数理解析研究所講究録
957巻 1996年 92-108

量子化された場と粒子のある相互作用にあらわれる Diamagnetic 不等式

広島文生 北海道大学理学部

1 はじめに

この報告の目的は量子電磁力学のひとつのモデルである Pauli-Fierz モデル ([6,7,8,9,10,11,12,13,14]) に対して diamagnetic 不等式を導くことである. Pauli-Fierz モデル は量子化された輻射場と非相対論的荷電粒子のある相互作用を記述しているモデルである. これは *Dirac* 方程式では説明できなかった「Lamb のずれ」を説明することのできるモデルとして脚光をあびた ([15]). この量子化された輻射場が無限個の調和振動子の集まりとみなせることを考慮すれば, Pauli-Fierz モデルは一種の無限自由度をそなえたモデルとみなすことができる.

有限自由度の古典的な物理モデルに対して, この diamagnetic 不等式はよく知られており, 有限自由度物理系のハミルトニアンの基底状態の評価などに応用されている. 一方, 数学的には「加藤の不等式 ([1,2,3])」と深く関係していることが知られている. そこでは diamagnetic 不等式が強連続な熱半群の評価であるのに対し, 加藤の不等式はその生成子に対する評価といえる.

今回の報告では Pauli-Fierz モデルを材料にして無限自由度系での diamagnetic 不等式を導き, そこから「無限自由度版加藤の不等式」を導出することを主目的とする. ここで少し注意しておくが, diamagnetic 不等式が強連続熱半群の評価であることを考えれば, その方法論として, 一つは「汎関数積分表示」による方法, もう一つは Trotter 積公式 ([17]) による「作用素論的方法」が即座に考えられる. 実際, 古典論の場合にはその両方の方法論

から diamagnetic 不等式が導出されている（[2,3]）．しかし, 今回報告する Pauli-Fierz モデルについては, 汎関数積分表示される強連続熱半群の生成子と Trotter 積公式を応用するそれの生成子が定義域も込めて作用素として本当に一致するかは判っていない．それは, 古典的なモデルと違い Pauli-Fierz モデルのハミルトニアンが本質的自己共役作用素となるような具体的な定義域を決定できないところにある．今回は上述のうち作用素論的な解析によって diamagnetic 不等式を導く．汎関数積分表示については [10] で扱われた．

尚, スカラー場と粒子の相互作用モデルのひとつである「Nelson モデル」にも diamagnetic 不等式の議論がある．詳しくは, [11] を参照されたし．

はじめに Diamagnetic 不等式と加藤の不等式の関係についていままで知られていることを述べておく．加藤の不等式とは次のようなものであった:

定理 1.1 (加藤の不等式 [1]) $u \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$ かつその超関数の意味でのラプラシアンが$\Delta u \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$ のとき, $|u|$ の超関数の意味でのラプラシアン$\Delta|u|$ は次の不等式に従う:

$$\Delta|u| \geq \Re[(\mathrm{sgn}u)\Delta u].$$

加藤の不等式の外場がある Schrödinger 作用素への応用として次の不等式が知られている:

定理 1.2 ([1,Theorem X.33]) $A_k \in C^1(\mathbb{R}^d), k = 1, ..., d$ を実数値関数とする．D_k を超関数 $\mathcal{D}'$ 上の作用素

$$D_k T = -i\frac{\partial T}{\partial x_k} - A_k T$$

とする．さらに $D^2 = \sum_{k=1}^d D_k^2$ とおく．$u \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$ に対して $D^2 u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ となるとき, 次が従う:

$$\Delta|u| \geq \Re[(\mathrm{sgn}u)D^2 u].$$

これらの超関数の意味での不等式を L^2 の意味でとらえたのが「抽象化された加藤の不等式」及び「一般化された加藤の不等式」といわれるものである．

定義 1.3 (抽象化された加藤の不等式 [2]) ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の非負自己共役作用素 $\mathbf{H}$ が抽象化された加藤の不等式 に従うとは（１）$f \in D(\mathbf{H})$ ならば $|f| \in D(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}})$,
（２）$f \in D(\mathbf{H})$, $g \in D(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}})$, $g \geq 0$ に対して

$$\left(\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}g, \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}|f|\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \Re\left((\mathrm{sgn} f)g, \mathbf{H}f\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

この不等式は $\mathbf{H}$ のつくる熱半群の「正値性保存」と同値であることが [2] で示された;

定理 1.4 ([2]) $e^{-t\mathbf{H}}$ が正値性保存作用素 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{H}$ が抽象化された加藤の不等式をみたす.

抽象化された加藤の不等式はさらに次のように一般化された;

定義 1.5 (一般化された加藤の不等式 [3]) ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の非負自己共役作用素 $\mathbf{H}$ と $\mathbf{K}$ が一般化された加藤の不等式 に従うとは（１）$f \in D(\mathbf{H})$ ならば $|f| \in D(\mathbf{K}^{\frac{1}{2}})$ （２）$f \in D(\mathbf{H})$, $g \in D(\mathbf{K}^{\frac{1}{2}})$, $g \geq 0$ に対して

$$\left(\mathbf{K}^{\frac{1}{2}}g, \mathbf{K}^{\frac{1}{2}}|f|\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \Re\left((\mathrm{sgn} f)g, \mathbf{H}f\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

この一般化された加藤の不等式は,「Diamagnetic 不等式」と同値であることが [2] で予想され [3] で解かれた. ここで, Diamagnetic 不等式とは

定義 1.6 (Diamagnetic 不等式 [4]) ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の非負自己共役作用素 $\mathbf{H}$ と $\mathbf{K}$ が *Diamagnetic* 不等式に従うとは

$$\left|\left(f, e^{-t\mathbf{H}}g\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right| \leq \left(|f|, e^{-t\mathbf{K}}|g|\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d), t \geq 0.$$

定理 1.7 ([3]) $\mathbf{H}$ と $\mathbf{K}$ が *Diamagnetic* 不等式に従う $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{H}$ と $\mathbf{K}$ が一般化された加藤の不等式に従う.

