

# 線織面上のある葉層構造について

名古屋工業大学 佐伯 明洋 (Akihiro SAEKI)

1996 年 1 月

## 1 問題意識

線織面上の葉層構造については Gómez-Mont[GM] が線織面上の非特異葉層構造を分類しているが、ここではまた別の観点から線織面上のある条件を満たす葉層構造について考察したい。

まず線織面の定義を振り返ろう。

**定義 1.1** 閉リーマン面  $C$  上の線織面とは  $C$  上の  $P^1$  束  $X \xrightarrow{\pi} C$  のこと。

すなわち線織面とは複素解析曲面のうち、閉リーマン面上の  $P^1$  束の構造という著しい葉層構造を持つものとして特徴付けられている。そこで更に別の葉層構造の存在を要請すれば、線織面のうちで特殊のものを取り出すことが出来るのではないかと考えられる。このような視点から次の問題を考える。

**問題 1.2** 線織面  $X \xrightarrow{\pi} C$ 、 $X$  上の既約曲線  $C_1$  および  $X$  上の葉層構造  $\mathcal{F}$  の組  $(X \xrightarrow{\pi} C, C_1, \mathcal{F})$  で次の条件 (\*) を満たすものを特定分類せよ。ただし曲線  $C_1$  は  $X \xrightarrow{\pi} C$  のファイバーではないものとする。

(\*) 葉層構造  $\mathcal{F}$  は曲線  $C_1$  を不変に保ち  $C_1$  上には特異点を持たない。

ここで葉層構造および葉層構造が曲線を不変に保つとは次の意味である。

**定義 1.3** •  $m$  次元複素多様体  $M$  上の 1 次元葉層構造とは、 $M$  上の正則ベクトル場の芽の層  $\Theta_M$  の可逆部分層  $\mathcal{F}$  で

$$S(\mathcal{F}) = \{x \in M \mid (\Theta_M/\mathcal{F})_x \text{ は階数 } m-1 \text{ の自由 } \mathcal{O}_{M,x} \text{ 加群ではない}\}$$

が余次元 2 以上のもののこと。ここで  $S(\mathcal{F})$  を葉層構造  $\mathcal{F}$  の *singular locus* という。

• 连接的イデアル層  $I \subset \mathcal{O}_M$  によって定義された  $M$  の subvariety  $N$  について、

$$\mathcal{F} \text{ が } N \text{ を不変に保つ} \stackrel{\text{def}}{\iff} FI \subset I$$

以下問題 1.2 を考察するため、線織面の代数幾何的性質について少し復習しよう。(例えば [Ha] 参照。)

## 2 線織面上の因子

次のことが知られている。

**命題 2.1** • 曲線  $C$  上の任意の線織面  $X \xrightarrow{\pi} C$  に対して  $C$  上の階数 2 の局所自由層  $\mathcal{E}$  で

$$X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$$

となるものが存在する。

•  $C$  上の 2 つの線織面  $X_1 = \mathbf{P}(\mathcal{E}_1) \xrightarrow{\pi} C$  と  $X_2 = \mathbf{P}(\mathcal{E}_2) \xrightarrow{\pi} C$  について

$$\text{線織面として } X_1 \text{ と } X_2 \text{ とは同型} \iff \exists \mathcal{L} : C \text{ 上の可逆層 s. t. } \mathcal{E}_2 = \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}_1$$

そこで  $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$  となる局所自由層  $\mathcal{E}$  を良い性質を持つように選ぶ。

**定義 2.2** 線織面  $X \xrightarrow{\pi} C$  に対して  $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$  となる  $C$  上の階数 2 の局所自由層  $\mathcal{E}$  について、 $\mathcal{E}$  が正規化されているとは次の 2 つを満たすこと。

1.  $\Gamma(C, \mathcal{E}) \neq 0$
2.  $\Gamma(C, \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}) = 0$  for any invertible sheaf  $\mathcal{L}$  with  $\deg \mathcal{L} < 0$

ここで

$$e := -\deg \mathcal{E}$$

とおく。これは正規化された局所自由層の取り方によらず、線織面  $X \xrightarrow{\pi} C$  のみによって定まる定数である。

このとき

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

は完全列で、

$$\deg \mathcal{L} = \deg \mathcal{E} = -e$$

となっている。

一方、次が成り立つことに注意しよう。

**補題 2.3** invertible sheaf  $\mathcal{L}$  を与えたとき、上のような完全列をもたらす階数 2 の局所自由層  $\mathcal{E}$  は

$$H^1(C, \check{\mathcal{L}})/C^\times$$

の元と 1 対 1 に対応する。

$X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$  のとき、 $X \xrightarrow{\pi} C$  の断面と、完全列

