数理解析研究所講究録
951 巻 1996 年 136-145

On the singular ground state with maximal intensity

佐藤 得志 (東北大学大学院理学研究科)
Tokushi SATO

ここでは, 空間次元を $n \geq 3$ として scalar field 方程式の singular ground state について考える. まず, scalar field 方程式の *ground state* とは, $\mathbf{R}^n$ 上の球対称函数 u で

$$(\mathrm{P})_0 \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = u^p, \quad u > 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n, \\ u(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

をみたすもののことである. この $(\mathrm{P})_0$ が解をもつための必要十分条件は $1 < p < (n+2)/(n-2)$ であり, この解は一意的であることはよく知られている. 次に, scalar field 方程式の *singular ground state* とは, $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 上の球対称函数 u で

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = u^p, \quad u > 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ u(x) \to \infty \quad \text{as } x \to 0, \quad u(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

をみたすもののことである. (実は $(\mathrm{P})_0$, (P) の解は球対称なものしかない.) この問題 (P) に対して, Ni–Serrin (1986) は, $p \geq (n+2)/(n-2)$ ならば (P) は解をもたないことを示した. また, 最近になって, $1 < p < (n+2)/(n-2)$ ならば (P) は解をもつことが分かってきた (Johnson–Pan–Yi, Tanimoto–Takahashi–Yotsutani–Yanagida, Sato).

以下においては, $1 < p < n/(n-2)$ の場合に話を限ることにする. このとき, 原点における特異点の挙動は

$$u(x) \sim \kappa E(x) \quad \text{as } x \to 0$$

なるものに限られる. ここで, E は $-\Delta$ の基本解, i.e.,

$$E(x) := \frac{1}{(n-2)n\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \quad (\omega_n : \text{単位球の体積})$$

であり, $\kappa > 0$ は (u に依存する) 定数である. この κ を特異点の強度 (*intensity*) と呼ぶ. そこで (P) のかわりに,

$$(\mathrm{P})_\kappa \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = u^p, \quad u > 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ u(x) \sim \kappa E(x) \quad \text{as } x \to 0, \quad u(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

を考える. このとき $(\mathrm{P})_\kappa$ の解 u は

$$-\Delta u + u = u^p + \kappa\delta_0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

をみたす. 更に, 次のことが知られている.

Fact. (i) ある $\kappa^* > 0$ が存在して, $0 < \kappa < \kappa^*$ に対して $(\mathrm{P})_\kappa$ は解をもち, $\kappa > \kappa^*$ に対しては $(\mathrm{P})_\kappa$ は解をもたない.
(ii) $\kappa > 0$ が十分小さければ $(\mathrm{P})_\kappa$ は少なくとも 2 つの解をもつ.

そこで, 以下においては, $\kappa = \kappa^* := \sup\{\kappa > 0 \mid (\mathrm{P})_\kappa$ は解をもつ$\}$ に対しての $(\mathrm{P})_\kappa$ の解の存在について述べる. このために, $(\mathrm{P})_\kappa$ の解 u とその線型化方程式

$$(\mathrm{L}\,;u) \qquad \begin{cases} -\Delta\varphi + \varphi = pu^{p-1}\varphi & \text{in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ \varphi(0) = 1, \quad \varphi(x) \to 0 & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

の球対称解を考える. このとき次が成り立つ.

Theorem 1. もし $(\mathrm{P})_{\kappa_1}$ の解 u で, その線型化方程式 $(\mathrm{L}\,;u_1)$ が正値球対称解 φ_1 をもつものが存在すれば, $\kappa_1 = \kappa^*$ であり, $(\mathrm{P})_{\kappa_1}$ の解は一意的である.

Theorem 2. $n \geq 4, 1 < p < n/(n-2)$ または $n = 3, 3/2 < p < 3$ ならば, ある $\kappa_1 > 0$ に対して, $(\mathrm{P})_{\kappa_1}$ の解 u_1 で, $(\mathrm{L}\,;u_1)$ が正値球対称解 φ_1 をもつものが存在する.

以下において, 上の 2 つの Theorems の証明の概略を述べることにする.
$n \geq 3, 1 < p < n/(n-2)$ とする. $\tau \in [0,1], \kappa > 0$ に対して,

$$(\mathrm{P}_\tau)_\kappa \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = u^p - (1-\tau)(\kappa E_1)^p, \quad u \geq \kappa E_1 & \text{in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ u(x) \sim \kappa E(x) \quad \text{as } x \to 0, \quad u(x) \to 0 & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

を考える. ここで, E_1 は $-\Delta + 1$ の基本解, i.e.,

$$E_1(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|x|^{(n-2)/2}} K_{(n-2)/2}(|x|)$$

である (K_ν は ν 次の変形 Bessel 函数). この E_1 は,

$$E_1(x) \sim E(x) \quad \text{as } x \to 0, \quad E_1(x) \sim c_n \frac{e^{-|x|}}{|x|^{(n-1)/2}} \quad \text{as } |x| \to \infty$$

をみたすことに注意しておく. このとき, 次のような問題を考える.