この一般化された加藤の不等式は [3] においてより一般的な L^2 空間へ拡張されて,「ラプラシアンと Yang-Mills 型の作用素 ([3])」に対しても一般化された加藤の不等式が示された. また, 場を量子化したような無限自由度がかかわるモデルについての加藤の不等式の具体的な例が知られている ([5]).

Pauli-Fierz モデルのハミルトニアンは数学的には $\mathcal{M} = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{W})$ 上の作用素として形式的に次のように定義される:

$$\mathbf{H}_\rho^P = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{d}(-iD_\mu \otimes I - A_\mu(\rho))^2 + I \otimes \mathbf{H}_0^P,$$

ここで $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ は $\mathcal{W} = \underbrace{L^2(\mathbb{R}^d) \oplus ... \oplus L^2(\mathbb{R}^d)}_{d-1}$ 上のボゾンフォック空間, $\mathbf{H}_0^P$ は $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ 上の自由ハミルトニアン, そして $A_\mu(\rho)$ は「時刻 0 の輻射場」と呼ばれる作用素の μ 成分である. 始めに述べたように, このモデルの数学的な解析を困難にしているのは古典的なモデルと違い一般には具体的な「芯」つまりハミルトニアンが本質的自己共役になるような具体的な定義域を決定できないところにある. 外場をもたない自由な Schrödinger 粒子は次の Schrödinger 方程式にしたがって時間発展する;

$$i\frac{\partial}{\partial t}u = -\frac{1}{2}\Delta u.$$

このとき $-\frac{1}{2}\Delta$ は自由ハミルトニアンとよばれ, 初期条件 u_0 の状態ベクトルに対して, 時刻 t の状態ベクトル u_t は次であたえられる;

$$u_t = \exp\left(-it(-\frac{1}{2}\Delta)\right)u_0.$$

ここで $-\Delta$ が $L^2(\mathbb{R}^d)$ で自己共役作用素なので, この表記は意味をもつ. さらに $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が $-\Delta$ の芯になっているので $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で $-\Delta$ を定義しておけば自己共役作用素としての拡張は一意的なので, 状態ベクトルの時間発展の一意性もそこから従う. この意味で物理系のハミルトニアンの本質的自己共役性は重要な概念である. そのため, 具体的な芯が分からないようなハミルトニアンに対しては状態ベクトルの時間発展やハミルトニアンの熱半群を議論するときにはどのような自己共役拡張を考察しているかを明確にしなければならない. 今回の報告では $(-iD_\mu \otimes I - A_\mu(\rho))^2$ の自己共役性を μ ごとに明らかにし, 自己共役なハミルトニアンを次のような 2 次形式和で定義した;

$$\mathbf{H}_\rho^P = \frac{1}{2}(-iD_1 \otimes I - A_1(\rho))^2 \dot{+} ... \dot{+} \frac{1}{2}(-iD_d \otimes I - A_d(\rho))^2 \dot{+} I \otimes \mathbf{H}_0^P$$

そして, このハミルトニアンに対して次の Diamagnetic 不等式を導いた (定理 2.4, 2.5);

$$\left|\left(F, e^{-t\left(\mathbf{H}_\rho^P+V\right)}G\right)_{\mathcal{M}}\right| \leq \left(||F||_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}, e^{-t\left(-\frac{1}{2}\Delta+V\right)}||G||_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.\ 1)$$

この不等式から対応する一般化された加藤の不等式を導くことができる.

2 PAULI-FIERZ モデル

2.1 ゲージ変換

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対して, その内積とノルムをそれぞれ $(*,\cdot)_{\mathcal{H}}$, $||\cdot||_{\mathcal{H}}$ と記すことにする. この内積は $\cdot$ について線形 $*$ について反線形とする. 作用素 A の定義域 を $D(A)$ で表す. ベクトル $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して$\hat{f}$ ($\check{f}$) はフーリエ変換（逆フーリエ変換）, $\bar{f}$ は複素共役を表すことにする. ヒルベルト空間 $\mathcal{W} = \underbrace{L^2(\mathbb{R}^d) \oplus ... \oplus L^2(\mathbb{R}^d)}_{d-1}$ 上のボゾンフォック空間 $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ を次で定義する;

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}) \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathcal{W} \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(\mathcal{W}).$$

ここで $\otimes_s^n (n \geq 1)$ は n 重対称テンソル積を表し, $\otimes_s^0 \mathcal{W} = \mathbb{C}$ とする.

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{W}) = \bigoplus_{n=0}^{N} \mathcal{F}_n(\mathcal{W}) \bigoplus_{n \geq N+1} \{0\}$$

とするとき, 粒子数有限部分空間 $\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ を次で定義する;

$$\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W}) = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{F}^N(\mathcal{W}).$$

ボゾンフォック空間 $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ のベクトル $\Omega = \{1, 0, 0, ...\}$ はフォック真空と呼ばれている. ボゾンフォック空間上の作用素である消滅作用素 と生成作用素 ([16]) をそれぞれ $a^\dagger(f)$,$a(f)$, $f \in \mathcal{W}$, と記す. ここで, $a^\sharp(f)$ ($a^\sharp$ は a 又は $a^\sharp$) は, f について線形である. よく知られているように $a^\sharp(f)$ は 粒子数有限部

分空間 $\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ を定義域に含み, かつ不変にしていて, それ上で次の正準交換関係（CCR）を満たす;

$$\begin{aligned} [a(f), a^\dagger(g)] &= (\bar{f}, g)_{\mathcal{W}}, \\ [a^\sharp(f), a^\sharp(g)] &= 0, \quad f, g \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

また, 次の共役関係を満たしている;

$$(a(f)\Phi, \Psi)_{\mathcal{F}(\mathcal{W})} = \left(\Phi, a^\dagger(\bar{f})\Psi\right)_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}, \quad \Phi, \Psi \in \mathcal{F}^\infty(\mathcal{W}), f, g \in \mathcal{W}.$$

