数理解析研究所講究録
951巻 1996年 21-27

GINZBURG-LANDAU EQUATION WITH MAGNETIC EFFECT

神保秀一 (SHUICHI JIMBO)　　翟健 (JIAN ZHAI)

北海道大学大学院理学研究科数学専攻

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060 Japan

§1. 導入および準備

本稿では（低温）超伝導のＧＬモデルとしての Ginzburg-Landau (GL) 方程式とその非自明安定解の存在を考える．問題は次のように定式化される．$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は滑らかな境界をもつ有界領域とする．外部磁場がかかっていない状況でのある超伝導状態 (Φ, A) の全エネルギーを次のように考える．

$$(1.1) \qquad \mathcal{H}_\lambda(\Phi, A) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|(\nabla - iA)\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(1-|\Phi|^2)^2 \right) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}|\mathrm{rot} A|^2 dx.$$

ただし，Φ ($\mathbb{C}$-valued) は物体 Ω にある全電子のマクロ波動関数, A は電流で全空間に引き起こされる磁場のベクトルポテンシャル．$\lambda > 0$ はパラメータである．

$\mathcal{H}_\lambda$ の変分方程式として GL 方程式がえられる．

$$(1.2) \qquad \begin{cases} (\nabla - iA)^2\Phi + \lambda(1-|\Phi|^2)\Phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} - i\langle A \cdot \nu \rangle \Phi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, A + \left(i(\overline{\Phi}\nabla\Phi - \Phi\nabla\overline{\Phi})/2 + |\Phi|^2 A \right) \Lambda_\Omega = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は標準内積，Λ_Ω は Ωの特性関数. Jimbo and Morita [10] において, 回転対称環状領域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ の場合に非自明安定解が構成された．この結果を一般化し，Ω が非単連結領域の場合に考えるのが本稿の第一の目的である．次に領域を摂動してもこの安定解が存続するかということを考える．一方 Jimbo, Morita, Zhai [11] において磁場の効果を無視した方程式

$$(1.3) \qquad \Delta\Phi + \lambda(1-|\Phi|^2)\Phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \partial\Phi/\partial\nu = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \quad (\mathbb{C}-\text{valued}).$$

一般的な（ある意味で）非自明な Ω において安定解を構成した．$\overline{\Omega}$ から $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ への連続写像全体を $\mathcal{M}$ と表す．[11] においては $\mathcal{M}$ の各ホモトピークラスに

対応するして大きい $\lambda > 0$ をとってそれに対応する安定解を構成した．手法においては [12], [13] における方法を踏襲一般化して応用する．

さて詳しい枠組み作りに移る．汎関数 $\mathcal{H}(\Phi, A)$ を考える関数空間として $D = H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times Z$ をとる．ただし,

$$Z = \{A \in L^6(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \mid \ \nabla A \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^{3\times 3})\}.$$

この D の Local minimizer をいろいろ見つけることを考える．

Local minimizer ということ以上により詳しく，解の近くでの $\mathcal{H}_\lambda$ の挙動を方向別に調べ安定性についての性質（安定性不等式）も考える．その準備をする．まず，汎関数 (1.1) および 方程式 (1.2) は次の（ゲージ）変換によって不変であることに注意する．

$$\begin{cases} (\Phi, A) \longmapsto (\Phi', A') \\ \Phi' = e^{i\rho}\Phi, \qquad A' = A + \nabla\rho \qquad (\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}). \end{cases} \tag{1.4}$$

ρをいろいろとることによって，ひとつの解 (Φ, A) から解の連続体を得るがこの連続体自体がひとつの状態と考えることになっている．このような考えに従えば，(Φ, A) 安定性とはこの連続体 $C(\Phi, A)$ に横断的な方向へのエネルギー $\mathcal{H}_\lambda$ の増減で考えるのが自然であることがわかる．それを考慮して $C(\Phi, A)$ の接方向 $T(\Phi, A)$, 横断方向 $N(\Phi, A)$ を導入する．一般に $(\Phi, A) \in D \cap C^1$ にたいして次の空間を定義する．

$$T(\Phi, A) = \{(i\xi\Phi, \nabla\xi) \mid \xi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3),\ \nabla\xi \in Z\}.$$

$$N(\Phi, A) = \left\{(\Psi, B) \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times Z \mid \int_\Omega \mathrm{Im}(\Psi\overline{\Phi})dx = 0, \mathrm{div}\, B = 0 \ \text{ in } \ \mathbb{R}^3\right\}.$$