Definition. $\tau \in [0,1]$ に対して, (u, φ, κ) が (P_τ) の解であるとは, $\kappa > 0$ であって, u は $(\mathrm{P}_\tau)_\kappa$ の球対称解, かつ φ は $(\mathrm{L}\,;u)$ の正値球対称解となることである.

Theorem 2 を示すためには (P_1) が解をもつことを示せばよい. そこで,

$$T := \{\tau \in [0,1] \mid (\mathrm{P}_\tau) \text{ は解をもつ}\}$$

とおき, $T = [0,1]$ を示すことを目標とする. 以下, $\mathbf{R}^n$ 上の函数はすべて球対称なもののみを考え, $w(x) = w(|x|)$ と表す. w' は w の動径方向の微分を表すことにする. また,

$$L^q(\mathbf{R}^n)_\mathrm{r} := \{w \in L^q(\mathbf{R}^n) \mid w \text{ は球対称}\} \quad (\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{L^q(\mathbf{R}^n)})$$

等の記号を用いる. まず次のことに注意しておく.

Lemma 1. $1 < q \le \infty$, $w \in L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}$ とすると, $E_1 * w \in C(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})_{\mathrm{r}}$ であり,

$$E_1 * w(r) = E_1(r) \int_0^\infty w(t) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt \quad \text{for } r > 0,$$

$$\frac{1}{E_1(r)} E_1 * w(r) \to 0 \quad \text{as } r \to 0,$$

が成り立つ. ここで,

$$\sigma_1(r) := \int_0^r \frac{1}{E_1(t)^2 t^{n-1}} dt$$

である.

$\tau \in [0,1]$ に対して (P_τ) を解くために,

$$(*) \qquad u = \zeta^\lambda v + \kappa E_1 = (z + \kappa) E_1, \quad \varphi = \zeta^\lambda \psi = y E_1$$

として考える. ここで, $0 < \lambda < 1$,

$$\zeta(r) := \exp[1 - (1 + r^2)^{1/2}]$$

である. このとき, (v, ψ) のみたすべき方程式は

$$v = V[v; \kappa, \tau], \quad \psi = \Psi[v; \kappa] \psi$$

となる. 但し,

$$\begin{cases} V[v; \kappa, \tau] := \zeta^{-\lambda} \cdot E_1 * [(\zeta^\lambda v + \kappa E_1)_+^p - (1 - \tau)(\kappa E_1)_+^p], \\ \Psi[v; \kappa] \psi = \Psi[v, \psi; \kappa] := \zeta^{-\lambda} \cdot E_1 * [p(\zeta^\lambda v + \kappa E_1)_+^{p-1} \zeta^\lambda \psi] \end{cases}$$

である. また, (z, y) のみたすべき方程式は

$$z = Z[z; \kappa, \tau], \quad y = Y[z; \kappa] y$$

となる. 但し,

$$\begin{cases} Z[z; \kappa, \tau] := \dfrac{1}{E_1} E_1 * [((z + \kappa) E_1)_+^p - (1 - \tau)(\kappa E_1)_+^p], \\ Y[z; \kappa] y = Y[z, y; \kappa] := \dfrac{1}{E_1} E_1 * [p((z + \kappa) E_1)_+^{p-1} y E_1] \end{cases}$$

である. (u, φ, κ) が (P_τ) の解であるならば, $z, y \in X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}$ となる. 但し,

$$X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}} := \{z \in C(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}} \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}} \mid z(0) = 0\}$$

である. 更に, 次が成り立つ.

Lemma 2. $0 < \lambda < 1$, $p < q < n/(n-2)$ とすると,

$$V : L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}, \quad \Psi : L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}} \times L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}} \times \mathbf{R} \to L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}$$

は完全連続である. 特に, 任意の $(v, \kappa) \in L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}} \times \mathbf{R}$ に対して,

$$\Psi[v; \kappa] : L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}} \to L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}$$

は compact 作用素である.

次に, $(z,\kappa)\in X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}\times\mathbf{R}$ としたとき, $(*)$ の記号の下で, 固有値問題

$$(\mathrm{E}\,;u) \qquad \psi=\mu\Psi[v;\kappa]\psi$$

を考える. $(\psi,\mu)\in L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}\times\mathbf{R}$ が $(\mathrm{E}\,;u)$ の解ならば,

$$\varphi=\zeta^\lambda\psi\in W^{1,2}(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}\cap C(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}},\quad y=\frac{\varphi}{E_1}\in X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}$$

が成り立つ.