次の事実は基本的なことである:

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}) = \{a^\dagger(f_1)....a^\dagger(f_n)\Omega, \Omega | f_j \in \mathcal{W}, j = 1, ..., n, n \geq 1\}^-.$$

ここで, $\{\ \}^-$ は $\{\ \}$ の $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ 内での閉包を表す. ボゾンフォック空間上の自由ハミルトニアンを定義するために「第 2 量子化作用素」について説明する. $\mathcal{W}$ の 任意の非負自己共役作用素 h に対して, 次のような強連続熱半群 $\{\Gamma(e^{-th})\}_{t\geq 0}$ を考える:

$$\begin{aligned} \Gamma(e^{-th})a^\dagger(f_1)...a^\dagger(f_n)\Omega &= a^\dagger(e^{-th}f_1)...a^\dagger(e^{-th}f_n)\Omega, \\ \Gamma(e^{-th})\Omega &= \Omega, f_j \in \mathcal{W}, j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

このとき Stone の定理によって次のような非負自己共役作用素 $d\Gamma(h)$ が存在する;

$$e^{-td\Gamma(h)} = \Gamma(e^{-th}).$$

この $d\Gamma(h)$ を h の第 2 量子化作用素とよぶ. かけ算作用素 $\left(\omega\hat{f}\right)(k) = |k|\hat{f}(k)$ に対して $\tilde{\omega} = \underbrace{\omega \oplus ... \oplus \omega}_{d-1}$ とおく. ボゾンフォック空間 $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ 上の自由ハミルトニアン $\mathbf{H}_0^P$ は $\tilde{\omega}$ の第 2 量子化作用素として定義される; $\mathbf{H}_0^P = d\Gamma(\tilde{\omega})$. 恒等作用素 I の第 2 量子化作用素 すなわち $\mathbf{N}_P = d\Gamma(I)$ は個数作用素といわれている. 次の評価式はよく知られている;

$$||a^\sharp(f)\Phi||_{\mathcal{F}(\mathcal{W})} \leq ||f||_{\mathcal{W}}||(\mathbf{N}_P + 1)^{\frac{1}{2}}\Phi||_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}, \quad \Phi \in D(\mathbf{N}_P^{\frac{1}{2}}), f \in \mathcal{W}. \quad (2.\ 1)$$

この不等式は $D(\mathbf{N}_P^{\frac{1}{2}})$ が $D(a^\sharp(f))$ に含まれていることも示している．次に「時刻 0 の輻射場」とよばれる $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ 上の作用素を定義する．d 次元の「編極ベクトル e^r」は, $e^r : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d (r = 1, ..., d-1)$ なるベクトル値可測関数で次を満たすものである:

$$k \cdot e^r(k) = 0, \quad e^r(k) \cdot e^s(k) = \delta_{rs}, \quad a.e.k \in \mathbb{R}^d.$$

その 第 μ 成分を $e^r_\mu (\mu = 1, ..., d)$ とかく．任意の編極ベクトルに対して次が成立する;

$$d_{\mu\nu}(k) \;\equiv\; \sum_{r=1}^{d-1} e^r_\mu(k) e^r_\nu(k) = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|k|^2}.$$

ここで関数のクラス $\mathbb{D}^d_n$ を以下のように定める;

$$\mathbb{D}^d_n = \left\{ f = (f_1, ..., f_d) \middle| \sum_{r=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} |k|^n |f_r(k)|^2 dk < \infty \right\}.$$

各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して 「時刻 0 の輻射場 $A_\mu(x, \hat{f})$」と「共役運動量 $\Pi_\mu(x, \hat{f})$」を次で定義する;

$$\begin{aligned} A_\mu(x, \hat{f}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a^\dagger \left(\oplus_{r=1}^{d-1} e^r_\mu \frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}} e^{-i \cdot x} \right) + a \left(\oplus_{r=1}^{d-1} e^r_\mu \frac{\tilde{\hat{f}}}{\sqrt{\omega}} e^{i \cdot x} \right) \right\}, \hat{f} \in \mathbb{D}^1_{-1}, \\ \Pi_\mu(x, \hat{f}) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ a^\dagger \left(\oplus_{r=1}^{d-1} e^r_\mu \hat{f} \sqrt{\omega} e^{-i \cdot x} \right) - a \left(\oplus_{r=1}^{d-1} e^r_\mu \tilde{\hat{f}} \sqrt{\omega} e^{i \cdot x} \right) \right\}, \hat{f} \in \mathbb{D}^1_1, \\ & \mu = 1, .., d. \end{aligned}$$

ここで $\tilde{g}(k) = g(-k)$. f が実数値関数のとき (2.1) と Nelson の解析的ベクトル定理により ([1, Theorem X.39]), 各 $x \in \mathbb{R}^d$ ごとに $A_\mu(x, \hat{f})$ と$\Pi_\mu(x, \hat{f})$ が $\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ 上で本質的自己共役作用素であることがわかる．そこで, その閉包も以後同様の記号で書くことにする．CCR によりつぎの交換関係が $\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ 上で成立する;

$$\begin{aligned} [A_\mu(x, \hat{f}), \Pi_\nu(x, \hat{g})] &= i(d_{\mu\nu} \tilde{\hat{f}}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \hat{f} \in \mathbb{D}^1_{-1} \cap \mathbb{D}^1_0, \hat{g} \in \mathbb{D}^1_0 \cap \mathbb{D}^1_1, \\ [A_\mu(x, \hat{f}), A_\nu(x, \hat{g})] &= 0, \hat{f}, \hat{g} \in \mathbb{D}^1_{-1}, \\ [\Pi_\mu(x, \hat{f}), \Pi_\nu(x, \hat{g})] &= 0, \hat{f}, \hat{g} \in \mathbb{D}^1_1, \quad \mu, \nu = 1, ..., d. \end{aligned} \tag{2. 2}$$