このとき全空間 D は (Φ, A) にたいし $T(\Phi, A)$, $N(\Phi, A)$ の直和に分解される．

命題 **1.**

$$D = T(\Phi, A) \oplus N(\Phi, A). \tag{1.5}$$

第 2 変分公式　$\Phi = u + vi$, $\Psi = \phi + \psi i$ として $\mathcal{H}_\lambda$ の第 2 変分は以下のように与えられる．

$$\mathcal{L}_\lambda(\Phi, A, \Psi, B) = \frac{d^2}{d\epsilon^2}\mathcal{H}_\lambda(\Phi + \epsilon\Psi, A + \epsilon B)_{|\epsilon=0} = \tag{1.6}$$

$$\int_\Omega \left\{|\nabla\phi + \psi A|^2 + |\nabla\psi - \phi A|^2 - \lambda(1 - u^2 - v^2)(\phi^2 + \psi^2) + 2\lambda(u\phi + v\psi)^2\right\} dx$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^3} |\mathrm{rot} B|^2 dx + \int_\Omega (u^2 + v^2)B^2 dx$$

$$+4\int_\Omega \langle A \cdot B\rangle(u\phi + v\psi)dx - 2\int_\Omega \{\phi\langle\nabla v \cdot B\rangle - \psi\langle\nabla u \cdot B\rangle + u\langle\nabla\psi \cdot B\rangle - v\langle\nabla\phi \cdot B\rangle\} dx$$

命題 **2.** (Φ, A) を D における *(1.2)* の C^1–級の解としたとき，次が成立する．

$$\mathcal{L}_\lambda(\Phi, A, \Psi, B) = \mathcal{L}_\lambda(\Phi, A, \Psi', B') \tag{1.7}$$

ただし， $(\Psi, B), (\Psi', B') \in H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times Z$, $(\Psi - \Psi', B - B') \in T(\Phi, A)$.

§2. 主結果

以下主要結果をまとめて述べる．領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ にたいして次の仮定をする．

条件 (A) $\overline{\Omega}$ から S^1 への連続写像で定値写像にホモトープでないものがある（すなわち，前節における $\mathcal{M}$ が非自明なクラスをもつこと）．

注意. この条件は今の場合空間次元が $n = 3$ なので Ω が単連結でないということと同値となる (cf. [11 ; Appendix]).

上の Ω にたいして解の存在と安定性を考える．

定理 **3.** 条件 *(A)* を仮定する．任意の $\theta_0 \in \mathcal{M} = C^0(\overline{\Omega}; S^1)$ にたいし，$\lambda_0 > 0$ が存在し $\mathcal{H}_\lambda$ は *Local minimizer* $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ ($\lambda \geqq \lambda_0$) をもち（すなわち *(1.2)* の解となり），次をみたす

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{x \in \Omega} |\, |\Phi_\lambda(x)| - 1| = 0$$

であり，写像 $\Phi_\lambda(x)/|\Phi_\lambda(x)| : \overline{\Omega} \longrightarrow S^1$ は θ_0 にホモトープである．

注意. 定理の中の $\theta_0 \in \mathcal{M}$ の取り方は条件 (A) のもとでは無限にあるから，λ 大きくなるとき，非常に多くの解が共存する事もわかる．

さらに第 2 変分の下からの評価により安定性も主張できる．

定理 **4.** ある定数 $c > 0$ があって

$$\mathcal{L}_\lambda(\Phi_\lambda, A_\lambda, \Psi, B) \geqq c \left(\|\Psi\|^2_{H^1(\Omega;\mathbb{C})} + \|B\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)} + \|\nabla B\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} \right) \tag{2.1}$$

ただし $(\Psi, B) \in N(\Phi_\lambda, A_\lambda)$, $\lambda \geqq \lambda_0$.

第 2 変分は無限小の変化率であるから，定理 4 は解の無限小の安定性となるが，これを用いて，もう少し広く解の近傍で通用する，（わかりやすい）安定性不等式も得ることができる．

定理 **5.** 上の定理に得られた解 $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ にたいして次の不等式が成立する．すなわち，ある定数 $c>0, \delta>0$ があって

$$
(2.2)\qquad \mathcal{H}_\lambda(\Phi_\lambda+\Psi, A_\lambda+B)-\mathcal{H}_\lambda(\Phi_\lambda, A_\lambda) \geqq c\left(\|\Psi\|^2_{H^1(\Omega;\mathbb{C})}+\|B\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}+\|\nabla B\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})}\right)
$$

ただし $(\Psi, B)\in N(\Phi_\lambda, A_\lambda)$, $\|\Psi\|^2_{H^1(\Omega;\mathbb{C})}+\|B\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}+\|\nabla B\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})} \leqq \delta$, $\lambda \geqq \lambda_0$.