Lemma 3. $(z,\kappa)\in X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}\times\mathbf{R}$ とし, $u=(z+\kappa)E_1$ は $u_+>0$ をみたすとする.
(i) $(\mathrm{E}\,;u)$ の第1固有値 $\mu_1[u]$ は

$$\mu_1[u]=\inf_{\varphi\in W^{1,2}(\mathbf{R}^n)}\frac{\|\nabla\varphi\|_2^2+\|\varphi\|_2^2}{p\|\varphi u_+^{(p-1)/2}\|_2^2}\quad(>0)$$

によって与えられる. このとき, 固有函数 $\psi\in L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}$ は定符号である.
(ii) $(\psi,\mu)\in L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}\times\mathbf{R}$ を $(\mathrm{E}\,;u)$ の解とし, ψ は定符号であるとする. このとき, $\mu=\mu_1[u]$ であり, 固有値の重複度は1である.

次に, $\tau\in T$ とし, $(u_\tau,\varphi_\tau,\kappa_\tau)$ を (P_τ) の解とする. このとき,

$$(*)_\tau \qquad u_\tau=\zeta^\lambda v_\tau+\kappa_\tau E_1=(z_\tau+\kappa_\tau)E_1,\quad \varphi_\tau=\zeta^\lambda\psi_\tau=y_\tau E_1$$

とすれば,

$$\psi_\tau=\Psi[v_\tau;\kappa_\tau]\psi_\tau,\quad \psi_\tau>0$$

であるから, $(\psi_\tau,1)$ は $(\mathrm{E}\,;u_\tau)$ の解であり, 固有値1は重複度1である. よって,

$$\mathrm{Ker}\,(I-\Psi[v_\tau;\kappa_\tau])=[\psi_\tau]$$

である. $\Psi[v_\tau;\kappa_\tau]:L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}\to L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}$ が compact であることから,

$$\mathrm{Ker}\,(I-\Psi[v_\tau;\kappa_\tau])^*=[\psi_\tau^*],\quad \varphi_\tau^*=\zeta^\lambda\psi_\tau^*=pu_\tau^{p-1}\varphi_\tau\ (>0)$$

となることが分かる $(L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}^*=L^{q'}(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}})$. 更に,

$$(I-\Psi[v_\tau;\kappa_\tau])(L^q(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}})=[\psi_\tau^*]^\perp$$

であることに注意すると,

$$J_\tau:=(I-\Psi[v_\tau;\kappa_\tau])|_{[\psi_\tau^*]^\perp}:[\psi_\tau^*]^\perp\to[\psi_\tau^*]^\perp$$

は全単射であり, 逆作用素 J_τ^{-1} も有界になる.

Proof of Theorem 1. (i) $\kappa_1<\kappa^*$ と仮定する. $\kappa\in(\kappa_1,\kappa^*)$ を1つ固定し, u を $(\mathrm{P})_\kappa$ の解とする.

$$w=u-u_1-\alpha E_1,\quad \alpha=\kappa-\kappa_1$$

とおくと, $(I-\Psi[v_1;\kappa_1])(\zeta^{-\lambda}w)\in[\psi_1^*]^\perp$ より,

$$<\varphi_1,(u_1+w+\alpha E_1)^p-u_1^p-pu_1^{p-1}w>=0$$

が成り立つ. ところが,

$$\begin{aligned}&(u_1+w+\alpha E_1)^p-u_1^p-pu_1^{p-1}w\\=\ &p(p-1)(w+\alpha E_1)^2\int_0^1\int_0^1(u_1+st(w+\alpha E_1))^{p-2}dstdt+p\alpha u_1^{p-1}E_1>0\end{aligned}$$

となるから, 矛盾である. 従って $\kappa_1=\kappa^*$ である.

(ii) u を $(\mathrm{P})_{\kappa_1}$ の任意の解とする. (i) の記号の下で $\alpha=0$ であるから,

$$<\varphi_1,(u_1+w)^p-u_1^p-pu_1^{p-1}w>=0,$$
$$(u_1+w)^p-u_1^p-pu_1^{p-1}w=p(p-1)w^2\int_0^1\int_0^1(u_1+stw)^{p-2}dstdt\geq 0$$

を得る. これより $w\equiv 0$ が従うから, $(\mathrm{P})_{\kappa_1}$ の解は一意的である. □

同様にして次が成り立つ.

Lemma 4. $\tau\in T$ とし, $(u_\tau,\varphi_\tau,\kappa_\tau)$ を (P_τ) の解とする. このとき, $(\mathrm{P}_\tau)_{\kappa_\tau}$ の解は一意的である.

Theorem 2 を示すためには, T が空でなく, $[0,1]$ の中で開かつ閉であることを示せばよい. これを 5 つの steps に分けて示す.

Step 1. $T\neq\phi$ であること.

