数理解析研究所講究録
952 巻 1996 年 112-118

Special generic maps and the subsequent development

高知高専　佐久間　一浩 (SAKUMA Kazuhiro)

1. Special generic map

本稿はすべて C^∞ カテゴリーの下で、議論する。従って、特に断らない限り、多様体、写像、ファイバー束はすべて C^∞ 級である。本節では、special generic map の定義とその背景にある問題に触れる。以下、M は、常に closed n-manifold を表すとする。

最初に、関数の場合を復習しよう。関数 $g: M \to \mathbf{R}$ に対して、$p \in M$ が g の**臨界点**であるとは、g の微分 $dg_p: T_pM \to T_{g(p)}\mathbf{R}$ が、$p \in M$ で全射でないときを云う。更に、g の臨界点が、**非退化**であるとは、$p \in M$ におけるヘシアン $(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ が、正則であるときを云う（この定義は、局所座標系の取り方に依らないことに注意)。関数 $g: M \to \mathbf{R}$ の臨界点がすべて非退化であるとき、g を**モース関数**と云う。
$f: M \to \mathbf{R}$ をモース関数とする。このとき、f の臨界点 $p \in M$ を中心とする局所座標 $(x_1, ..., x_n)$ が存在して、

$$f = f(p) - x_1^2 - \cdots x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 \cdots + x_n^2$$

なる標準型を持つことが示せる。自然数 λ $(0 \leq \lambda \leq n)$ は、p の**指標**と呼ばれ、局所座標の取り方に依らない。
モース理論の重要な側面の一つは、多様体 M 上に、モース関数が与えられたとき、臨界点の指標が与える（局所的）情報が、M の大域的構造に関する情報を与えることにある。例えば、古くから知られる Milner-Reeb の定理は、球面の重要な特徴付けを与えている。

Theorem 1.1.([12])

$f: M \to \mathbf{R}$ をモース関数とする。f の臨界点が、唯２点のみからなるならば、M は、n 次元球面 S^n に同相である。

Remark 1.2.

Theorem 1.1 で、f がモース関数であるという条件を除いても、同様の結論が成り立つことが知られている。また、一般に同相を微分同相に置き換えることが出来ないこともよく知られた事実である。

そこで、関数ではなく、写像（値域の次元が２以上という意味）に対しても、非

退化臨界点の拡張が定義される。まず、写像 $f: M \to \mathbf{R}^p$ $(n \geq p)$ に対して、$x \in M$ が f の特異点であるとは、f の微分 $df_x: T_xM \to T_{f(x)}\mathbf{R}^p$ が、線形写像として、退化するときを云う。ま t，f の特異点 $x \in M$ に対して、x を中心とする局所座標 $(x1, ..., x_n)$, $f(x) \in \mathbf{R}^p$ を中心とする局所座標 $(y_1, ..., y_p)$ が存在して、

$$y_i \circ f = x_i \quad (1 \leq i \leq p-1), y_p \circ f = -x_p^2 - \cdots - x_{p+\lambda-1}^2 + x_{p+\lambda}^2 + \cdots + x_n^2$$

なる標準型を持つとき、$x \in M$ を f の**折り目特異点** (fold singularity) と呼ぶ。特に、$p=1$ の場合は、非退化臨界点である。ここで、我々は、自然数 λ $(0 \leq \lambda \leq n-p+1)$ を x の指標と呼びたいのであるが、一般に λ は、局所座標の取り方に依存してしまうので、λ と $(n-p+1)-\lambda$ を同じと見なしそれを**指標**と呼ぶことにしよう。

指標 λ が、0（または $n-p+1$ ）であるとき、$x \in M$ を**定値折り目特異点** (definite fold singularity) という。更に、写像 $f: M \to \mathbf{R}^p$ が特異点としては、定値折り目特異点しか持たないとき、f を *special generic map* という。特に、$p=1$ の場合 Theorem 1.1 の関数である。

そこで、次のことが自然と問題になる。

" Theorem 1.1 に該当する多様体の特徴付けは、どうなるか？"

次元対 $(n,p)=(3,2)$ の場合に、Burlet- de Rham ([4]), (4,2) の場合に、Porto-Furuya ([14]) の結果がある。関数の場合 (Theorem 1.1) とは、対照的に M の可能な微分同相類が決定されている。また、一般次元対の場合の特徴付けとしては、次節で述べる佐伯の定理が special generic map 存在の為の必要十分条件を与える基本定理である。