Pauli-Fierz モデルにおいて,「量子場と相互作用する非相対論的粒子」の状態ベクトルの集合はヒルベルト空間 $\mathcal{M}$ で表される;

$$\mathcal{M} \equiv L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{W}) \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \mathcal{F}(\mathcal{W}) dx.$$

上の同一視は, 以後混乱のない限り言及することなしに使う. 作用素 $A_\mu(x, \hat{f})$ と $\Pi_\mu(x, \hat{f})$ の Constant Fiber Direct Integral をとって以下のようにおく;

$$\int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} A_\mu(x, \hat{f}) dx \equiv A_\mu(\hat{f}), \quad \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \Pi_\mu(x, \hat{f}) dx \equiv \Pi_\mu(\hat{f}).$$

さらに $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ で dense な部分集合を 2 つ定義する;

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{D}} &= \mathcal{L}\left\{a^\sharp(f_1 e^{-ik\cdot}) \ldots a^\sharp(f_n e^{-ik\cdot})\Psi \,\middle|\, f_j, k_\mu f_j, k_\mu^2 f_j \in \mathbb{D}_0^{d-1}, \mu = 1, \ldots, d, \right. \\ &\qquad \left. j = 1, \ldots, n, n \geq 0, \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \widehat{\otimes} \mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})\right\}, \\ \mathcal{D} &= \mathcal{L}\left\{e^{i\Pi(f)}\Psi \,\middle|\, f, k_\mu f, k_\mu^2 f \in \mathbb{D}_1^{d-1}, \mu = 1, \ldots, d, \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \widehat{\otimes} \mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})\right\}. \end{aligned}$$

ここで $\mathcal{L}$ は $\{\ \}$ の有限線形結合の全体をあらわし

$$\begin{aligned} \Pi(f) &= \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \Pi(x, f) dx, \\ \Pi(x, f) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{a^\dagger\left(\oplus_{r=1}^{d-1} f_r \sqrt{\omega} e^{-i\cdot x}\right) - a\left(\oplus_{r=1}^{d-1} \bar{f}_r \sqrt{\omega} e^{i\cdot x}\right)\right\}. \end{aligned}$$

作用素 $\Pi(x, f)$ 同様に作用素 $A(x, f)$ と $A(f)$ を次のように定義する;

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} A(x, f) dx, \\ A(x, f) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{a^\dagger\left(\oplus_{r=1}^{d-1} \frac{f_r}{\sqrt{\omega}} e^{-i\cdot x}\right) + a\left(\oplus_{r=1}^{d-1} \frac{\bar{f}_r}{\sqrt{\omega}} e^{i\cdot x}\right)\right\}. \end{aligned}$$

これらの作用素 A, Π は A_μ, Π_ν ともちろん性質が異なる. その違いをここで述べる: (1) 線形性: $A(x, f), \Pi(x, f)$ は f について実線形, $A_\mu(x, \hat{f})$, $\Pi_\nu(x, \hat{f})$ は f について線形. (2) 対称性: $A(x, f), \Pi(x, f)$ は 対称作用素, $A_\mu(x, \hat{f})$, $\Pi_\nu(x, \hat{f})$ は特別な f (例: 実数値) に対して対称作用素. (3) 交換関係:$A_\mu(x, \hat{f})$, $\Pi_\nu(x, \hat{f})$ は (2.2) に従い, $A(x, f), \Pi(x, f)$ は $\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ 上で

$$[A(x, f), A(x, g)] = i\Im \sum_{r=1}^{d-1} \left(\frac{f_r}{\sqrt{\omega}}, \frac{g_r}{\sqrt{\omega}}\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f, g \in \mathbb{D}_{-1}^{d-1},$$

$$
\begin{aligned}
[\Pi(x,f),\Pi(x,g)] &= i\Im\sum_{r=1}^{d-1}(\sqrt{\omega}f_r,\sqrt{\omega}g_r)_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f,g\in\mathbb{D}_1^{d-1},\\
[A(x,f),\Pi(x,g)] &= i\Re\sum_{r=1}^{d-1}\left(\frac{f_r}{\sqrt{\omega}},\sqrt{\omega}g_r\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f\in\mathbb{D}_{-1}^{d-1}, g\in\mathbb{D}_1^{d-1}.
\end{aligned}
$$

一般化された μ 方向の L^2-微分を D_μ とし $D_\mu D_\mu=\Delta_\mu, \mu=1,...,d$ とおく. 作用素 $\Delta_\mu\otimes I$ は (2.1) により $\widetilde{\mathcal{D}}$ を定義域に含むことが分かり, さらに、$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ 上本質的自己共役であることが知られている. 故に, $\widetilde{\mathcal{D}}$ 上本質的自己共役作用素となるのでその自己共役拡張$\overline{\Delta_\mu\otimes I|_{\widetilde{\mathcal{D}}}}$ も同じ記号で書くことにする. (2.1) により $\widetilde{\mathcal{D}}$ 上次の交換関係を満たすことがわかる:

$$
\begin{aligned}
[D_\mu\otimes I, A_\nu(\hat f)] &= -\Pi_\nu(k_\mu\frac{\hat f}{\omega}), \quad \hat f, k_\mu\hat f\in\mathbb{D}_{-1}^1,\\
[D_\mu\otimes I, \Pi_\nu(\hat f)] &= A_\nu(k_\mu\omega\hat f), \quad \hat f, k_\mu\hat f\in\mathbb{D}_1^1,\\
[\Delta_\mu\otimes I, A_\nu(\hat f)] &= -2\Pi_\nu(k_\mu\frac{\hat f}{\omega})D_\mu\otimes I - A_\nu(k_\mu^2\hat f), \quad \hat f, k_\mu\hat f, k_\mu^2\hat f\in\mathbb{D}_{-1}^1,\\
[\Delta_\mu\otimes I, \Pi_\nu(\hat f)] &= 2A_\nu(k_\mu\omega\hat f)D_\mu\otimes I - \Pi_\nu(k_\mu^2\hat f), \quad \hat f, k_\mu\hat f, k_\mu^2\hat f\in\mathbb{D}_1^1,\\
&\quad \mu,\nu=1,...,d. \qquad (2.\ 3)
\end{aligned}
$$

さらに次の補題は交換関係 (2.3) が $\widetilde{\mathcal{D}}$ 上だけでなく $\mathcal{D}$ 上でも成立することを示す.