$0\in T$ であることを示す. $\kappa_0>0$ に対して,

$$u_0=\kappa_0E_1$$

は $(\mathrm{P}_0)_{\kappa_0}$ の解である. このとき, 固有値問題 $(\mathrm{E};E_1)$ の第 1 固有値 $\mu_1[E_1]$ と対応する固有函数 ψ_0 に対して,

$$\mu_1[E_1]=\kappa_0^{p-1},\quad \varphi_0=\zeta^\lambda\psi_0$$

とすれば, (u_0,φ_0,κ_0) は (P_0) の解となる. □

次に, T が $[0,1]$ の中で開であることを示す. 以下において $(*)_\tau$ の記号を用い, $\tau\in T$ に対して,

$$Y_\tau:=Y[z_\tau;\kappa_\tau],\quad [\varphi_\tau^*E_1]^\perp:=\{z\in X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}\mid <zE_1,\varphi_\tau^*>=0\}$$

及び

$$\begin{cases}\alpha_\tau:=p(p-1)<\varphi_\tau,u_\tau^{p-2}\varphi_\tau^2>,\quad \beta_\tau:=p(p-1)<\varphi_\tau,u_\tau^{p-2}\varphi_\tau E_1>,\\ \gamma_\tau:=<\varphi_\tau,(\kappa_\tau E_1)^p>,\quad \theta_\tau:=p<\varphi_\tau,(u_\tau^{p-1}-(1-\tau)(\kappa_\tau E_1)^{p-1})E_1>\end{cases}$$

とおく. また,

$$\mathcal{B}_X:=\{z\in X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}\mid \|z\|_\infty<1\}$$

とする.

Step 2. $\tau=0$ が T の [0,1] における内点であること.
$\tau=0$ の近傍において, 次の形で (P_τ) を解く.

$$z=\varepsilon(y_0+\varepsilon\xi),\quad y=y_0+\varepsilon\eta,\quad \kappa=\kappa_0-\varepsilon\mu,\quad \tau=\varepsilon^2\nu.$$

但し, $\xi,\eta\in[\varphi_0^*E_1]^\perp$ とする. このとき (ξ,η) のみたすべき方程式は,

$$(I-Y_0)\xi=\frac{1}{E_1}E_1{*}G_0^\varepsilon[\xi;\mu,\nu],\quad (I-Y_0)\eta=\frac{1}{E_1}E_1{*}H_0^\varepsilon[\xi,\eta;\mu]$$

となる. ここで

$$\begin{cases} G_0^\varepsilon[\xi;\mu,\nu]:=\dfrac{1}{\varepsilon^2}[(u_0+\varepsilon\varphi_0+\varepsilon(\varepsilon\xi-\mu)E_1)^p-(u_0-\varepsilon\mu E_1)^p] \\ \qquad\qquad\qquad -\dfrac{p}{\varepsilon}u_0^{p-1}(\varphi_0+\varepsilon\xi E_1)+p\nu u_0^{p-1}\varphi_0, \\ H_0^\varepsilon[\xi,\eta;\mu]:=\dfrac{p}{\varepsilon}[(u_0+\varepsilon\varphi_0+\varepsilon(\varepsilon\xi-\mu)E_1)^{p-1}-(u_0-\varepsilon\mu E_1)^{p-1}](\varphi_0+\varepsilon\eta E_1) \end{cases}$$

である. このとき $(I-Y_0)(X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}})\subset[\varphi_0^*E_1]^\perp$ より,

$$<\varphi_0,G_0^\varepsilon[\xi;\mu,\nu]>=0,\quad <\varphi_0,H_0^\varepsilon[\xi,\eta;\mu]>=0$$

が要請される. この条件は,

$$\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}=\frac{1}{\beta_0\gamma_0}\begin{pmatrix}0 & \gamma_0\\ -\beta_0 & \beta_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}<\varphi_0,K_0^\varepsilon[\xi;\mu,\nu]>\\ <\varphi_0,L_0^\varepsilon[\xi,\eta;\mu]>\end{pmatrix}$$

と同値である. 但し

$$\begin{cases} K_0^\varepsilon[\xi;\mu,\nu]:=G_0^\varepsilon[\xi;\mu,\nu]+p(p-1)\mu u_0^{p-2}\varphi_0E_1-\nu u_0^p, \\ L_0^\varepsilon[\xi,\eta;\mu]:=H_0^\varepsilon[\xi,\eta;\mu]+p(p-1)\mu u_0^{p-2}\varphi_0E_1 \end{cases}$$

である. ここで

$$\begin{cases} \mu_0^0:=\dfrac{\alpha_0}{\beta_0},\quad \nu_0^0:=\dfrac{\alpha_0}{2\gamma_0},\quad K_0^0:=\dfrac{1}{2}p(p-1)u_0^{p-2}\varphi_0^2,\quad L_0^0:=2K_0^0, \\ G_0^0:=K_0^0-p(p-1)\mu_0^0u_0^{p-2}\varphi_0E_1+\nu_0^0u_0^p,\quad H_0^0:=L_0^0-p(p-1)\mu_0^0u_0^{p-2}\varphi_0E_1, \\ \xi_0^0:=\dfrac{1}{\zeta^{-\lambda}E_1}J_0^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1{*}G_0^0],\quad \eta_0^0:=\dfrac{1}{\zeta^{-\lambda}E_1}J_0^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1{*}H_0^0] \end{cases}$$

とおくと, 縮小写像の原理を用いることによって次が成り立つ.