本説を締めくくるに当たり、いくつかの注意を述べよう。
まず、f が special generic map であるという条件は、値域の次元 p が上がれば上がるほど強すぎる条件になる。つまり、p が上がれば一般に折り目特異点以外に現れる特異点型の種類も増大する。高次元多様体の構造を調べるのに「写像を用いる」というのは、あまり適さない。$p \geq 2$ のとき、special generic map を許容する多様体とその微分構造には、強い制限がある。本稿の主題であるが、$p=3$ の場合この制限が後節で見るように著しい。微妙な微分構造故に、未解決な問題も多い。また、$p \geq 4$ の場合は、特異点集合は、単なる部分集合であって部分多様体には、一般になり得ない。$p = 2,3$ の場合は、必ず部分多様体になることが、容易に解る ([9])。

2. Stein factorization

本節では、special generic map の global topology を調べる際に、基本的な道具となる Stein factorization について論ずる。

写像 $f: M \to \mathbf{R}^p$ を用いて、M の点に次の様な同値関係を入れる。但し、$n > p$ と仮定する。２点 $x, x' \in M$ に対して、次の条件 (i),(ii) を満たすとき、$x \sim x'$ と定める。

(i) $f(x) = f(x') \quad (= y)$
(ii) x, x' は、$f^{-1}(y)$ の同じ連結成分に属する。
$W_f = M/\sim$ と書くことにする。商写像を $q_f : M \to W_f$ とする。この商空間 W_f あるいは、商写像 $q_f : M \to W_f$ のことを f の **Stein factorization** ([4],[14],[15],[16],[17],[18],[19]) と呼ぶ。f が special generic map であるときには、次に述べるような大変都合の良い（扱い易い）、性質を持つことが容易に証明出来る。

Lemma 2.1.([4],[14],[17],[19])

$f: M \to \mathbf{R}^p$ を special generic map とする。
(1) f の特異点集合 $S(f)$ は、M の $p-1$ 次元部分多様体である。
(2) 制限写像 $f|S(f): S(f) \to \mathbf{R}^p$ は、はめ込みである。
(3) W_f は、平行化可能な境界付き p 次元多様体である。
(4) ∂W_f は、f の特異点集合 $S(f)$ と微分同相である。
(5) q_f から誘導される基本群の準同型 $(q_f)_* : \pi_1(M) \to \pi(W_f)$ は、同型である。

証明は、参考文献を参照。
次に、special generic map を許容する多様体の基本的特徴付けを与える佐伯の定理 ([15]) を述べよう。

Theorem 2.2.([15],[16])

$f: M \to \mathbf{R}^p \quad (n > p)$, special generic map が存在するための必要十分条件は、
(1) コンパクト平行化可能な境界を持つ p-manifold W, W 上の S^{n-p} 束 E_1 と ∂W 上の D^{n-p} 束 E_2 で、∂W 上の E_1 の制限 ∂E_1 と E_2 に同伴する S^{n-p} 束 ∂E_2 が束同型であるようなものが存在し、
(2) ∂W 上の恒等写像を覆う束写像である微分同相写像 $h: \partial E_1 \to \partial E_2$ で、h によって貼られた多様体 $E_1 \bigcup_h E_2$ が、M に微分同相であるようなものが存在することである。

さて、我々の目的は前節の最後でも述べた様に、この扱い易い性質を持つ写像を許容するような多様体の構造を調べることにある。特に、微妙な微分構造を持つ４次元を調べることを目的とする。Theorem 2.2 は、special generic map については、W_f の構造が判れば、定義域の多様体の構造もだいたい判ることを示唆している。実際、単連結な４次元多様体の場合は、ほぼ完全に微分同相類が決定されている ([15],[18])。ここでは詳しくは述べないが、そのような４次元閉多様体は、（ある）ホモトピー４球面 ([15])、$S^2 \times S^2$, $\mathbf{C}P^2 \sharp \overline{\mathbf{C}P^2}$ の連結和でかける。ここで、$p=2$ の場合 ([13]) は、正真正銘の４次元球面しかないが、$p = 3$ の場合

