\ d_2 = \boldsymbol{d}(c_2) = P(a) - P_0 \\ d_3 = \boldsymbol{d}(c_3) = -P(s(s(a))) \end{cases}$$

証明方程式　$d_1\cdot\alpha_1 + d_2\cdot\alpha_2 + d_3\cdot\alpha_3 = -P_0$

前進消去 (1): d_1 の逆元 ψ_1 による α_1 の消去.

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} l(s(X);X)^i\cdot\tilde{P}(X), \quad m_1 = 1_M - d_1\cdot\psi_1$$

$$\begin{cases} d_{21} &= m_1 * d_1 = 0, \\ d_{22} &= m_1 * d_2 = P(a) - P_0, \\ d_{23} &= m_1 * d_3 \\ &= -P(s(s(a))) + (P(s(s(a))) - P(s(a))) \\ &\qquad + (P(s(a)) - P(a)) = -P(a) \end{cases}$$

前進消去 (2): d_{22} の逆元 ψ_2 による α_2 の消去.

$$\psi_2 = \tilde{P}(a), \quad m_2 = 1_M - d_{22}\cdot\psi_2$$

$$\begin{cases} d_{32} &= m_2 * d_{22} = 0, \\ d_{33} &= m_2 * d_{23} \\ &= -P(a) + \big(P(a) - P_0\big)\cdot l(a;a) = -P_0 \end{cases}$$

d_{33} の逆元は $\psi_3 = -\tilde{P}_0$ である．その結果，証明方程式

$$d_{33}\cdot\alpha_3 = m_2 * m_1 * (-P_0) = -P_0$$

は $\alpha_3 = \psi_3 * (-P_0) = l(a;a) \in \mathrm{R}^+$ なる解を持つ．これより後退代入を行うと

$$\alpha_2 = l(a;a) \in \mathrm{R}^+, \quad \alpha_1 = l(X;s(a)) + l(X;a) \in \mathrm{R}^+$$

なる解を得るので，充足不可能であると判定される．

【例２】　次の Horn 節集合 S_2 を考える．

$$S_2 = \{P(a), \quad P(n(n(X))) \vee \neg P(X), \\ \neg P(n(a)), \quad P(X) \vee \neg P(n(n(X)))\}$$

$$\text{文集合へ変換}\begin{cases} d_1 = P(a) - P_0, \\ d_2 = -P(X) + P(n(n(X))), \\ d_3 = -P(n(a)), \\ d_4 = P(X) - P(n(n(X))). \end{cases}$$

証明方程式　$d_1\cdot\alpha_1 + d_2\cdot\alpha_2 + d_3\cdot\alpha_3 + d_4\cdot\alpha_4 = -P_0$

前進消去 (1): d_1 の逆元 ψ_1 による α_1 の消去.

$$\psi_1 = \tilde{P}(a), \quad m_1 = 1_M - (P(a) - P_0) * \tilde{P}(a)$$

$$\begin{cases} d_{21} = m_1 * d_1 = 0, \\ d_{22} = m_1 * d_2 = -P(X) + P(n(n(X))) - P_0\cdot l(a;X) \\ \qquad\qquad + P(a)\cdot l(a;X), \\ d_{23} = m_1 * d_3 = -P(n(a)), \\ d_{24} = m_1 * d_4 = P(X) - P(n(n(X))) + P_0\cdot l(a;X) \\ \qquad\qquad - P(a)\cdot l(a;X), \end{cases}$$

前進消去 (2): d_{22} の逆元 ψ_2 による α_2 の消去.

$$\psi_2 = \sum_{i=1}^{\infty} l(n(n(X));X)^i\cdot\tilde{P}(X), \quad m_2 = 1_M - d_{22}\cdot\psi_2$$

$$\begin{cases} d_{32} = m_2 * d_{22} = 0, \\ d_{33} = m_2 * d_{23} = -P(n(a)), \\ d_{34} = m_2 * d_{24} = 0. \end{cases}$$

このとき同時に α_4 も消去されている．

前進消去 (3): d_{33} の逆元 ψ_3 による α_3 の消去.

$$\psi_3 = -\tilde{P}(n(a)), \quad m_3 = 1_M + P(n(a)) * \tilde{P}(n(a))$$

$$d_{43} = m_3 * d_{33} = 0$$

その結果証明方程式は準同型写像 $m_3 * m_2 * m_1$ によって $0 = -P_0$ と不能の方程式に射影されるので，証明方程式に解は無い．従って非負の解もないから，もとの節集合は充足可能であることが分かる．この例は他の方法では無限ループに陥りやすい．

6 おわりに

一階述語論理における推論と充足が表現でき，線形代数的取扱いができる推論加群系を提案した．現在この推論加群系の計算を実行する数式処理系 rpdr が prolog の上で動いている．推論加群系を用いると証明方程式を解く，という形で証明問題を扱える．実際にその証明系 papend を rpdr の上に試作した．上記例２の papend による実行例を付録に示す．また準同形写像を活用して，証明戦略を検討したり，理論類似性の議論の土台とすることが期待できる．また推論と充足が代数的に表現できるので，一階述語論理の議論を，推論加群系の上に置き換えて行うことができる．

【例１】では非負条件を考慮しない解法で非負の解が得られた．非負条件を考慮した証明方程式の解法と，(汎)逆元構成手順をより完全にすることとは，今後の課題として残されている．

参考文献

[1] 山崎勇：推論の代数化と代数的証明原理：第２回人工知能学会全国大会, 1-3, pp.27-30, (1988).