Lemma 5. $M>\|\xi_0^0\|_\infty+\|\eta_0^0\|_\infty$, $m>\mu_0^0+\nu_0^0$ とする. このとき, ある $\overline{\varepsilon}>0$ に対して次が成り立つ: 任意の $\varepsilon\in(0,\overline{\varepsilon}]$ に対して,

$$\begin{cases} \xi_0^\varepsilon=\dfrac{1}{\zeta^{-\lambda}E_1}J_0^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1{*}G_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon;\mu_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon,\eta_0^\varepsilon],\nu_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon,\eta_0^\varepsilon]]], \\ \eta_0^\varepsilon=\dfrac{1}{\zeta^{-\lambda}E_1}J_0^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1{*}H_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon,\eta_0^\varepsilon;\mu_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon,\eta_0^\varepsilon]]] \end{cases}$$

をみたすような $(\xi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon) \in ([\varphi_0^* E_1]^\perp \cap M\overline{\mathcal{B}_X})^2$ が唯一つ存在する．但し，$(\mu_0^\varepsilon[\xi,\eta], \nu_0^\varepsilon[\xi,\eta])$ は，$(\xi,\eta) \in ([\varphi_0^* E_1]^\perp \cap M\overline{\mathcal{B}_X})^2$ に対して，

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mu_0^\varepsilon[\xi,\eta] \\ \nu_0^\varepsilon[\xi,\eta] \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\beta_0\gamma_0} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0 \\ -\beta_0 & \beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} <\varphi_0, K_0^\varepsilon[\xi; \mu_0^\varepsilon[\xi,\eta], \nu_0^\varepsilon[\xi,\eta]]> \\ <\varphi_0, L_0^\varepsilon[\xi,\eta; \mu_0^\varepsilon[\xi,\eta]]> \end{pmatrix} \\ (\mu_0^\varepsilon[\xi,\eta], \nu_0^\varepsilon[\xi,\eta]) \in [-m,m]^2 \end{cases}$$

をみたすものである．

これによって，$\tau = 0$ の近傍において (P_τ) の解が存在することが分かる． □

Step 3. $\tau \in T \setminus \{0\}$ ならば，τ は T の内点であること．

$\tau = \tau_0 \in T \setminus \{0\}$ であるとき，その近傍において，次の形で (P_τ) を解く．

$$z = z_{\tau_0} + \varepsilon\xi, \quad y = y_{\tau_0} + \varepsilon\eta, \quad \kappa = \kappa_{\tau_0} - \varepsilon\mu, \quad \tau = \tau_0 + \varepsilon\nu.$$

但し，$\xi \in b_{\tau_0}^{-1}(1), \eta \in [\varphi_{\tau_0}^* E_1]^\perp$，

$$b_{\tau_0}(\xi) := p(p-1) <\xi E_1, u_{\tau_0}^{p-2}\varphi_{\tau_0}^2> \quad (\xi \in X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}})$$

とする．以下，τ_0 を単に τ で表すことにする．このとき (ξ,η) のみたすべき方程式は，

$$(I - Y_\tau)\xi = \frac{1}{E_1} E_1 * G_\tau^\varepsilon[\xi; \mu, \nu], \quad (I - Y_\tau)\eta = \frac{1}{E_1} E_1 * H_\tau^\varepsilon[\xi, \eta; \mu]$$

となる．ここで

$$\begin{cases} G_\tau^\varepsilon[\xi;\mu,\nu] := \dfrac{1}{\varepsilon}[(u_\tau + \varepsilon(\xi-\mu)E_1)^p - u_\tau^p - (1-\tau)(((\kappa_\tau - \varepsilon\mu)E_1)^p - (\kappa_\tau E_1)^p)] \\ \qquad\qquad + \nu((\kappa_\tau - \varepsilon\mu)E_1)^p - p u_\tau^{p-1}\xi E_1, \\ H_\tau^\varepsilon[\xi,\eta;\mu] := \dfrac{1}{\varepsilon}[(u_\tau + \varepsilon(\xi-\mu)E_1)^{p-1} - u_\tau^{p-1}](\varphi_\tau + \varepsilon\eta E_1) \end{cases}$$

である．このとき $(I - Y_\tau)(X(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}) \subset [\varphi_\tau^* E_1]^\perp$ より，

$$<\varphi_\tau, G_\tau^\varepsilon[\xi;\mu,\nu]> = 0, \quad <\varphi_\tau, H_\tau^\varepsilon[\xi,\eta;\mu]> = 0$$