定理 4 から定理 5 を導く過程の説明を行う．次の不等式が成立する．

補題 **6.** 定数 $c_1, c_2>0$ があって，つぎが成立する．

$$
(2.3)\qquad \mathcal{H}_\lambda(\Phi_\lambda+\Psi, A+B)-\mathcal{H}_\lambda(\Phi_\lambda, A_\lambda) \geqq \frac{1}{2}\mathcal{L}_\lambda(\Phi_\lambda, A_\lambda, \Psi, B)
$$

$$
-c_1\|\Psi\|^4_{H^1(\Omega;\mathbb{C})}-c_2\|B\|^4_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)}, \quad (\Psi, B)\in H^1(\Omega;\mathbb{C})\times Z.
$$

これは直接 (1.1) を書き下して，$(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ が解であることをもちいると第一変分に対応する部分が消滅し第 2 変分の部分が主要項になり高次項をソボレフの不等式などで処理しながら得られる．この補題により定理 5 が定理 4 よりただちに従う．

§**3.** 領域の特異変形と安定渦の存在

この節では前節における安定解 $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ が領域を摂動しても存続することを示す．その際，不等式 (2.3) が大いに活用される（不等式の証明は省略したけど）．結果を述べ，次に証明のアウトラインを行うことにする．定理 3 の状況において話をすすめる．条件 (i), (ii) 次のような滑らかな境界をもつ有界領域の族 $\Omega(\zeta)\subset\mathbb{R}^3$ $(\zeta>0)$ を考える．

(i) $\Omega(\zeta_1)\supset\Omega(\zeta_2)\supset\Omega \quad (\zeta_1>\zeta_2>0)$.

(ii) $\lim_{\zeta\to 0}\mathrm{Vol}(\Omega(\zeta)\setminus\Omega)=0$.

この $\Omega(\zeta)$ にたいして汎関数：

$$
(3.1)\qquad \mathcal{H}_{\lambda,\zeta}(\Phi, A)=\int_{\Omega(\zeta)}\left(\frac{1}{2}|(\nabla-iA)\Phi|^2+\frac{\lambda}{4}(1-|\Phi|^2)^2\right)dx+\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2}|\mathrm{rot}A|^2dx.
$$

を考える．$\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}$ を考える範囲は $D(\zeta)=H^1(\Omega(\zeta);\mathbb{C})\times Z$ である．

定理 **7.** $\lambda>\lambda_0$ を固定する．このとき，ζ_0 があって $\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}$ $(0<\zeta<\zeta_0)$ は，次の条件をみたす Local minimizer $(\Phi_{\lambda,\zeta}, A_{\lambda,\zeta})$（すなわち $\Omega(\zeta)$ に対する (1.2) をみたす）をもつ．

$$
\lim_{\zeta\to 0}\|\Phi_{\lambda,\zeta}-\Phi_\lambda\|_{H^1(\Omega;\mathbb{C})}=0
$$

$$\lim_{\zeta\to 0}(\|A_{\lambda,\zeta}-A_\lambda\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}+\|\nabla(A_{\lambda,\zeta}-A_\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})})=0$$

ただし，$(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ は定理 1 で得られたものとする．

(証明のアウトライン)

まず Φ_λ を Ω から $\mathbb{R}^3$ 上の関数$\widetilde{\Phi}_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$ へと拡張しておく．これを近似解とし，その近傍（ある意味で）で真の解を探す．そのため，集合

$$\begin{aligned}F(\delta,\epsilon,\zeta)=\{&(\Phi,A)\in D(\zeta)\mid((\Phi-\widetilde{\Phi}_\lambda)_{|\Omega},A-A_\lambda)\in N(\Phi_\lambda,A_\lambda),\\&\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}(\Phi,A)-\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}(\widetilde{\Phi}_\lambda,A_\lambda)<\epsilon,\\&\|\Phi-\widetilde{\Phi}_\lambda\|_{H^1(\Omega;\mathbb{C})}{}^2+\|A-A_\lambda\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}{}^2+\|\nabla(A-A_\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3})}{}^2<\delta\}\end{aligned}$$

