

# The algorithmic aspect of “probabilistic method independent number theorem”

山崎浩一 \*

**概要** 文献 [1] で、N.Alon と J.H.Spencer が独立数に対するある下界を確率論的手法を用いて導き出している。本稿では、この Alon と Spencer の結果に対し、アルゴリズム論的ある考察を与える。

## 1 はじめに

$G = (V, E)$  をあるグラフとする。ある頂点の集合  $I \subseteq V$  が独立集合とは、任意の 2 頂点  $u, v \in I$  に対して、 $\{u, v\} \notin E$  を満たすときをいう。最大の要素数を持つ独立集合を最大独立集合と呼び、その要素数を独立数と呼び、 $\alpha(G)$  で表す。文献 [1] では、N.Alon と J.H.Spencer が確率論的手法を用いて独立数に対し以下の下界を与えている：

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{d_G(v) + 1} \tag{1}$$

ここで、 $G = (V, E)$  はグラフで  $d_G(v)$  は  $G$  における  $v$  の次数を表す。[1] では、確率論的手法を用いている為、式 (1) を満たす独立集合を構成していない。本稿では、式 (1) を満たす独立集合を求めるアルゴリズムを紹介し、そのアルゴリズムに関するいくつかの基礎的な結果について述べる。

## 2 独立集合を求めるアルゴリズム

**定義 1**  $G = (V, E)$  をグラフとする。頂点  $v \in V$  の  $G$  における近傍とは、 $\{u \mid \{v, u\} \in E\}$  のことで、 $N_G(v)$  で表す。また、集合  $V - \{v\} \cup N_G(v)$  を  $C_G(v)$  で表す。

**独立集合を求めるアルゴリズム IND**

**step 1**  $IND = \emptyset$  とし、 $G$  を入力グラフとする。

**step 2** 各頂点  $v \in V$  に対し、

$$E_G(v) = \sum_{u \in V - C_G(v)} \frac{1}{d_{G_v}(u) + 1}$$

を計算する。ここで、 $G_v$  は  $V - C_G(v)$  が誘導する  $G$  の部分グラフである。 $E_G(v)$  が最大になる、ある  $v$  を選び、 $v$  を  $IND$  に加え、 $G$  を  $G_v$  に置き換える。

**step 3**  $G$  が空グラフでないならば、step 2 へ戻る。 $G$  が空グラフであれば、停止し、独立集合として  $IND$  を出力する。

**命題 1**  $G = (V, E)$  をグラフとする。以下の式を満たす頂点  $v$  が存在する：

$$\sum_{u \in C_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} \leq 1$$

**証明** 逆を仮定し、矛盾を導く。すべての頂点  $v \in V$  に対し、

$$\sum_{u \in C_G(v)} \frac{1}{d_G(u) + 1} > 1 \tag{*}$$

を仮定する。このとき、 $G$  の各頂点  $v_1, \dots, v_n$  に対する式 (\*) の和を考える：

\*電気通信大学 情報工学科 e-mail: yamazaki@cs.uec.ac.jp

$$\begin{aligned} \sum_{u \in C_G(v_1)} \frac{1}{d_G(u)+1} &> 1 \\ \sum_{u \in C_G(v_2)} \frac{1}{d_G(u)+1} &> 1 \\ &\vdots \\ \frac{\sum_{u \in C_G(v_n)} \frac{1}{d_G(u)+1}}{n} &> \frac{1}{n} \end{aligned}$$

すると、左辺の和は  $n$  になる。何故なら、各頂点  $u$  に対し、その頂点に対する  $1/(d_G(u)+1)$  という項は、ちょうど  $d_G(u)+1$  回足されるからである。また、明らかに右辺の和は  $n$  になり、従って矛盾。  $\square$

命題 1 に対し、以下の別解が存在する [2]。

命題 2  $G = (V, E)$  をグラフとし、 $v$  を  $G$  において最小次数を持つ頂点とする。このとき、

$$\sum_{u \in C_G(v)} \frac{1}{d_G(u)+1} \leq 1$$

証明 各頂点  $u \in C_G(v)$  に対し、 $1/(d_G(u)+1) \leq 1/(d_G(v)+1)$  が成り立つ。従って、 $|C_G(v)| = d_G(v)+1$  より、命題が成り立つ。  $\square$

命題 1 から以下の補題を得る。

補題 1 アルゴリズム IND のステップ 2 において、 $E_G(v)$  を最大にする  $v$  に対し、以下の式が成り立つ：

$$\sum_{u \in V} \frac{1}{d_G(u)+1} \leq 1 + \sum_{u \in V - C_G(v)} \frac{1}{d_{G_v}(u)+1}$$

証明  $v$  を  $\sum_{u \in C_G(v)} \frac{1}{d_G(u)+1} \leq 1$  を満たす  $G$  の頂点とする。

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V} \frac{1}{d_G(u)+1} &= \sum_{u \in C_G(v)} \frac{1}{d_G(u)+1} + \sum_{u \in V - C_G(v)} \frac{1}{d_G(u)+1} \\ &\leq 1 + \sum_{u \in V - C_G(v)} \frac{1}{d_{G_v}(u)+1} \end{aligned}$$

従って、明らかに補題が成り立つ。  $\square$

補題 3 から以下の定理を得る。

定理 4 アルゴリズム IND の出力  $IND$  に対し、

$$\sum_{u \in V} \frac{1}{d_G(u)+1} \leq |IND|$$

成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} \sum_{u \in V} \frac{1}{d_G(u)+1} &\leq 1 + \sum_{u \in V - C(v)} \frac{1}{d_G(u)+1} \\ &\leq 2 + \sum_{u \in V - C(v)} \frac{1}{d_{G_v}(u)+1} \quad \text{置き換えられた } G, v) \\ &\vdots \\ &\leq |IND| - 1 + \sum_{u \in V - C(v)} \frac{1}{d_{G_v}(u)+1} \quad (G \text{ は空グラフの } 1 \text{ 歩手前}) \\ &\leq |IND| \end{aligned}$$

従って、定理が成り立つ。  $\square$

系 5 独立集合を求める貪欲アルゴリズムは、 $\sum_{u \in V} \frac{1}{d_G(u)+1}$  以上の独立集合を求める。

## 参考文献

- [1] N. Alon, J. H. Spencer, The probabilistic method, Wiley, New York, (1992).
- [2] Z. Z. Chen, Personal Communication.
- [3] S. M. Selkow, A probabilistic lower bound on the independence number of graphs, *Discrete Mathematics*, (1994), pp.363-365.