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow 0$$

で  $\mathcal{L}_0$  が可逆層であるものが 1 対 1 に対応する。 $\mathcal{E}$  が正規化されているとき、定義 2.2 の条件 2) で保証されている  $\Gamma(C, \mathcal{E})$  の元が完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

を定めるが、この右側の全射に対応する  $X \xrightarrow{\pi} C$  の断面 (の像) を正規化断面という。これを  $C_0$  と書こう。また  $X \xrightarrow{\pi} C$  のファイバー  $f$  を 1 つ取る。 $C_0$  および  $f$  は  $X$  上の因子であるが、それらが定める  $X$  上の正則直線束  $\in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ 、更にはその第 1 Chern 類  $\in H^2(X, \mathbf{Z})$  をも  $C_0, f$  と書くことにする。完全列

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

に伴う長完全列

$$\rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow$$

において

$$H^2(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}C_0 \oplus \mathbf{Z}f \simeq \mathbf{Z}^2 \quad H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$$

である。 $C_0, f$  は次の交点数をもつ。

$$C_0^2 = -e, \quad C_0 \cdot f = 1, \quad f^2 = 0$$

$X$  上の既約曲線  $C_1$  は上の完全列により、 $a, b \in \mathbf{Z}$  によって

$$C_1 \equiv aC_0 + bf$$

となるが、この  $a, b$  について次が成り立つ。(ここで「 $\equiv$ 」は  $X$  上の因子の numerical equivalence をあらわす。)

**命題 2.4**  $C_0$  と  $X \xrightarrow{\pi} C$  のファイバーとも異なる  $X$  上の既約曲線  $C_1 \equiv aC_0 + bf$  について、

1.  $e \geq 0$  のとき

$$a \geq 1 \quad \text{かつ} \quad b \geq ea$$

2.  $e < 0$  のとき

•  $C_1$  が  $X \xrightarrow{\pi} C$  の断面のとき

$$a = 1 \quad \text{かつ} \quad b \geq 0$$

•  $C_1$  が  $X \xrightarrow{\pi} C$  の断面でないとき

$$a \geq 2 \quad \text{かつ} \quad b \geq \frac{1}{2}ea$$

### 3 Camacho-Sad の定理

葉層構造によって不変に保たれる非特異既約曲線の自己交点数に関して次の Camacho-Sad の結果がある。(cf. [Ca-S])

**定理 3.1 (Camacho-Sad)** 複素解析曲面  $S$ 、 $S$  上の 1 次元葉層構造  $\mathcal{F}$  および  $S$  上のコンパクト非特異既約曲線  $C_1$  について、 $C_1$  が  $\mathcal{F}$  によって不変に保たれるならば次が成り立つ。

$$\sum_{p \in C_1} i_p(\mathcal{F}, C_1) = C_1^2$$

ここで  $i_p(\mathcal{F}, C_1)$  は次で与えられる。

点  $p$  の座標近傍  $(U; (u, v))$  を  $p = (0, 0)$  かつ

$$C_1 \cap U = \{(u, v) \in U \mid v = 0\}$$

$$\mathcal{F}|_U = \mathcal{O}_U(A(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + B(u, v) \frac{\partial}{\partial v})$$

となるようにとったとき、

$$i_p(\mathcal{F}, C_1) = \text{Res}_{u=0} \left( \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{B(u, v)}{A(u, v)} \right) \right)_{v=0} du$$

特に葉層構造  $\mathcal{F}$  が点  $p$  で非特異ならば

$$i_p(\mathcal{F}, C_1) = 0$$

である。

### 4 分類定理

以上のことを踏まえて問題 1.2 を考察しよう。まず葉層構造  $\mathcal{F}$  が既約曲線  $C_1 \equiv aC_0 + bf$  を不変に保ち  $C_1$  上に特異点を持たなければ、曲線  $C_1$  も非特異であることに注意しよう。よって Camacho-Sad の定理より

$$C_1^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad -a^2e + 2ab = 0$$

となるが、曲線  $C_1$  は  $X \xrightarrow{\pi} C$  のファイバーではないので命題 2.4 より  $a > 0$  となり、再び命題 2.4 より次の分類定理が得られる。(cf. [Sa1] pp.622-623 Main Theorem 2.1.)