([15]) には、上で述べたように登場する多様体の種類が増える。詳しくは、参考文献を見て戴きたい。

3. 4-manifolds with free fundamental group admitting special generic map into $\mathbf{R}^3$

単連結な場合は、判ったので次に簡単な族として、基本群が $\mathbf{Z}$ の自由積の場合を調べるというのが、妥当な道筋だろう。

Theorem 3.1.([17])

Let M be a closed connected n-dimensional manifold with free fundamental group. We suppose that $n = 4$ or 5. Then M admits a special generic map into $\mathbf{R}^3$ if and only if M is diffeomorphic to

$$(\sharp^{r-\varepsilon} S^1 \times S^{n-1})\sharp(\sharp^{\varepsilon} S^1 \tilde{\times} S^{n-1})\sharp(\sharp^{s} S^2 \times S^{n-2})\sharp(\sharp^{\delta} S^2 \tilde{\times} S^{n-2})\sharp\Sigma^n$$

for some $\varepsilon, \delta \in \{0,1\}$ and $s \geq 0$, where r is the rank of the free group $\pi_1(M)$, the connected sum over an empty set is assumed to be the standard n-sphere, $S^1 \tilde{\times} S^{n-1}$ is the nontrivial (and hence nonorientable) S^{n-1}-bundle over S^1, $S^2 \tilde{\times} S^{n-2}$ is the nontrivial S^{n-2}-bundle over S^2, Σ^n is the standard n-sphere for $n = 5$, and $\Sigma^n = \partial(\Delta \times D^2)$ for some compact contractible 3-manifold Δ for $n = 4$.

証明の概略を述べよう。$n = 5$ の場合は、殆ど同様なので、省略する。また、ここでは、$\pi_1 \cong \mathbf{Z}$ のみ概略を述べる。一般の場合も大体同じである。Lemma 2.1 (3),(5) から、$\pi_1(W_f) \cong \mathbf{Z}$ で、Hempel [10, p. 57] の定理と Lemma 2.1 (4) から、特異点集合は、２次元球面か２次元トーラスのみから成り、W_f の prime decomposition は、３次元ホモトピー球面、３次元球体、種数１のハンドル体、$S^1 \times S^2$ の連結和であることが判る。[19] または [15] で証明された不等式から、２次元ベッチ数が０の場合からその個数が増えるに従い、Theorem 2.2 の分解を使って、M を再現すればよい。ちなみに、２次元ベッチ数が０の場合は、特異点集合は唯一つの２次元トーラスからなり、M は、$\Sigma^4 \sharp S^1 \times S^3$ または$\Sigma^4 \sharp S^1 \tilde{\times} S^3$ に微分同相であることが判る。(詳細は、論文 [17] を準備中のためそちらを参照されたい)。

ここで、特に $\pi_1(M) \cong \mathbf{Z}$ の場合が大変興味深い内容を含んでいるので、それに触れておこう。４次元多様体が向き付け可能か否かで状況が異なる。まず、向き付け不可能な場合である。以下、S^1 上の非自明 S^3 束の全空間を $S^1 \tilde{\times} S^3$ と書くことにする。

Akbulut's manifold Y^4 の構成から始める。Q^4 を Cappell-Shaneson により構成された exotic $\mathbf{R}P^4$ ([5]) とする。Akbulut ([1],[7]) は、埋め込み$\varphi : \mathbf{R}P^2 \hookrightarrow Q^4 \sharp S^2 \times S^2$ で、$\pi_1(Q^4 \sharp S^2 \times S^2 - \varphi(\mathbf{R}P^2)) \cong \mathbf{Z}$ となるようなものを見つけ、$Y^4 = (Q^4 \sharp S^2 \times S^2 - \varphi(\mathbf{R}P^2)) \cup S^1 \tilde{\times} D^3$ に対して、その normal invariant ([5],[1],[7]) $\rho(Y^4) \equiv 8 \pmod{16}$ を示した。一方、Y^4 は、$S^1 \tilde{\times} S^3 \sharp S^2 \times S^2$ に topologically