が要請される．この条件は，

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta_\tau\gamma_\tau} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\tau \\ -\beta_\tau & \theta_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} <\varphi_\tau, K_\tau^\varepsilon[\xi;\mu,\nu]> \\ <\varphi_\tau, L_\tau^\varepsilon[\xi,\eta;\mu]> + 1 \end{pmatrix}$$

と同値である．但し，

$$\begin{cases} K_\tau^\varepsilon[\xi;\mu,\nu] := G_\tau^\varepsilon[\xi;\mu,\nu] + p\mu(u_\tau^{p-1} - (1-\tau)(\kappa_\tau E_1)^{p-1})E_1 - \nu(\kappa_\tau E_1)^p, \\ L_\tau^\varepsilon[\xi,\eta;\mu] := H_\tau^\varepsilon[\xi,\eta;\mu] + p(p-1)\mu u_\tau^{p-2}\varphi_\tau(\xi-\mu)E_1 \end{cases}$$

である．ここで

$$\begin{cases} \mu_\tau^0 := \dfrac{1}{\beta_\tau}, \quad \nu_\tau^0 := \dfrac{\theta_\tau}{2\gamma_\tau}, \quad G_\tau^0 := -p\mu_\tau^0(u_\tau^{p-1} - (1-\tau)(\kappa_\tau E_1)^{p-1})E_1 + \nu_\tau^0(\kappa_\tau E_1)^p, \\ \xi_\tau^0 := \dfrac{1}{\zeta^{-\lambda}E_1} J_\tau^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1 * G_\tau^0] + \dfrac{1}{\alpha_\tau}(1 - p(p-1) <\zeta^\lambda J_\tau^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1 * G_\tau^0], u_\tau^{p-2}\varphi_\tau^2>), \\ H_\tau^0 := p(p-1)u_\tau^{p-2}\varphi_\tau(\xi_\tau^0 - \mu_\tau^0)E_1, \quad \eta_\tau^0 := \dfrac{1}{\zeta^{-\lambda}E_1} J_\tau^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1 * H_\tau^0] \end{cases}$$

とおくと，縮小写像の原理を用いることによって次が成り立つ．

Lemma 6. $M > \|\xi_\tau^0\|_\infty + \|\eta_\tau^0\|_\infty$, $m > \mu_\tau^0 + \nu_\tau^0$ とする. このとき, ある $\overline{\varepsilon} > 0$ に対して次が成り立つ: 任意の $\varepsilon \in [-\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}]$ に対して,

$$\eta_\tau^\varepsilon = \frac{1}{\zeta^{-\lambda}E_1} J_0^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1 * H_\tau^\varepsilon[\xi_\tau^\varepsilon[\eta_\tau^\varepsilon], \eta_\tau^\varepsilon; \mu_\tau^\varepsilon[\xi_\tau^\varepsilon[\eta_\tau^\varepsilon], \eta_\tau^\varepsilon]]]$$

をみたすような $\eta_\tau^\varepsilon \in [\varphi_\tau^* E_1]^\perp \cap M\overline{\mathcal{B}_X}$ が唯一つ存在する. 但し, $\xi_\tau^\varepsilon[\eta]$ は, $\eta \in [\varphi_\tau^* E_1]^\perp \cap M\overline{\mathcal{B}_X}$ に対して,

$$\begin{cases} \xi_\tau^\varepsilon[\eta] = \dfrac{1}{\zeta^{-\lambda}E_1} J_\tau^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1 * G_\tau^\varepsilon[\xi_\tau^\varepsilon[\eta]; \mu_\tau^\varepsilon[\xi_\tau^\varepsilon[\eta], \eta], \nu_\tau^\varepsilon[\xi_\tau^\varepsilon[\eta], \eta]]] \\ \quad + \dfrac{1}{\alpha_\tau}(1 - p(p-1) < \zeta^\lambda J_\tau^{-1}[\zeta^{-\lambda}E_1 * G_\tau^\varepsilon[\xi_\tau^\varepsilon[\eta]; \mu_\tau^\varepsilon[\xi_\tau^\varepsilon[\eta], \eta], \nu_\tau^\varepsilon[\xi_\tau^\varepsilon[\eta], \eta]]], u_\tau^{p-2}\varphi_\tau^2 >), \\ \xi_\tau^\varepsilon[\eta] \in b_\tau^{-1}(1) \cap M\overline{\mathcal{B}_X} \end{cases}$$

をみたすものであり, $(\mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta], \nu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta])$ は, $(\xi, \eta) \in (b_\tau^{-1}(1) \cap M\overline{\mathcal{B}_X}) \times ([\varphi_\tau^* E_1]^\perp \cap M\overline{\mathcal{B}_X})$ に対して,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta] \\ \nu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta] \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\beta_\tau \gamma_\tau} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\tau \\ -\beta_\tau & \theta_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} < \varphi_\tau, K_\tau^\varepsilon[\xi; \mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta], \nu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta]] > \\ < \varphi_\tau, L_\tau^\varepsilon[\xi, \eta; \mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta]] > +1 \end{pmatrix} \\ (\mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta], \nu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta]) \in [-m, m]^2 \end{cases}$$

をみたすものである.