**定理 4.1 (分類定理 (その 1))** 線織面  $X \xrightarrow{\pi} C$  上の葉層構造  $\mathcal{F}$  がファイバーでない既約曲線  $C_1 \equiv aC_0 + bf$  を不変に保つならば次のいずれかが成り立つ。

イ)  $e = 0$  かつ  $b = 0$  (  $\mathcal{E}$  は可逆層の直和 )

ロ)  $e = 0$  かつ  $b = 0$  (  $\mathcal{E}$  は可逆層の直和でない )

ハ)  $e < 0$  かつ  $b = \frac{1}{2}ea \in \mathbf{Z}$  ( この場合は  $\mathcal{E}$  は可逆層の直和でない )

ここに挙げた 3 つのすべてについて実例がある。

以下イ) とロ) の場合について例を構成しよう。(ハ) の例は cf. [Su] pp.310-311)

## 5 イ) の場合

正規化された局所自由層は

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L} \quad \text{deg} \mathcal{L} = 0$$

の形である。\$C\$ の座標被覆 \$\{(U\_\alpha; z\_\alpha)\}\$ を \$\check{\mathcal{L}}\$ が flat な cocycle

$$(L_{\alpha\beta}) \in Z^1(\{U_\alpha\}, \mathbb{C}^\times)$$

によってあらわされるようにとる。

このとき \$\pi^{-1}(U\_\alpha) \simeq U\_\alpha \times \mathbb{P}^1\$ であるが、その非斉次ファイバー座標を \$\zeta\_\alpha\$ とすると

$$\zeta_\alpha = L_{\alpha\beta} \zeta_\beta \quad \text{on } \pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta)$$

が成り立ち、各 \$\pi^{-1}(U\_\alpha)\$ 上 \$\zeta\_\alpha = 0\$ および \$\zeta\_\alpha = \infty\$ によって定義された曲線はそれぞれうまくつながって \$X\$ 上の曲線 \$D\_0\$ および \$D\_\infty\$ を定義する。

この \$D\_0\$ が上で述べた正規化された断面 \$C\_0\$ である。また \$\check{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{E}\$ も正規化された局所自由層で、このときは \$D\_0\$ と \$D\_\infty\$ が入れ替わる。

次の補題は重要である。

**補題 5.1** \$\text{deg} \mathcal{L} = 0\$ かつ \$\mathcal{L}^{\otimes n} \neq \mathcal{O}\_C\$ for \$n \neq 0\$ とする。このとき既約曲線 \$C\_1\$ について

$$C_1 \equiv mC_0 \quad \implies \quad C_1 \equiv C_0$$

より強く \$C\_1 = D\_0\$ または \$C\_1 = D\_\infty\$ であり、特に \$D\_0\$ と \$D\_\infty\$ 以外に正規化された断面となりうる曲線はない。

以下可逆層 \$\mathcal{L}\$ はこの補題の仮定を満たすとする。

分類定理 4.1 によれば問題 1.2 においてイ) の場合、葉層構造によって不変に保たれる既約曲線 \$C\_1\$ は \$C\_1 \equiv aC\_0\$ を満たすから、上の補題により以下 \$C\_1 = C\_0 (= D\_0)\$ としてよい。

更に曲線 \$C\$ は種数 1 であるとする。(種数が 2 以上の場合については [Sa2] を参照されたい。)

この場合は曲線 \$C\$ の座標被覆 \$\{(U\_\alpha; z\_\alpha)\}\$ を

$$dz_\alpha = dz_\beta \quad \text{on } U_\alpha \cap U_\beta$$

となるようにとれる。

このことと \$L\_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}^\times\$ であることにより \$\pi^{-1}(U\_\alpha)\$ 上のベクトル場 \$\frac{\partial}{\partial z\_\alpha}\$ および \$\zeta\_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta\_\alpha}\$ はそれぞれうまくつながって global な正則ベクトル場 \$\theta, \eta \in \Gamma(X, \Theta\_X)\$ で

$$\theta|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \quad \eta|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \zeta_\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha}$$

なるものを定める。

ここで定数 \$c \in \mathbb{C}\$ を固定すれば \$\theta + c\eta \in \Gamma(X, \Theta\_X)\$ で

$$\mathcal{F}_c := \mathcal{O}_X(\theta + c\eta) \subset \Theta_X$$

は \$C\_1 = C\_0\$ を不変に保つ葉層構造である。実は次が成り立つ。([Sa2] pp.296-297 Main Theorem 2.1.)

