数理解析研究所講究録
953巻 1996年 93-99

Lusternik-Schnirelmann type invariants for Menger manifolds

筑波大学数学系　川村一宏 (Kazuhiro Kawamura)

位相空間 X の Lusternik-Schnirelmann category $\mathrm{cat}(X)$ は次の様に定義される。

(a) $\mathrm{cat}(X) = \min \left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{l} k \text{ 個の元から成る開被覆 } \mathcal{U} \text{ で、任意} \\ \text{の } U \in \mathcal{U} \text{ は } X \text{ の中で可縮であるものが} \\ \text{存在する} \end{array} \right\}$.

(もし上の様な $\mathcal{U}$ が存在しなければ $\mathrm{cat}(X) = \infty$ とする).

X が多面体なら上の定義に於ける $\mathcal{U}$ は X の部分多面体から成る被覆で置き換えて良い。定義から明らかな様に cat はホモトピー不変量である。

この概念は Lusternik と Schnirelmann により多様体上の C^∞ 関数の臨界点の個数を下から評価する為に導入された ([LS]) が、その後初期の目的とは独立な研究対象となっている。

例. (1)　X が可縮なら $\mathrm{cat}(X) = 1$.

(2)　n 次元球面 S^n に対し　$\mathrm{cat}(S^n) = 2$.

(3) 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ に対し、$\mathrm{cat}(\mathbb{R}P^n) = n+1$.

(4) 一般にコンパクト$\underbrace{\text{多面体}}_{\text{連結}}$ X に対し、$\mathrm{cat}(X) \leq \dim X + 1$

以下特に断わらない限り空間は全て連結とする。catの一つの変形として次の様な量を考えることができる。コンパクト多面体Xに対し、

(b) $\mathrm{gcat}(X) = \min\left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{l} k\text{個の、それ自身可縮な部分多面体} \\ \text{から成る}X\text{の被覆が存在する} \end{array} \right\}$.

ところが上の gcat はホモトピー不変量ではなく、実際 gcat$X$ と $\mathrm{gcat}(X \times [0,1])$ が大きく異なる様なコンパクト多面体 X の例が知られている([CM]). 従って $\mathrm{gcat}(X)$ を計算する事は $\mathrm{cat}(X)$ を計算する事に比べて一般に難しいと考えられる。

この様な状況は Hilbert cube 多様体 (以下 Q-多様体と呼ぶ. $Q = [0,1]^\omega$) の中に於いては大分異なっている。Q-多様体 M に対して、

(c) $\mathrm{gcat}_{Q\times[0,1)}(M) = \min\left\{ k \;\middle|\; \begin{array}{l} k\text{個の元から成る開被覆で、各元} \\ \text{が}Q\times[0,1)\text{と同相なものが存在する} \end{array} \right\}$

とおく. この時次が成立する。

定理 (Montejano [M]). M がコンパクト Q-多様体とすると、

$$\mathrm{cat}(M) = \mathrm{gcat}_{Q\times[0,1)}(M) - 1 .$$

定理(Wong [W]). M を Q-多様体とすると、

$$\mathrm{cat}(M) = g\mathrm{cat}_{Q\times[0,1)}(M\times[0,1)).$$

$(2n+1)$次元立方体 I^{2n+1} を自然に胞複体 K_0 と見なし、各辺を三等分して得られる 3^{2n+1} 個の立方体の集合を βK_0 とする。

$K_1=\{e\in\beta K_0 \mid e\cap K_0^{(n)}\neq\phi\}$ ($K_0^{(n)}$ は K_0 の n 骨格), $I_1=\cup K_1$ とおく。各 $e\in K_1$ の各辺を三等分して得られる立方体を全て集めた集合を βK_1 とおき、

$K_2=\{e\in\beta K_1 \mid e\cap K_1^{(n)}\neq\phi\}$, $I_2=\cup K_2$ とする。これを繰り返し、単調減少列 $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$ が得られるので、$\mu^n=\bigcap_{j=1}^{\infty}I_j$ とおき、<u>n次元universal Menger compactum</u> と呼ぶ。各点が μ^n と同相な近傍を持つ様な局所コンパクト可分距離空間を n 次元Menger多様体(以下 μ^n-多様体)と呼ぶ。

μ^n-多様体の理論(例えば [B], [ChKT] 等を参照)の、Q-多様体の理論の有限次元版としての側面は、現在では非常に良く整備されている。上述のMontejano, Wongの結果において重要な役割を果たす Q-多様体の"安定性"も、μ^n-多様体の理論に於ける対応物を持っている。従ってこれらの結果が μ^n-多様体に対してはどの様な形で成立するかを問うのは自然であろう。この問いに対して筆者の得た結果を報告する。