これによって, 任意の $\tau \in T \setminus \{0\}$ は T の内点であることが分かり, Step 2 と合わせて, T は [0,1] の中で開であることが分かる. □

最後に, T が [0,1] の中で閉であることを示す. このためにまず, 必要な a priori 評価を導く.

Step 4. a priori 評価.

$\tau \in T$ とすると, Lemma 1 によって次の積分表示が成り立つ.

$$\begin{cases} z_\tau(r) = \displaystyle\int_0^\infty (u_\tau(t)^p - (1-\tau)(\kappa_\tau E(t))^p) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt, \\ y_\tau(r) = p\displaystyle\int_0^\infty u_\tau(t)^{p-1}\varphi_\tau(t) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt, \\ z_\tau'(r) = \dfrac{1}{E_1(r)^2 r^{n-1}} \displaystyle\int_r^\infty (u_\tau(t)^p - (1-\tau)(\kappa_\tau E(t))^p) E_1(t) t^{n-1} dt, \\ y_\tau'(r) = \dfrac{p}{E_1(r)^2 r^{n-1}} \displaystyle\int_r^\infty u_\tau(t)^{p-1}\varphi_\tau(t) E_1(t) t^{n-1} dt. \end{cases}$$

特に, z_τ, y_τ は (動径方向に) 単調増大である.

一方, $\kappa_\tau E_1$ 及び u_τ はそれぞれ $(\mathrm{P}_\tau)_{\kappa_\tau}$ の劣解及び優解になっているので, $\kappa_\tau E_1 \le \underline{u}_\tau \le u_\tau$ をみたす $(\mathrm{P}_\tau)_{\kappa_\tau}$ の最小解 $\underline{u}_\tau$ が存在する. この $\underline{u}_\tau$ は (動径方向に関して) 単調減少な函数の列の極限になっているので, 再び単調減少になることが分かる. Lemma 4 によって $\underline{u}_\tau = u_\tau$ であるから, u_τ は単調減少である. これを用いると, φ_τ も単調減少であることが分かる. 更に, κ_τ は τ について単調減少であることも分かる.

Lemma 7. (i) $\tau \in T$ とすると, z_τ, y_τ は (動径方向に関して) 単調増大, u_τ, φ_τ は単調減少である.
(ii) $\tau_1, \tau_2 \in T$, $\tau_1 < \tau_2$ とすると, $\kappa_{\tau_1} > \kappa_{\tau_2}$ である. 特に, $\{\kappa_\tau\}_{\tau \in T}$ は有界である.

いま, $\tilde{\varphi} > 0$ かつ

$$\tilde{\varphi}(r) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < r \ll 1, \\ E_1(r) & \text{for } r \gg 1 \end{cases}$$

なる $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}$ をとり, $0 < \alpha < 1$ に対して

$$\omega_\alpha(r) := \int_0^r \frac{\tilde{\varphi}(t)^{1-1/(n-2)}}{E_1(t)^{\alpha-1/(n-2)}} dt$$

とおく. $(\mathrm{P}_\tau)_{\kappa_\tau}$ より

$$-[z_\tau' E_1^2 r^{n-1}]'(r) = (u_\tau(r)^p - (1-\tau)(\kappa_\tau E_1(r))^p) E_1(r) r^{n-1}$$

が成り立つが, これに $\omega_\alpha(r) E_1(r)^{\alpha-1}$ をかけて積分 (部分積分) すると,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (u_\tau(r)^p - (1-\tau)(\kappa_\tau E_1(r))^p) \omega_\alpha(r) E_1(r)^\alpha r^{n-1} dr \\ = &\int_0^\infty u_\tau(r) \Omega_\alpha(r) E_1(r)^\alpha r^{n-1} dr - \frac{\kappa_\tau}{\alpha((n-2)n\omega_n)^{(n-1)/(n-2)}} \end{aligned}$$

が得られる. ここで, Ω_α は

$$\frac{\Omega_\alpha(r)}{\omega_\alpha(r)} \leq \begin{cases} c_\alpha & \text{if } n \geq 5, \\ c_\alpha \log(e + \frac{1}{r}) & \text{if } n = 4, \\ c_\alpha (1 + \frac{1}{r}) & \text{if } n = 3 \end{cases}$$

をみたすものである. Young の不等式と Lemma 7 により, $n \geq 4$ $(1 < p < n/(n-2))$ または $n = 3$, $3/2 < p < 3$ ならば,

$$\int_0^\infty u_\tau(r)^p \omega_\alpha(r) E_1(r)^\alpha r^{n-1} dr \leq C_\alpha$$

が成り立つ. z_τ の積分表示と Lemma 7 を用いて次が得られる.

