数理解析研究所講究録
953巻 1996年 30-33

線型同型な関数空間について

足利工業大学　共通課程

森下和彦 (Kazuhiko Morishita)

本稿では、空間は全て Tychonoff とする。記号 $C_p(X)$ で, 空間 X 上の実数値連続関数全体からなる集合に pointwise convergent topology を導入した空間をあらわすこととする。このとき $C_p(X)$ は局所凸線型位相空間となる。また 2 つの線型位相空間 E と F に対し, 記号 $E \sim F$ で E と F が線型位相空間として同型であることをあらわすことにする。更に compactum とは compact 距離空間を意味することとし, 記号 D^n によって n-disk, 記号 $\mathbb{N}$ によって自然数全体をあらわすことにする。

(定義)　2 つの空間 X と Y に対し,

$$X \sim_l Y \Longleftrightarrow C_p(X) \sim C_p(Y)$$

と定義し, このとき空間 X と Y は *l-equivalent* であると云う。

1980 年に Pavrovskiĭ は l-equivalence と次元との関係について次の定理を発表した。

定理 1. ([3])　X, Y ; separable complete metrizable, $X \sim_l Y$,
$\Longrightarrow \dim X = \dim Y$

Miljutin の結果より, compact-open topology を持つ関数空間について

$$C_k(\{0,1\}^\omega) \sim C_k([0,1])$$

(但し, $\{0,1\}^\omega$ は Cantor set, $[0,1]$ は単位閉区間をあらわす)

であることが判るので, 定理 1 は興味深く思われる。なおこの定理は, 後に Pestov [4] により一般の Tychonoff 空間にまで拡張された。

定理 1 を示す上で本質的であるのが次の補題である。

補題 2. (**[3]**)　Y ; 任意の閉集合が Baire となる空間, $X \sim_l Y$
$\Longrightarrow \forall A \subset X$ s.t. A ; Baire, $\exists$ 開集合 U of Y s.t. $U \hookrightarrow Y$
(但し, Baire のカテゴリー定理が成立する空間を Baire であると云う)

更に Pavlovskiĭ は定理 1 に関連して,

$\exists$ compact metric space X s.t. $\dim X = 2$, $X \not\sim_l \mathrm{D}^2$ (2-disk)

を注意した。実際, X として Pontryagin の連続体を考えたとき, もし $X \sim_l \mathrm{D}^2$ であれば補題 2 より D^2 の開集合が X に埋め込まれることになり, $\dim X^2 = 3$ に矛盾する。この事実から, 次の様な問題を考えることが出来る。

(問題)

(1) どの様な空間 X に対して, $X \sim_l \mathrm{D}^n$ となるか？

(2) 他の標準的な空間に対して, その空間と l-equivalent になる空間はどの様な空間であるか？

問題 1 に対して, Pavrovskiĭ 自身が 1 つの解答を示している。

Pavrovskiĭ, 1980 [3]
X ; finite polyhedron, $\dim X = n \geq 1 \Longrightarrow X \sim_l \mathrm{D}^n$

更に Arhangel'skiĭはこれを拡張して次の結果を得た。

Arhangel'skiĭ, 1989 [1]
X ; compact CW complex, $\dim X = n \geq 1 \Longrightarrow X \sim_l \mathrm{D}^n$

一方, 他の種類の空間について,

Kawamura & Morishita [2]

X ; compact topological manifold, $\dim X = n \geq 1 \Longrightarrow X \sim_l \mathrm{D}^n$

なる結果が得られている。

また問題 2 に対して, 次の結果が Valov により示されている。

$X \sim_l [0,1]^\omega \Longleftrightarrow X$; compactum, $[0,1]^\omega \hookrightarrow X$

$X \sim_l \mu^n \Longleftrightarrow X$; compactum, $\dim X = n$, $\mu^n \hookrightarrow X$

但し, $\mu^n = n$-dimensional universal Menger compactum

この Vaolv による結果を示す上で, 必要性は l-equivalence により compactum であることが保たれることと, 補題 2 により $[0,1]^\omega$ または μ^n の open subset が X に埋め込まれることを用い, 十分性は $[0,1]^\omega$ または μ^n の univarsality から

$[0,1]^\omega \hookrightarrow X \hookrightarrow [0,1]^\omega$ または $\mu^n \hookrightarrow X \hookrightarrow \mu^n$

であることを用いる。ここで問題 1 との関連について云えば, これらの論法を D^n に対して適用することは出来ない。実際,

$X \sim_l \mathrm{D}^n \Longrightarrow X$; compactum, $\mathrm{D}^n \hookrightarrow X$

は成立する。しかし μ^1 は後半の条件を全て充たすが, Valov の結果より $\mu^1 \not\sim_l \mathrm{D}^1$ となるので逆は成立しない。

今回得られたのは問題 1 に対する 1 つの解答である。

（定義）　compactum X に対し,

$$E(X) = \overline{\{x \in X \mid \mathrm{ind}_x X = n\}}$$

定理 3. Tychonoff 空間 X と $n \in \mathbb{N}$ に対して以下は同値

(1) $X \sim_l \mathrm{D}^n$

(2) X は n-dimensional compactum で次の 3 条件を充たす

(i) X は S-stable

(ii) $E(X)$ の non empty open subset U が存在して,

$\forall A \subset U$ s.t. $\dim A = n$, $\mathrm{Int}_{E(X)} A \neq \emptyset$ & $\mathrm{D}^n \hookrightarrow A$

(iii) $\forall$ open subset V of $E(X)$, $\exists\, Y \subset V$ s.t. $Y \sim_l X$

ここで 空間 X が S-stable であるとは, X が $X \sim_l X \times (\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\})$ を充たすことである。この定理から次の系を得る。

系 **4.** $X \sim_l \mathrm{D}^n \Longrightarrow E(X) \sim_l X$

参考文献

[1] A. V. Arhangel'skiĭ, *On linear topological classification of spaces of continuous functions in the topology of pointwise convergence*, Math. Sbornik 70 (1991), pp. 129-142.

[2] K. Kawamura and K. Morishita, *Linear topological classification of certain function spaces on manifolds and CW complexes*, Top. Appl. 69, No. 3 (1996), pp. 265-282.

[3] D. S. Pavlovskiĭ, *On spaces of continuous functions*, Soviet Math. Dokl. 22 (1980), pp. 34-37.

[4] V. G. Pestov, *The coincidence of the dimensions* dim *of l-equivalent topological spaces*, Soviet Math. Dokl. 26 (1982), pp. 380-383.

[5] V. M. Valov, *Linear topological classifications of certain function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 327 (1991), pp. 583-600.