補題 2.1 部分空間 $\mathcal{D}$ は $D_\mu\otimes I$ と $\Delta_\mu\otimes I$ の定義域に含まれる;

$$
D(D_\mu\otimes I)\supset\mathcal{D}, \quad D(\Delta_\mu\otimes I)\supset\mathcal{D}.
$$

さらに 交換関係 *(2.3)* は $\mathcal{D}$ 上で成立する.

証明: 以後簡単のため $(f,g)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ を $(f,g)_2$ とかく. 関数 f で次のようなものを固定する; $f, k_\mu f, k_\mu^2 f\in\mathbb{D}_1^{d-1}$. 集合 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ が $\Pi(f)$ の解析的ベクトルの集合なので,

$$
e^{i\Pi(f)} = s-\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(i\Pi(f))^n}{n!}
$$

が $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ 上成立する. さらに $\widetilde{\mathcal{D}}$ 上で

$$\begin{aligned}[[D_\mu\otimes I, i\Pi(f)], i\Pi(f)] &= [iA(k_\mu\omega f), i\Pi(f)] \\ &= -i\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu\sqrt{\omega}f_r, \sqrt{\omega}f_r,\right)_2.\end{aligned}$$

$(i\Pi(f))^n C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})\subset\widetilde{\mathcal{D}}$ なので (2.3) により, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ 上で

$$\begin{aligned}(D_\mu\otimes I)\sum_{n=0}^{N}\frac{(i\Pi(f))^n}{n!} &= -\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(i\Pi(f))^n}{n!}\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu\sqrt{\omega}f_r, \sqrt{\omega}f_r,\right)_2 \\ &+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(i\Pi(f))^n}{n!}iA(k_\mu\omega f)+\sum_{n=0}^{N}\frac{(i\Pi(f))^n}{n!}D_\mu\otimes I. \qquad (2.\ 4)\end{aligned}$$

(2.1) によって (2.4) の右辺 は $n\to\infty$ のとき

$$-\frac{i}{2}e^{i\Pi(f)}\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu\sqrt{\omega}f_r, \sqrt{\omega}f_r\right)_2+e^{i\Pi(f)}iA(k_\mu\omega f)+e^{i\Pi(f)}D_\mu\otimes I$$

へ強収束することがわかる. $D_\mu\otimes I$ が 閉作用素なので $D(D_\mu\otimes I)\supset\mathcal{D}$ が従い, かつ

$$D_\mu\otimes Ie^{i\Pi(f)}=e^{i\Pi(f)}\left(D_\mu\otimes I+iA(k_\mu\omega f)-\frac{i}{2}\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu\sqrt{\omega}f_r, \sqrt{\omega}f_r\right)_2\right) \qquad (2.\ 5)$$

となることがわかる. 同様に $D(\Delta_\mu\otimes I)\supset\mathcal{D}$ かつ

$$\Delta_\mu\otimes Ie^{i\Pi(f)}=e^{i\Pi(f)}\left(D_\mu\otimes I+iA(k_\mu\omega f)-\frac{i}{2}\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu\sqrt{\omega}f_r, \sqrt{\omega}f_r\right)_2\right)^2 \qquad (2.\ 6)$$

(2.5), (2.6) はもちろん $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ 上の等式である. 定理の後半を示す. 作用素 $\Pi_\mu(\hat{f})$ は f について線形なので f は実数値関数と仮定してもよい. このとき$\Pi_\mu(\hat{f})=\Pi(e_\mu^r\hat{f})$ と書けることに注意する. ここでは, (2.4) の 4 番目の式を証明する. (2.5) と (2.6) そして

$$\begin{aligned}A(g)e^{i\Pi(f)} &= -e^{i\Pi(f)}\Re\sum_{r=1}^{d-1}\left(\frac{g_r}{\sqrt{\omega}}, \sqrt{\omega}f_r\right)_2+e^{i\Pi(f)}A(g), \\ \Pi(g)e^{i\Pi(f)} &= -e^{i\Pi(f)}\Im\sum_{r=1}^{d-1}\left(\sqrt{\omega}g_r, \sqrt{\omega}f_r\right)_2+e^{i\Pi(f)}\Pi(g).\end{aligned}$$

に注意すると $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ 上で次を得る;

$$
\begin{aligned}
&[\Delta_\mu, \Pi_\nu(\hat{f})]e^{i\Pi(g)} = e^{i\Pi(g)}[\mathcal{A}^2, \mathcal{B}],\\
&\mathcal{A} = D_\mu \otimes I + iA(k_\mu \omega g) - \frac{i}{2}\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu\sqrt{\omega}g_r, \sqrt{\omega}g_r\right)_2,\\
&\mathcal{B} = \Pi_\nu(\hat{f}) - \Im\sum_{r=1}^{d-1}(\sqrt{\omega}e_\nu^r\hat{f}, \sqrt{\omega}g_r)_2.
\end{aligned}
$$

$[\mathcal{A}^2, \mathcal{B}] = 2[\mathcal{A}, \mathcal{B}]\mathcal{A} + [\mathcal{A}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]]$ であるから

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{A}, \mathcal{B}] &= [D_\mu \otimes I, \Pi_\nu(\hat{f})] + [iA(k_\mu\omega g), \Pi_\nu(\hat{f})],\\
&= A_\nu(k_\mu\omega\hat{f}) - \Re\sum_{r=1}^{d-1}\left(\frac{k_\mu\omega g_r}{\sqrt{\omega}}, \sqrt{\omega}e_\nu^r\hat{f}\right)_2
\end{aligned}
$$