定理 5.2 (分類定理 (その2)) 曲線  $C$  の種数が 1 で  $\deg \mathcal{L} = 0$ 、 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}$  かつ  $\mathcal{L}^{\otimes n} \neq \mathcal{O}_C$  for  $n \neq 0$  ならば問題 1.2 の葉層構造  $\mathcal{F}$  は上に構成した  $\mathcal{F}_c$  に限られる。

## 6 口) の場合

ここでも曲線  $C$  の種数が 1 の場合を取り上げる。局所自由層  $\mathcal{E}$  は  $\deg \mathcal{L} = 0$  なる可逆層  $\mathcal{L}$  による自明でない extension

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

によって得られるが、 $C$  の種数が 1 であるから

$$\mathbf{H}^1(C, \mathcal{L}) \begin{cases} \simeq \mathbf{C} & \text{if } \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であり、補題 2.3 により  $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C$  となる。局所自由層  $\mathcal{E}$  は自明でない extension

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

によって得られるが、再び補題 2.3 によってこのような局所自由層は一意的であり、それは以下のように構成される。

楕円曲線  $C$  を  $\text{Im}(\frac{\omega_2}{\omega_1}) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$  なる  $2\omega_1, 2\omega_2$  が生成する lattice による商空間

$$C = \mathbf{C} / (\mathbf{Z}2\omega_1 + \mathbf{Z}2\omega_2)$$

とし、 $z \in \mathbf{C}$  の同値類を  $[z] \in C$  とかく。また

$$\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$$

とかこう。  $0 \in \mathbf{C}$  を中心とする充分小さい開円板  $V$  を

$$\begin{aligned} V &\subset C \\ x &\mapsto [x + \omega_3] \end{aligned}$$

により  $C$  の開集合と同一視し、

$$U := C \setminus [\omega_3]$$

として  $C$  の開被覆  $C = U \cup V$  を考える。

ここで  $(2\omega_1, 2\omega_2)$  を周期とする Weierstrass の  $\wp$ -関数  $\wp$  を用いて

$$E_{VU} := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\wp'(z)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

によって行列値関数  $E_{VU} \in \Gamma(U \cap V, \mathcal{GL}(2; \mathcal{O}_C))$  を定義し、 $C$  の開被覆  $\{U, V\}$  に関して  $U \times \mathbf{C}^2$  と  $V \times \mathbf{C}^2$  とを双方の  $(U \cap V) \times \mathbf{C}^2$  を

$$(U \times \mathbf{C}^2) \quad \text{と} \quad (V \times \mathbf{C}^2) \\ ([z]; \lambda_U, \mu_U) \quad \text{と} \quad (x; \lambda_V, \mu_V)$$

を

$$\begin{pmatrix} \lambda_V \\ \mu_V \end{pmatrix} = E_{VU} \begin{pmatrix} \lambda_U \\ \mu_U \end{pmatrix}$$

によって同一視して得られる  $C$  上の正則ベクトル束を  $E \xrightarrow{\pi} C$  とする。ここで

$$\zeta_U = \frac{\lambda_U}{\mu_U}, \quad \zeta_V = \frac{\lambda_V}{\mu_V}$$

として  $U \times \mathbf{P}^1$  と  $V \times \mathbf{P}^1$  とを双方の  $(U \cap V) \times \mathbf{P}^1$  を

$$\begin{array}{c} U \times \mathbf{P}^1 \\ ([z]; \zeta_U) \end{array} \text{ と } \begin{array}{c} V \times \mathbf{P}^1 \\ (x; \zeta_V) \end{array}$$

を

$$\begin{cases} [x + \omega_3] = [z] \\ \zeta_V = \zeta_U + \frac{1}{\wp'(z)} \end{cases}$$

によって張り合わせて  $C$  上の線織面  $X = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} C$  を得る。  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_C(E)$  である。

ここで  $\rho_U = \zeta_U^{-1}$ ,  $\rho_V = \zeta_V^{-1}$  とおくと  $\pi^{-1}(U)$  上  $\rho_U = 0$  によって定義された曲線と  $\pi^{-1}(V)$  上  $\rho_V = 0$  によって定義された曲線はうまくつながって  $X$  上の曲線を定義する。これが正規化断面  $C_0$  である。従って  $C_0^2 = 0 (= -e)$  であるが更に次が成り立つ。