s-cobordant であることは、容易に判る。従って、Freedman の s- 同境定理 ([8]) から、Y^4 は、$S^1\tilde{\times}S^3\sharp S^2\times S^2$ に同相である。しかし、$\rho(S^1\tilde{\times}S^3\sharp S^2\times S^2)\equiv 0$ (mod 16) が判るから Y^4 は、$S^1\tilde{\times}S^3\sharp S^2\times S^2$ に smoothly s-cobordant ではない。故に、微分同相でさえない ([1],[2],[3],[7])。更に、我々の分類にも出てくるあるホモトピー4次元球面 (後述の Theorem 3.1 参照) Σ^4 に対して、ホモトピー4球面は S^4 に、h- 同境だから$\rho(\Sigma^4\sharp S^1\tilde{\times}S^3\sharp S^2\times S^2)\equiv 0\pmod{16}$ を得、従って、Y^4 は、$\Sigma^4\sharp S^1\tilde{\times}S^3\sharp S^2\times S^2$ にも微分同相でない。Y^4 上には、special generic map into $\mathbf{R}^3$ は存在しない。従って、(更に若干の考察を加えて) 次の結果を得る。

Proposition 3.2.([17])

Let Y^4 be the Akbulut's manifold. Then for every nonnegative integer k, $Y^4\sharp(\sharp^k S^2\times S^2)$ is homeomorphic to $S^1\tilde{\times}S^3\sharp(\sharp^{k+1}S^2\times S^2)$, while $Y^4\sharp(\sharp^k S^2\times S^2)$ does not admit any special generic map into $\mathbf{R}^3$.

ここで、注意しておきたいのは、Akbulut manifold Y^4 に対して $M^4=Y^4\sharp S^2\tilde{\times}S^2$ は、$S^1\tilde{\times}S^3\sharp S^2\times S^2\sharp S^2\tilde{\times}S^2$ に微分同相 ([3]) であることが知られていることである。故に、M^4 上には special generic map into $\mathbf{R}^3$ が存在する。

また、Kreck ([11]) による次の様な例もある (Kreck の結果はもっと広いクラスについて述べられている)。K をK3曲面を表すとする。$S^1\tilde{\times}S^3\sharp K\sharp r(S^2\times S^2)(r\geq 0)$ は容易に判るように、$S^1\tilde{\times}S^3\sharp(r+11)(S^2\times S^2)$ に同相である。しかし、Kreck ([11]) によると、微分同相ではない。従って、Proposition 3.2 と同様の議論から、$S^1\tilde{\times}S^3\sharp K\sharp r(S^2\times S^2)(r\geq 0)$ 上には special generic map into $\mathbf{R}^3$ が存在しないが、$S^1\tilde{\times}S^3\sharp r(S^2\times S^2)(r\geq 0)$ 上には special generic map into $\mathbf{R}^3$ が存在する。勿論、K 上には special generic map は存在しない。このことを使って、$S^1\tilde{\times}S^3\sharp K\sharp r(S^2\times S^2)(r\geq 0)$ 上に、special generic map が存在しないことを示せれば良いのだが今の所なかなか容易でない。

向き付け可能な場合は、もう少し微妙である。我々の分類と深く関わる $\pi_1\cong\mathbf{Z}$ の4次元多様体として、Scharlemann's manifold ([20]) の構成を思い出そう。まず、Brieskorn homology 3-sphere $\Sigma(2,3,5)$ (ポアンカレホモロジー3球面) に対して、その基本群 $\pi_1(\Sigma(2,3,5))$ は、binary dodecahedral group であることが知られている。その中心 (order 2) に属さない任意の元 (118 個ある) γ を選んで、$\Sigma(2,3,5)\times S^1$ の中で、γ を表す埋め込まれた (余次元3だから可能) ループでスピン手術 (trivial framing を取る) して得られる4次元多様体が Scharlemann's manifold X^4 であった。X^4 は、$S^1\times S^3\sharp S^2\times S^2$ に同相だが、微分同相かどうかは判っていない ([20],[9])。従って、X^4 上に special generic map into $\mathbf{R}^3$ が存在するかどうかは判らない。しかし、$S^2\times S^2$ を連結和すると $X^4\sharp S^2\times S^2$ は、$S^1\times S^3\sharp 2(S^2\times S^2)$ に微分同相である ([6]) ことが知られているので、$X^4\sharp S^2\times S^2$ 上には、special generic map into $\mathbf{R}^3$ は存在する。X^4 上に、special generic map into $\mathbf{R}^3$ は存在しないことを示せれば、$S^1 \times S^3 \sharp S^2 \times S^2$ に exotic differentiable structure が入ることが判定出来る。