を上式に代入すると

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{A}^2, \mathcal{B}] &= 2[\mathcal{A}, \mathcal{B}]\mathcal{A} + [D_\mu \otimes I, A_\nu(k_\mu\omega\hat{f})] + [iA(k_\mu\omega g), A_\nu(k_\mu\omega\hat{f})]\\
&= 2\left(A_\nu(k_\mu\omega\hat{f}) - \Re\sum_{r=1}^{d-1}\left(\frac{k_\mu\omega g_r}{\sqrt{\omega}}, \sqrt{\omega}e_\nu^r\hat{f}\right)_2\right)\mathcal{A}\\
&\quad -\Pi_\nu(k_\mu^2\hat{f}) - \Im\sum_{r=1}^{d-1}\left(\frac{k_\mu\omega g_r}{\sqrt{\omega}}, \frac{k_\mu\omega e_\nu^r\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right)_2.
\end{aligned}
$$

一方 (2.5) より $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ 上で

$$
\begin{aligned}
&\left(2A_\nu(k_\mu\omega\hat{f})D_\mu \otimes I - \Pi_\nu(k_\mu^2\hat{f})\right)e^{i\Pi(g)}\\
&= 2\left(A_\nu(k_\mu\omega\hat{f}) - \Re\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu\sqrt{\omega}e_\nu^r\hat{f}, \sqrt{\omega}g_r\right)_2\right)\mathcal{A}\\
&\quad -\Pi_\nu(k_\mu^2\hat{f}) + \Im\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu^2\sqrt{\omega}e_\nu^r\hat{f}, \sqrt{\omega}g_r\right)_2.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\Re\sum_{r=1}^{d-1}\left(\frac{k_\mu\omega g_r}{\sqrt{\omega}}, \sqrt{\omega}e_\nu^r\hat{f}\right)_2 &= \Re\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu\sqrt{\omega}e_\nu^r\hat{f}, \sqrt{\omega}g_r\right)_2,\\
-\Im\sum_{r=1}^{d-1}\left(\frac{k_\mu\omega g_r}{\sqrt{\omega}}, \frac{k_\mu\omega e_\nu^r\hat{f}}{\sqrt{\omega}}\right)_2 &= \Im\sum_{r=1}^{d-1}\left(k_\mu^2\sqrt{\omega}\hat{f}, \sqrt{\omega}g_r\right)_2
\end{aligned}
$$

に注意すると $[\Delta_\mu, \Pi_\nu(\hat{f})]e^{i\Pi(g)} = \Big(2A_\nu(k_\mu\omega\hat{f})D_\mu \otimes I - \Pi_\nu(k_\mu^2\hat{f})\Big)e^{i\Pi(g)}$ が従う. □

$\mathcal{D} \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W})$ なので補題 2.1 から $\mathcal{D}$ が$\Delta \otimes I$ の芯であることがわかる.

補題 2.2 実数値関数 f が次を満たすとする

$$k_\mu\hat{f} \in \mathbb{D}^1_{-1}, \quad \hat{f} \in \mathbb{D}^1_{-1}, \quad \frac{\hat{f}}{k_\mu} \in \mathbb{D}^1_{-1}.$$

このとき 次が $\mathcal{D}$ 上で成立する;

$$\exp\left(i\Pi_\mu(\frac{\hat{f}}{k_\mu\omega})\right)(-\Delta_\mu \otimes I)\exp\left(-i\Pi_\mu(\frac{\hat{f}}{k_\mu\omega})\right) = \Big(-iD_\mu \otimes I - A_\mu(\hat{f})\Big)^2, \quad \mu = 1, ..., d. \tag{2. 7}$$

証明: 部分空間 $\mathcal{D}$ が$\Pi_\mu(\hat{f})$ の解析的ベクトルの集合である ([1,Theorem X.41]) ことに注意すると$\Psi \in \mathcal{D}$ に対して補題 2.1 の証明と同様にして

$$\begin{aligned} -\Delta_\mu \otimes I e^{-i\Pi_\mu(\frac{\hat{f}}{k_\mu\omega})}\Psi &= e^{-i\Pi_\mu(\frac{\hat{f}}{k_\mu\omega})} \\ &\times \left(-iD_\mu \otimes I - A_\mu(\hat{f}) - \frac{1}{2}\left(d_{\mu\mu}\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}, \frac{\hat{f}}{k_\mu\sqrt{\omega}}\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^2\Psi \end{aligned}$$

がわかる. また f が実数値関数なので $|\hat{f}|(k) = |\hat{f}|(-k)$ であるから

$$\left(d_{\mu\mu}\frac{\hat{f}}{\sqrt{\omega}}, \frac{\hat{f}}{k_\mu\sqrt{\omega}}\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

故に補題が従う. □

次の関係式は「ワイルの関係式」として知られている ([1,Theorem X.41]);

$$e^{i\Pi_\mu(\frac{\hat{f}}{k_\mu\omega})}e^{i\Pi(g)}\Psi = e^{i\Pi(h_\mu)}e^{-\frac{i}{2}\Im\sum_{r=1}^{d-1}(e_\mu^r\frac{\hat{f}}{k_\mu\sqrt{\omega}}, \sqrt{\omega}g_r)_{L^2(\mathbb{R}^d)}}\Psi,$$

ここで,

$$h_{\mu,r} = \frac{e_\mu^r\hat{f}}{k_\mu\omega} + g_r, \quad r = 1, ..., d-1, \quad \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)\widehat{\otimes}\mathcal{F}^\infty(\mathcal{W}).$$

ワイルの関係式によりユニタリー作用素 $e^{i\Pi_\mu(\frac{\hat{f}}{k_\mu\omega})}$ は $\mathcal{D}$ をそれ自身の上に移す. $\mathcal{D}$ は$-\Delta_\mu \otimes I$ の芯なので (2.7) の右辺 は $\mathcal{D}$上 本質的自己共役作用素になる. そこで, その自己共役拡張を

$$\mathbf{H}_\mu(f) \equiv \overline{\frac{1}{2}\left(-iD_\mu \otimes I - A_\mu(\hat{f})\right)^2\Big|_{\mathcal{D}}}$$

と定義する. 我々は次の定理を得た.