以下空間は全て局所コンパクト可分距離空間とする。

まず初めにQ-多様体とμ^n-多様体の理論の中で対応する概念をいくつか挙げる。

Q-多様体	μ^n-多様体
・(単純) ホモトピー	・$(n-1)$ ホモトピー
・コンパクト多面体Pに対し、$P \times Q$ はQ-多様体	・コンパクト多面体Pに対し、Pと同じ$(n-1)$ホモトピー形を持つμ^n-多様体が存在
・Q-多様体＝局所コンパクトANR＋DD^nP $(\forall n \geq 1)$	・μ^n-多様体＝局所コンパクトn次元LC^{n-1}距離空間＋DD^nP
・Q＝可縮なQ-多様体	・μ^n＝$(n-1)$連結なμ^n-多様体
・$Q \times [0,1)$	・$\mu^n \setminus \{\text{a point}\}$
・$M \times [0,1)$	・$\mathrm{Ker}_{n-1}(M)$

上の表に現われたいくつかの概念を定義しておく。

定義．$f, g : X \to Y$ が<u>k-ホモトピック</u>であるとは、任意のk次元以下の空間Kと任意の$\alpha : K \to X$に対し、$f \circ \alpha \simeq g \circ \alpha$であることである。k-ホモトピー同値等が自然に定義される。

定義．空間Xが<u>DD^nPを持つ</u>とは、任意の$\alpha, \beta : [0,1]^n \to X$と任意の$\varepsilon > 0$に対して、$\alpha', \beta' : [0,1]^n \to X$が

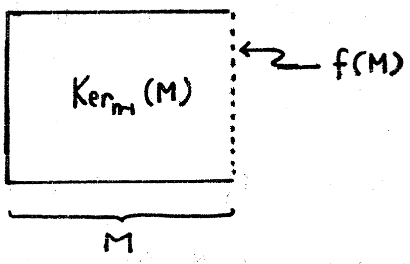
$d(\alpha, \alpha') < \varepsilon$, $d(\beta, \beta') < \varepsilon$, $\alpha'([0,1]^n) \cap \beta'([0,1]^n) = \phi$

を満たす様に取れることである。

定義. Mをμ^n-多様体, $f: M \to M$ をMのそれ自身への埋め込みで次を満すものとする: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha: M \to M$ s.t. $d(\alpha, \mathrm{id}_M) < \varepsilon$ かつ

$$\alpha(M) \cap f(M) = \emptyset.$$

この時、$M \setminus f(M)$ (同相を除いて) fの取り方に依存せず、これを(n-1)ホモトピー核と呼ぶ ($\mathrm{Ker}_{n-1}(M)$ で表わす)。([Ch]).



(概念的な図)

上の対応表から見て、(a)に対応するμ^n多様体における適切な category notion は次のものであろう([F]参照).

(d) $\mathrm{cat}_{n-1}(X) = \min\{ k \mid$ k個の元から成る開被覆$\mathcal{U}$で任意の$U \in \mathcal{U}$に対して$U \hookrightarrow X$が定値写像と(n-1)ホモトピックであるものが存在する$\}$.

また(c)に対応するものとして、μ^n多様体Mに対し$\mathrm{gcat}_{\mu^n\text{-}*}(M)$を次の様に定義する。

(e) $\mathrm{gcat}_{\mu^n\text{-}*}(M) = \min\{ k \mid$ k個の元から成る開被覆で、各元がμ^n-例と同相なものが存在する$\}$.

これらについて次が成立する.

定理. Mをコンパクトμ^n-多様体とする。この時

$$\mathrm{cat}_{n-1}(M) = \mathrm{gcat}_{\mu^n-\{*\}}(M) - 1$$
$$= \mathrm{gcat}_{\mu^n-\{*\}}(\mathrm{Ker}_{n-1}(M)).$$

系. Mをコンパクトμ^n-多様体とし、$M=U\cup V$, U, VはMの開集合で$\mu^n-\{*\}$と同相、と仮定する。この時Mはμ^nと同相である。

注) 上の系は位相多様体における次の結果の類似である。
「Mを位相多様体, $M=U\cup V$, U, VはMの開集合で$\mathbb{R}^n$と同相、と仮定する。Mがコンパクトなら MはS^nと同相である。」
この定理がそうである様に、上の系をBrownの"Monotone union theorem"の類似物から証明することも可能である。

参考文献

[B] M. Bestvina, Characterizing k-dimensional universal Menger compacta, Mem. Amer. Math. Soc. 71 (1988), #380.

[CM] M. Clapp - L. Montejano, Lusternik-Schnirelmann category and minimal covering with contractible sets, Manuscripta Math. 58 (1987), 603-620.

[Ch] A. Chigogidze, Classification of Menger manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 825-832.

[ChKT] A. Chigogidze, K. Kawamura and E. D. Tymchatyn, Menger manifolds, in Continua with Houston Problem Book, Marcel Dekker (1995), 27-88.

[F] R.H. Fox, On Lusternik-Schnirelmann category, Ann. of Math. 42 (1941), 333-370.

[M] L. Montejano, Lusternik-Schnirelmann category and Hilbert cube manifolds, Top. Appl. 27 (1987), 29-35.

[W] R. Wong, A Hilbert cube LS category, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 720-722.

[LS] L. Lusternik-L. Schnirelmann, Méthodes topologiques dans les problemes variationnels Herman et Cie, Paris (1934).