最後に一つの注意を述べて終わりにする。任意の spun 3-manifold M^4 (例えば、[21]) は、Theorem 2.2 から直ちに判るように、特異点集合が 2 次元球面 1 個の special generic map $f : M^4 \to \mathbf{R}^3$ を許容する。本稿では、基本群が $\mathbf{Z}$ の自由積の場合を扱ったが、例えば、$\pi_1(M^4) \cong \mathbf{Z}_p$ の場合、もし、p が奇数で、$W_f \equiv L(p,q) - IntD^3$ であるような沢山の special generic maps into $\mathbf{R}^3$ が存在するが、異なる q に対して、M^4 の微分構造は一意であることが知られているので (Pao manifold [13])、(W_f の位相構造が異なるので) 本質的に異なる special generic map $f : M^4 \to \mathbf{R}^3$ が存在することが判る (このことは、研究集会中、小林真人氏により教えられた)。

謝辞: 本稿を書くに当たって佐伯修氏との議論が大変役に立った。また、Scharlemann's manifold について、佐藤好久氏からいろいろと詳しく教えていただいた。あらためて、両氏に感謝の意を呈する。

References

[1] S. Akbulut, *A fake 4-manifold*, Contemporary Math. **35** (1984), 75–141.

[2] S. Akbulut, *A fake $S^3 \tilde{\times} S^1 \sharp S^2 \times S^2$*, Contemporary Math. **44** (1985), 281–286.

[3] S. Akbulut, *Constructing a fake 4-manifold by Gluck construction to a standard 4-manifold*, Topology **27** (1988), 239–243.

[4] O. Burlet and G. de Rham, *Sur certaines applications génériques d'une variété close à trois dimension dans le plan*, Enseign. Math. **20** (1974), 275–292.

[5] S. E. Cappell and J. L. Shaneson, *Some new four-manifolds*, Ann. of Math. **104** (1976), 61–72.

[6] R. Fintushel and P. S. Pao, *Identification of certain 4-manifolds with group actions*, Proc. Amer. Math. Soc. **67** (1977), 344–350.

[7] R. Fintushel and R. J. Stern, *Another construction of an exotic $S^1 \tilde{\times} S^3 \sharp S^2 \times S^2$*, Contemporary Math. **35** (1984), 269–275.

[8] M. H. Freedman, *The disk theorem for four-dimensional manifolds*, Proc. Int. Congress of Math., August 16–24, 1983, Warszawa, pp.647–663.

[9] T. Fukuda, *Topology of folds, cusps and Morin singularities*, in "A Fete of Topology", ed. by Y. Matsumoto, T. Mizutani and S. Morita, Academic Press,

New York, 1987, pp. 331–353.

[10] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. of Math. Studies, vol.86, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1976.

[11] M.Kreck, *Some closed 4-manifolds with exotic differentiable structure*, Springer Lecture Notes in Math. **1051** (1984), 246–262.

[12] J.Milnor, Morse theory, Princeton Univ. Press vol. 51, 1962.

[13] P. S. Pao, *The topological structure of 4-manifolds with effective torus actions. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977), 279–317.

[14] P.Porto and Y.K.Furuya, *On a special generic map from a closed manifold into the plane*, Topology Appl. **35** (1990), 41-52.

[15] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. **49** (1993), 265–293.

[16] O. Saeki, *Topology of special generic maps into* $\mathbf{R}^3$, in Workshop on Real and Complex Singularities", Matemática Contemporânea **5** (1993), 161–186.

[17] O.Saeki and K.Sakuma, On special generic maps into $\mathbf{R}^3$, in preparation.

[18] K. Sakuma, *On special generic maps of simply connected* $2n$*-manifolds into* $\mathbf{R}^3$, Topology Appl. **50** (1993), 249–261.

[19] K. Sakuma, *On the topology of simple fold maps*, Tokyo J. Math. **17** (1994), 21–31.

[20] M. Scharlemann, *Constructing strange manifolds with the dodecahedral space*, Duke Math. J. **43** (1976), 33–40.

[21] A. I. Suciu, *The oriented homotopy type of spun 3-manifolds*, Pacific J. Math. **131** (1988), 393–399.