定理 2.3 実数値関数 f が $k_\mu\hat{f}, \hat{f}, \hat{f}/k_\mu \in \mathbb{D}^1_{-1}$ 満たすとする. このとき $\mathcal{U}_\mu(f) = \exp\left(i\Pi_\mu(\frac{\hat{f}}{k_\mu\omega})\right)$ は $D(\mathbf{H}_\mu(f))$ を $D\left(-\frac{1}{2}\Delta_\mu \otimes I\right)$ へ移して次を満たす;

$$\mathcal{U}_\mu(f)\left(-\frac{1}{2}\Delta_\mu \otimes I\right)\mathcal{U}_\mu(f)^{-1} = \mathbf{H}_\mu(f), \quad \mu = 1, ..., d.$$

2.2 DIAMAGNETIC 不等式

ここで, Pauli-Fierz モデルのある自己共役なハミルトニアンを定義する. そのハミルトニアンに対して Diamagnetic 不等式を導く. 任意の実数値関数ρ で $k_\mu\hat{\rho}, \hat{\rho}, \hat{\rho}/k_\mu \in \mathbb{D}^1_{-1}, \mu = 1, ..., d,$ を満たすものに対してハミルトニアン $\mathbf{H}^P_\rho$ は $\mathcal{M}$ 上の自己共役作用素として次で定義される;

$$\mathbf{H}^P_\rho = \mathbf{H}_1(\rho) \dot{+} ... \dot{+} \mathbf{H}_d(\rho) \dot{+} I \otimes \mathbf{H}^P_0,$$

ここで $\dot{+}$ は 2次形式和をあらわす. 2次形式和で自己共役作用素が定義されるためには共通の定義域が dense でなくてはいけないが補題 2.1 より

$$\mathcal{E} = \cap^d_{j=1} D(\mathbf{H}_j(\rho)) \cap D(I \otimes \mathbf{H}^P_0) \supset \mathcal{D} \cap D(I \otimes \mathbf{H}^P_0),$$

が従うので, $\mathcal{E}$ は dense である.

定理 2.4 (Diamagnetic 不等式) $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ とし実数値関数ρ が $k_\mu\hat{\rho}, \hat{\rho}, \hat{\rho}/k_\mu \in \mathbb{D}^1_{-1}, \mu = 1, ..., d$ を満たすとする. このとき

$$\left|\left(F, e^{-t\left(\mathbf{H}^P_\rho + V \otimes I\right)}G\right)_{\mathcal{M}}\right| \leq \left(||F||_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}, e^{-t\left(-\frac{1}{2}\Delta + V\right)}||G||_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

証明: 2次形式和に対する強 Trotter 積公式 ([17]) と 定理 2.3 により

$$\left(F, e^{-t\left(\mathbf{H}_\rho^P+V\otimes I\right)}G\right)_{\mathcal{M}} = \lim_{n\to\infty}(F, A^n G)_{\mathcal{M}},$$
$$A = \left(\mathcal{U}_1(\rho)e^{-\frac{t}{n}(\frac{-1}{2}\Delta_1\otimes I)}\mathcal{U}_1(\rho)^{-1}..\mathcal{U}_d(\rho)e^{-\frac{t}{n}(\frac{-1}{2}\Delta_d\otimes I)}\mathcal{U}_d(\rho)^{-1}\right)e^{-\frac{t}{n}I\otimes\mathbf{H}_0^P}e^{-\frac{t}{n}V\otimes I}$$

が従う. また $H\in\mathcal{M}$ と $x\in\mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{U}_\mu(\rho)H)(x)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})} &= \|\mathcal{U}_\mu(x,\rho)H(x)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})} \\ &= \|H(x)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}. \end{aligned} \tag{2. 8}$$

ここで, 次の $\mathcal{U}_\mu(x,\rho)$ が各 $x\in\mathbb{R}^d$ ごとに $\mathcal{F}(\mathcal{W})$ のユニタリーであることをつかった:

$$\mathcal{U}_\mu(x,\rho) = \exp\left(i\Pi_\mu(x, \frac{\hat{\rho}}{k_\mu\omega})\right).$$

$H\in\mathcal{M}$ に対してラプラシアンの熱半群は次のように Bochner 積分で積分表示できる;

$$\left(e^{-t(-\frac{1}{2}\Delta_\mu\otimes I)}H\right)(x) = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-|x_\mu-y_\mu|^2}{2t}}H(y)dy, a.e. x\in\mathbb{R}^d,$$

その結果次の不等式が成立する:

$$\left\|\left(e^{-t(-\frac{1}{2}\Delta_\mu\otimes I)}H\right)(x)\right\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})} \le \left(e^{-t(-\frac{1}{2}\Delta_\mu)}\|H(\cdot)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}\right)(x), \quad a.e. x\in\mathbb{R}^d \tag{2. 9}$$

(2.8) と (2.9) そして $\exp(-t\Delta_\mu)$ が「正値性保存作用素」であることに注意すると全ての $F,G\in\mathcal{M}$ に対して次が成り立つ;

$$\begin{aligned} &\left|\left(F, e^{-t\left(\mathbf{H}_\rho^P+V\otimes I\right)}G\right)_{\mathcal{M}}\right| \\ &\le \lim_{n\to\infty}\left(\|F\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}, \left(e^{-\frac{t}{n}(-\frac{1}{2}\Delta)}e^{-\frac{t}{n}V}\right)^n\|G\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \left(\|F\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}, e^{-t\left(-\frac{1}{2}\Delta+V\right)}\|G\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

□

定理 2.5 ([11]) かけ算作用素 $|V|$ が$-\frac{1}{2}\Delta$ に形式有界 *(-form bounded)* で相対作用素ノルムがϵ であるとする．このとき実数値関数 ρ で $k_\mu\hat{\rho}, \hat{\rho}, \hat{\rho}/k_\mu \in \mathbb{D}^1_{-1}, \mu = 1, ..., d$ を満たすものに対して，$|V|$ は $\mathbf{H}^P_\rho$-形式有界で，その相対作用素ノルムはたかだかϵ である．