とおく．
(Step 1). $\zeta>0,\ \delta>0, \epsilon>0$ を巧みにとって，この集合の中で $\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}$ の極小問題を考え，極小化点が内部の点であることも示す必要がある．まず $\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}$ が近似解 $(\widetilde{\Phi}_\lambda, A_\lambda)$ のまわりでやはりある程度 “下に凸の 2 次関数ように” なっていることをみるため，次の不等式を用意する．これは§2 の補題 6 から直接計算し $Q(\zeta)$ 上の部分を処理して得られる．

補題 8. ある定数 $c_1, c_2, c_3 > 0$ があって次の不等式を得る．

$$\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}(\Phi,A)-\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}(\widetilde{\Phi}_\lambda,A_\lambda)\geqq\frac{1}{2}\mathcal{L}_\lambda(\Phi_\lambda,A_\lambda,(\Phi-\widetilde{\Phi}_\lambda)_{|\Omega},A-A_\lambda) \tag{3.2}$$

$$-c_1\|\Phi-\widetilde{\Phi}_\lambda\|^4_{H^1(\Omega;\mathbb{C})}-c_2\|A-A_\lambda\|^4_{H^1(\Omega;\mathbb{R}^3)}-c_3\mathrm{Vol}(\Omega(\zeta)\setminus\Omega),\quad(\Phi,A)\in D(\zeta),\ \zeta>0.$$

これと定理 4 を組み合わせて，ある $\delta>0$ ($\epsilon>0, \zeta>0$ に依存しない) があって

$$\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}(\Phi,A)-\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}(\widetilde{\Phi}_\lambda,A_\lambda)+c_3\mathrm{Vol}(\Omega(\zeta)\setminus\Omega)\geqq$$

$$\|\Phi-\Phi_\lambda\|^2_{H^1(\Omega;\mathbb{C})}+\|A-A_\lambda\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}+\|\nabla(A-A_\lambda)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3})}\quad(\Phi,A)\in F(\delta,\epsilon,\zeta).$$

この $\delta>0$ は補題 6 の定数 c_1, c_2, c_3 のみできまる．

この $\delta>0$ にたいして $F(\delta,\epsilon,\zeta)$ を考えると ϵ, ζ によって

$$\|\Phi-\Phi_\lambda\|^2_{H^1(\Omega;\mathbb{C})}+\|A-A_\lambda\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}+\|\nabla(A-A_\lambda)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times3})}$$

の小ささが制御できることになる．これによって小さい $\epsilon>0$ を固定してそれにたいして$\zeta>0$ 小さくとって F のなかにおける Global minimizing problem を考えると最小値を Attain することが変分の直接法からでる．$(\Phi_{\lambda,\zeta}, A_{\lambda,\zeta})\in D(\zeta)$ が得られる．

(Step 2). Step 1 で得られた $(\Phi_{\lambda,\zeta}, A_{\lambda,\zeta})$ F のなかでは Local minimizer になっているが $D(\zeta)$ のなかで考えたとき Local Minimizer になっていることを示す必要がある．なぜならば F は $D(\zeta)$ のなかで開集合になってないからである．集合

$$T(\delta,\epsilon,\zeta) = \{(\Phi, A) \in D(\zeta) \mid \mathcal{H}_{\lambda,\zeta}(\Phi, A) - \mathcal{H}_{\lambda,\zeta}(\widetilde{\Phi}_\lambda, A_\lambda) < \epsilon,$$
$$\|\Phi - \widetilde{\Phi}_\lambda\|_{H^1(\Omega;\mathbb{C})}{}^2 + \|A - A_\lambda\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)}{}^2 + \|\nabla(A - A_\lambda)\|_{L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^{3\times 3})}{}^2 < \delta\}$$

ゲージ変換を用いて定まる対応を考える

$$T(\delta',\epsilon,\zeta) \ni (\Phi, A) \longmapsto (\Phi', A') = (\Phi e^{i\rho}, A + \nabla\rho) \tag{3.3}$$