Lemma 8. $n \geq 4$ $(1 < p < n/(n-2))$ または $n = 3$, $3/2 < p < 3$ とすると, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $\tau \in T$ に対して

$$u_\tau(r) \leq C(1 + E_1(r)) \quad \text{for } 0 < r < \infty$$

が成り立つ. □

Step 5. T は $[0,1]$ において閉である.

z_τ, y_τ, z_τ', y_τ' の積分表示と Lemma 7, Lemma 8 を用いて次が得られる.

Lemma 9. $n \geq 4$ $(1 < p < n/(n-2))$ または $n = 3, 3/2 < p < 3$ とする. $a < b < \infty$ とすると, 次が成り立つ.
(i) $\{u_\tau\}_{\tau \in T}$ は $[a,b]$ 上一様有界, 同等連続である.
(ii) $\{\varphi_\tau\}_{\tau \in T}$ は $[0,b]$ 上一様有界, 同等連続である.

これらを用いて T が閉であることを示す. このために, $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty \subset T, \tau_j \to \tau$ as $j \to \infty$ とする. Lemma 9 と Ascoli–Arzelà の定理により, $\{j_i\}_{i=1}^\infty \subset \{j\}_{j=1}^\infty$, $u \in C(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})_{\mathrm{r}}$, $\varphi \in C(\mathbf{R}^n)_{\mathrm{r}}$ 及び$\kappa \geq 0$ が存在して,

$$\begin{cases} u_{\tau_{j_i}} \to u & \text{as } i \to \infty \quad (\mathbf{R}^n \setminus \{0\} \text{ 上局所一様収束}), \\ \varphi_{\tau_{j_i}} \to \varphi & \text{as } i \to \infty \quad (\mathbf{R}^n \text{ 上局所一様収束}), \\ \kappa_{\tau_{j_i}} \to \kappa & \text{as } i \to \infty \end{cases}$$

が成り立つ. 積分表示において $\tau = \tau_{j_i}$ として $i \to \infty$ とすれば, $(*)$ の記号の下で,

$$\begin{cases} z(r) = \displaystyle\int_0^\infty (u(t)^p - (1-\tau)(\kappa E(t))^p) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt, \\ y(r) = p \displaystyle\int_0^\infty u(t)^{p-1} \varphi(t) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt \end{cases}$$

が得られ, Lemma 7 を用いると $z(0) = 0$ となる. これより,

$$\begin{cases} -u''(r) - \dfrac{n-1}{r} u'(r) + u(r) = u(r)^p - (1-\tau)(\kappa E(r))^p & \text{for } 0 < r < \infty, \\ -\varphi''(r) - \dfrac{n-1}{r} \varphi'(r) + \varphi(r) = p u(r)^{p-1} \varphi(r) & \text{for } 0 < r < \infty \end{cases}$$

が成り立つ. 各 u_{τ_j}, φ_{τ_j} は単調減少であるから, u, φ は非増大である. 従って, ある $\gamma, \tilde{\gamma} \geq 0$ が存在して

$$u(r) \to \gamma, \quad \varphi(r) \to \tilde{\gamma} \quad \text{as } r \to \infty$$

となる. このとき, $u'(r) \to 0$, $u''(r) \to 0$, $\varphi'(r) \to 0$, $\varphi''(r) \to 0$ as $r \to \infty$ であるから, 上式より $\gamma = \gamma^p$, $\tilde{\gamma} = p\gamma^{p-1}\tilde{\gamma}$ である. よって, $\gamma = 0$ or 1, $\tilde{\gamma} = 0$ である.

いま $\gamma = 1$ であると仮定する. このとき φ は,

$$\frac{1}{r^{n-1}} [r^{n-1} \varphi']'(r) + (p u(r)^{p-1} - 1) \varphi(r) = 0 \quad \text{for } 0 < r < \infty$$

の解であり, $pu(r)^{p-1} - 1 \geq p - 1 > 0$ だから, Sturm の比較定理を用いることにより, φ は振動することが分かる. これは φ が非増大であることに矛盾するから, $\gamma = 0$ である.

最後に $\kappa > 0$ であることを示す. このために次の Lemma を用いる.

Lemma 10. u を $(\mathrm{P})_0$ の解または $u \equiv 0$ とすると, $(\mathrm{L}\,; u)$ は (非自明な) 球対称解をもたない.

$\kappa = 0$ と仮定する. このとき u は $(\mathrm{P})_0$ の解または $u \equiv 0$ であり, その線型化方程式 $(\mathrm{L}\,; u)$ は非自明な解をもつ. これは Lemma 10 に矛盾するから, $\kappa > 0$ である. 従って (u, φ, κ) は (P_τ) の解である.

よって T は $[0,1]$ において閉である. □

以上で Theorem 2 の証明が完結する.