定義 2.6 ポテンシャル V が $V \in P$ とは $V_+ \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ かつ V_- が $-\frac{1}{2}\Delta$ 形式有界かつその相対作用素ノルムが *1* より小さいことと定義する．ただし，

$$\begin{cases} V_+ = max\{0, V\}, \\ V_- = max\{0, -V\}. \end{cases}$$

$V \in P$ に対して補題 2.5 より自己共役作用素 $\mathbf{H}^P_\rho \dot{+} V_+ \dot{-} V_-$ を定義することができる．

定理 2.7 ([11]) $V \in P$ とし実数値関数 ρ が $k_\mu\hat{\rho}, \hat{\rho}, \hat{\rho}/k_\mu \in \mathbb{D}^1_{-1}, \mu = 1, ..., d$ を満たすとする．このとき 定理 *2.4* は $\mathbf{H}^P_\rho + V$ を $\mathbf{H}^P_\rho \dot{+} V_+ \dot{-} V_-$ に換えても成立する．

$\sigma(A)$ を作用素 A のスペクトラムとする．定理 2.7 より次の系が成立する．

系 2.8 ([11]) $V \in P$ とし実数値関数 ρ は $k_\mu\hat{\rho}, \hat{\rho}, \hat{\rho}/k_\mu \in \mathbb{D}^1_{-1}, \mu = 1, ..., d$ 満たすとする．このとき

$$\inf \sigma \left(-\frac{1}{2}\Delta \dot{+} V_+ \dot{-} V_- \right) \leq \inf \sigma \left(\mathbf{H}^P_\rho \dot{+} V_+ \dot{-} V_- \right).$$

系 2.9 (一般化された加藤の不等式 [11]) $V \in P$ とし実数値関数 ρ は $k_\mu\hat{\rho}, \hat{\rho}, \hat{\rho}/k_\mu \in \mathbb{D}^1_{-1}$,
$\mu = 1, ..., d$ 満たし，さらに$\psi \in D\left(\left(-\frac{1}{2}\Delta \dot{+} V_+ \dot{-} V_-\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, $\psi \geq 0$ かつ $G \in D\left(\mathbf{H}^P_\rho \dot{+} V_+ \dot{-} V_-\right)$ とする．このとき $\|G(\cdot)\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})} \in D\left(\left(-\frac{1}{2}\Delta \dot{+} V_+ \dot{-} V_-\right)^{\frac{1}{2}}\right)$．さらに

$$\begin{aligned} &\Re\left((\mathrm{sgn}G)\psi, (\mathbf{H}^P_\rho \dot{+} V_+ \dot{-} V_-)G\right)_{\mathcal{M}} \\ &\geq \left(\left(-\frac{1}{2}\Delta \dot{+} V_+ \dot{-} V_-\right)^{\frac{1}{2}}\psi, \left(-\frac{1}{2}\Delta \dot{+} V_+ \dot{-} V_-\right)^{\frac{1}{2}}\|G\|_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}\right)_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

ここで

$$(\mathrm{sgn}G)(x) = \begin{cases} \frac{G(x)}{||G(x)||_{\mathcal{F}(\mathcal{W})}}, & ||G(x)||_{\mathcal{F}(\mathcal{W})} \neq 0, \\ 0, & ||G(x)||_{\mathcal{F}(\mathcal{W})} = 0. \end{cases}$$

3 REFERENCES

[1] M.Reed,B.Simon, *Method of modern mathematical physics* II, Academic Press, New York(1975).

[2] B.Simon, An abstract Kato's inequality for generator of positivity preserving semigroups, Indiana Univ.Math.J.26(1977),1067-1073.

[3] H.Hess, R.Schrader, and D.A.Uhlenbrock, Domain of semigroup and generalization of Kato's inequality, Duke Math. J. 44(1977),893-904.

[4] B.Simon, *Functional integral and quantum physics*, Academic Press(1979).

[5] Y.M.Berezansky, Y.G. Kondratiev, *Spectral method in infinite dimensional analysis* Vol.2,Boston,Kluwer Academic,1995.

[6] A.Arai, Rigorous theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics, J.Math.Phys.24(1983),1896-1910.

[7] A.Arai, A note on scattering theory in non-relativistic quantum electrodynamics,J.Phys A:Math.Gen.16(1983),49-70.

[8] A.Arai, An asymptotic analysis and its application to the nonrelativistic limit of the Pauli-Fierz and a spin-boson model, J.Math.Phys.31(1990),2653-2663.

[9] F.Hiroshima, Scaling limit of a model in quantum electrodynamics, J.Math.Phys.34 (1993),4478-4518.

[10] F.Hiroshima, Functional integral representation of a model in QED. submitted in J.Func.Anal.

[11] F.Hiroshima, Diamagnetic inequalities for systems of nonrelativistic particles with a quantized radiation field. to appear in Rev.Math.Phys..

[12] F.Hiroshima, Functional integral representations of the Pauli-Fierz model in QED. Proc.Plovdiv, Bulgaria, Aug[18-23],1995.

[13] T.Okamoto and K.Yajima, Complex scaling technique in non-relativistic massive QED, Ann. Int. Henri. Poincaré42(1985),311-327.

[14] P.Blanchard,Discussion mathématique du modéle de Pauli et Fierz relatif á la catastrophe intarouge, Comm.Math,Phys.15(1969),156-172.

[15] T.A.Welton, Some observable effects of the quantum-mechanical fluctuations of the electromagnetic field, Phys.Rev.74(1948),1157-1167.

[16] 江沢洋, 新井朝雄, 統計力学と場の量子論, 日本評論社, 1988.

[17] T.Kato, K.Masuda, Trotter's product formula for nonlinear semigroup generated by the subdifferentiables of convex functionals, J.Math.Soc.Japan 30(1978),169-178.