補題 **9.** $\delta' > 0$ ($\epsilon, \zeta > 0$ によらず) を小さくとれば任意の $(\Phi, A) \in T(\delta',\epsilon,\zeta)$ にたいし ρ をうまくとって，対応 (3.3) の像を $F(\delta,\epsilon,\zeta)$ の中に取れる．また，この ρ の取り方は (Φ, A) にたいして連続にとれる．さらに連続写像

$$K : T(\delta',\epsilon,\zeta) \longrightarrow F(\delta,\epsilon,\zeta)$$

でかつ $F(\delta',\epsilon,\zeta)$ 上では恒等写像になるようなもの K がつくれる．

これによって，もし $F(\delta',\epsilon,\zeta)$ のなかで $\mathcal{H}_{\lambda,\zeta}$ が Minimizer を取ればゲージ不変性より $T(\delta',\epsilon,\zeta)$ でも Minimizer を取っていることにより，$D(\zeta)$ における Local minimizer となっている．よって，$\delta' > 0$ にあわせて $\epsilon > 0$ を取り直して（$\epsilon > 0$ は $\delta > 0$ のみに依存），Step 1 の最小化問題をやり直してやれば，その解が Local minimizer となる．

安定渦 空間次元 $n = 3$ であるから，条件 (i), (ii) をみたす領域の族 $\{\Omega(\zeta)\}$ としてどのような位相タイプのものでもつくれる．よって，可縮なものを取ることができる．一方，定理 3 の解 $(\Phi_\lambda, A_\lambda)$ については，Φ_λ は，複素平面 $\mathbb{C}$ の単位円周の近くを一周するのである．また，ここで作った $\Omega(\zeta)$ 上の解は Ω 上では上の解を近似しているので同様の性質をもつ．しかし，$\Omega(\zeta)$ は可縮なので，$\Phi_{\lambda,\zeta}(\Omega(\zeta))$ は必然的に原点 0 を含むことになる．これは，一般には，まさに（渦）糸状になると考えられる．

References

[1] M. Berger and Y. Chen, Symmetric vortices for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity and the nonlinear desingularization phenomenon, J. Funct. Anal. **82** (1989), 259-295.

[2] F. Bethuel, H. Brezis and F. Helein, Ginzburg-Landau Vortices, Birkhäuser (1994).

[3] N.A. Bobylev, Topological index of extremals of multidimensional variational problems, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 89-93.

[4] K.J. Brown, P.C. Dunne and R.A. Gardner, A semilinear parabolic system arising in the theory of superconductivity, J. Diff. Eqs. **40** (1981), 232–252.

[5] R. W. Carroll and A.J. Glick, On the Ginzburg-Landau equations, Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1968), 373-384.

[6] Y. Chen, Nonsymmetric vortices for the Ginzburg-Landau equations on the bounded domain, J. Math. Phys. **30** (1989), 1942-1950.

[7] Q. Du, M. Gunzberger and J. Peterson, Analysis and approximation of the Ginzburg-Landau model of superconductivity, SIAM Review **34** (1992), 54-81.

[8] A. Jaffe and C. Taubes, Vortices and Monopoles, Birkhauser 1980.

[9] S. Jimbo and Y. Morita, Stability of non-constant steady state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions, Nonlinear Anal. TMA. **22** (1994), 753-770.

[10] S. Jimbo and Y. Morita, Ginzburg-Landau equation and stable solutions in a rotational domain, to appear in SIAM J. Math. Anal.

[11] S. Jimbo, Y. Morita and J. Zhai, Ginzburg-Landau equation and stable solutions in a nontrivial domain, to appear Comm. PDE.

[12] S. Jimbo and Y. Morita, Stable solutions with Zeros to the Ginzburg-Landau equation with Neumann boundary condition, preprint.

[13] S. Jimbo and J. Zhai, Ginzburg-Landau equation with magnetic effect: Non-simply-connected domains, preprint.

[14] V.S. Klimov, Nontrivial solutions of the Ginzburg-Landau equation, Theor. Math. Phys. **50** (1982), 383-389.

[15] F. Odeh, Existence and bifurcation theorems for the Ginzburg-Landau equations, J. Math. Phys. **8** (1967), 2351-2356.

[16] J. Rubinstein and P. Sternberg, Homotopy classification of minimizers of the Ginzburg-Landau energy and the existence of permanent currents, preprint.

[17] Y. Yang, Existence, regularity and asymptotic behavior of the solution to the Ginzburg Landau equations on $\mathbb{R}^3$, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 147-161.

[18] Y. Yang, Boundary value problems of the Ginzburg-Landau equations, Proc. Roy. Soc. Edingburgh, **114A** (1990), 355-365.

[18] T. Miyakawa, On nonstationary solutions of the Navier -Stokes equations in exterior domains, Hiroshima Math. J. **12.** (1982), 115-140.