[2] 山崎勇：一階述語論理における代数的証明原理：人工知能学会誌, V0l.5, No.3, pp.279 -290, (1990).

[3] 山崎勇：一階述語論理における推論と充足の代数化, コンピュータソフトウェア, Vol.12, No.2, pp.16 -31, (1995).

[4] 山崎勇：拡張された推論加群系とその線形代数, （コンピュータソフトウェアに投稿中）.

A 付録: papend の実行例

ここでは代数的証明システム papend による本文の【例２】の実行例を示す．
papend では非負条件を考慮するために補助述語 $N_1(X), N_2(X)$ が導入されている（この例では直ちに消去されている）．また射影を施した結果 0 となった文は除かれるため出力されていない．notation の対応は次のとおり．

$$
\begin{aligned}
P(X)+P_0-N_1(X) &\quad\cdots\quad \texttt{p(X)+p0+n1(X)*-1,}\\
l(X;a) &\quad\cdots\quad \texttt{\{X;a\},}\\
-P(a)\cdot l(a;X) &\quad\cdots\quad \texttt{p(a)*\{a;X\}*-1,}\\
l(X;f(X))\cdot \tilde{P}(X)*P(X) &\quad\cdots\quad \texttt{\{X;f(X)\}*p(X)**p(X),}\\
\sum_{i=1}^{\infty} l(n(X);X)^i &\quad\cdots\quad \texttt{\{\{n(X);X\}\}.}
\end{aligned}
$$

（実行例）

```
| ?-['rpdr.pl'].  - - - - - - - - - - - - - -  推論加群系の数式処理システム rpdr の読込指示
yes
| ?-['papend.pl'].  - - - - - - - - - - - - -  代数的証明系 papend の読込指示
yes
| ?-['satest.pl'].  - - - - - - - - - - - - -  証明例題集 satest の読込指示
yes
| ?-satest('p304',X).  - - - - - - - - - - -  例題 p304 の証明実行指示 → 実行

d(1,1,X):=p0*-1+p(a)                          }
d(1,2,X):=n1(X)*-1+p(X)*-1+p(n(n(X)))         }  例題 p304 の提示出力
d(1,3,X):=p(n(a))*-1                          }
d(1,4,X):=n2(X)*-1+p(X)+p(n(n(X)))*-1         }
expected=satisfiable  - - - - - - - - - - -  期待される正解(例題集の付属データ)の提示出力

m(1,2,X):=1+n1(X)*n1(X)*-1+n2(X)*n2(X)*-1  - - -  補助述語 n1, n2 は消去されるべきと判断
                                                   消去のための m12
d(2,1,X):=p0*-1+p(a)                          }
d(2,2,X):=p(X)*-1+p(n(n(X)))                  }  補助述語消去のための射影計算の結果
d(2,3,X):=p(n(a))*-1                          }
d(2,4,X):=p(X)+p(n(n(X)))*-1                  }
[1/d(2,1,X)=p(a)]  - - - - - - - - - - - - - -  d21 の逆元が p(a) であることを発見
m(2,1,X):=1+p0*p(a)+p(a)*p(a)*-1  - - - - - - - - -  d21 消去のための m21
d(3,2,X):=p(X)*-1+p(n(n(X)))+p0*{a;X}*-1+p(a)*{a;X}   }
d(3,3,X):=p(n(a))*-1                                  }  d21 消去の射影計算の結果
d(3,4,X):=p(X)+p(n(n(X)))*-1+p0*{a;X}+p(a)*{a;X}*-1   }
[1/d(3,2,X)={{n(n(X));X}}*p(X)]  - - - - - - - - - - -  d32 の逆元(無限級数)を発見
m(3,2,X):=1+p(X)*{{n(n(X));X}}*p(X)+p(n(n(X)))*{{n(n(X));X}}*p(X)*-1
          +p0*{a;X}*{{n(n(X));X}}*p(X)+p(a)*{a;X}*{{n(n(X));X}}*p(X)*-1  - -  d32 消去のための m32
d(4,3,X):=p(n(a))*-1  - - - - - - - - - - - - - - - - -  d32 の消去の射影計算の結果
[1/d(4,3,X)=p(n(a))*-1]  - - - - - - - - - - - - -  d43 の逆元
m(4,3,X):=1+p(n(a))*p(n(a))*-1  - - - - - - - - -  d43 消去のための射影 m43
                                 - - - - - - - - -  d43 消去の射影計算結果(全て0なので表示されず)

decision=satisfiable  - - - - -  証明方程式は不能であることが分かったので
X = X                                 充足可能と判定した。
yes
```

（付録 終り）