**補題 6.1**  $X$  上の既約曲線  $C_1$  について

$$C_1 \equiv nC_0 \implies C_1 = C_0$$

特に正規化断面となりうる曲線は  $C_0$  に限る。

分類定理 4.1 により (ロ) の場合に問題 1.2 において葉層構造によって不変に保たれる既約曲線  $C_1$  は  $C_1 \equiv aC_0$  を満たすから、これにより

$$C_1 = C_0$$

である。

ここで

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) \text{ 上 } \rho_U^2 \frac{\partial}{\partial \rho_U} &= -\frac{\partial}{\partial \zeta_U} \\ \pi^{-1}(V) \text{ 上 } \rho_V^2 \frac{\partial}{\partial \rho_V} &= -\frac{\partial}{\partial \zeta_V} \end{aligned}$$

$\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$  上

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)^2} \rho_U^2 \frac{\partial}{\partial \rho_U} \\ \rho_V^2 \frac{\partial}{\partial \rho_V} &= \rho_U^2 \frac{\partial}{\partial \rho_U} \end{aligned}$$

であるから  $X$  上の正則ベクトル場  $\sigma \in \Gamma(X, \Theta_X)$ ,  $\theta \in \Gamma(X, \Theta_X)$  で

$$\begin{aligned}\sigma|_{\pi^{-1}(U)} &= \frac{\partial}{\partial \rho_U} \\ \sigma|_{\pi^{-1}(V)} &= \frac{\partial}{\partial \rho_V}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\theta|_{\pi^{-1}(U)} &= \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\wp(z - \omega_3)}{\wp''(\omega_3)} \rho_U^2 \frac{\partial}{\partial \rho_U} \\ \theta|_{\pi^{-1}(V)} &= \frac{\partial}{\partial x} - \left( \frac{\wp(x)}{\wp''(\omega_3)} - \frac{\wp''(x + \omega_3)}{\wp'(x + \omega_3)^2} \right) \rho_V^2 \frac{\partial}{\partial \rho_V}\end{aligned}$$

となるものが定まる。

実際  $\wp$  は偶関数

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

であるから  $\wp$  の周期性から得られる

$$\wp(x + \omega_3) = \wp(\omega_3 - x)$$

および

$$\wp'(\omega_3) = 0, \quad \wp''(\omega_3) \neq 0$$

等に注意すれば

$$\frac{\wp(x)}{\wp''(\omega_3)} - \frac{\wp''(x + \omega_3)}{\wp'(x + \omega_3)^2}$$

は 0 で正則で  $\theta \in \Gamma(X, \Theta_X)$  である。ここで定数  $k \in \mathbb{C}$  をとり固定し

$$\mathcal{F}_k := \mathcal{O}_X(\theta + k\sigma)$$

とすれば  $\mathcal{F}_k$  は曲線  $C_1 = C_0$  を不変に保つ葉層構造である。

実は次が成り立つ。 ([Sa3] Main Theorem 1.0.)

**定理 6.2 (分類定理 (その 3))** 問題 1.2 の口) で曲線  $C$  の種数が 1 の場合、条件を満たす葉層構造  $\mathcal{F}$  は上に構成した  $\mathcal{F}_k$  に限られる。

## 参 考 文 献

- [Ca-S] Camacho, C. and Sad, P.: Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Annals of Math.*, **115**, 579-595 (1982).



- [GM] Gómez-Mont, X.: Holomorphic foliations in ruled surfaces. *Trans. of the American Math. Soc.* **312**, 179-201(1989).
- [Ha] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*. G.T.M. **52**, Springer-Verlag (1977).
- [Sa1] Saeki, A.: Some foliations on ruled surfaces. *Math. Sci. Univ. Tokyo.* **1**, 617-629 (1994).
- [Sa2] ———: Some foliations on ruled surfaces II. *Math. Sci. Univ. Tokyo.* **2**, 291-301 (1995).
- [Sa3] ———: On some foliations on ruled surfaces of genus one. to appear in *Kumamoto J. of Math.* **9**, (1996).
- [Su] Suwa, T.: On ruled surfaces of genus 1. *J. of the Math. Soc. of Japan*, **21**, 291-311 (1969).

**Present address.**

Department of Mathematics  
Nagoya Institute of Technology  
Gokiso-cho  
Shouwa-ku, Nagoya  
466 Japan

**e-mail address.**

saeki@ks.kyy.nitech.ac.jp