数理解析研究所講究録
959巻 1996年 42-50

Yoccoz puzzle の combinatorics について

東工大理工学研 榊原 宏紀(Hironori Sakakihara)

1 Notations

V, W$\subset$ C$_\infty$ に対して ,cl V$\subset$ int Wが成り立つときV$\subset\subset$Wと書き、

$orb_n(z_0)=\{f^m(z_0)\}_{m=1}^{n}$,$orb(z_0)=\{f^n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$と書く。

2 Polynomials

f:polynomial , deg$f=d\geq 2$ を考える。

$D(\infty)$は、$basin\ of\ infinity$、つまり、$\{z\in$ C$_\infty:f^n(z)\longrightarrow\infty(n\rightarrow\infty)\}$とし、$K(f)=$ C$_\infty\backslash D(\infty)$は、$filled\ Juliaset$ とする。よく知られているように、$J(f)=\partial D(\infty)=\partial K(f)$である。

以後、$J(f)$は連結と仮定する。

fに対して、$B\ddot{o}ttcher\ coodinate$と呼ばれる$U_f$から$\{z:|z|>r_f\geq 1\}$ へのconformal mapB_fが存在して,$B_f(f(z))=(B_f(z))^d$, $B_f(z)=z+o(1)(z\rightarrow\infty)$が成立する。ここで、$U_f$は$\infty$の近傍である。

今、$J(f)$は連結としているから、r_f=1 ととれる。

角θをもつ$external\ ray$を$\left\{re^{i\theta}:r_f<r<\infty\right\}$の$B_f-$preimage、level h の$equipotential$を$\left\{he^{i\theta}:0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$の$B_f-$preimageでそれぞれ定義する。

角θをもつ$external\ ray$をR_θと表すと、$f(B_f^{-1}(z))=B_f^{-1}(z^d)$であるから、$f(R_\theta)=R_{d\theta}$となることがわかる。

また、equipotentialとは、言い換えれば、∞を極にもつ$D(\infty)$上の$Green$関数のlevel curveである。

Theorem. 1

a を repelling periodic point とすると、a についている external rays が存在し、それらは高々有限個である。

もちろん、$a \in J(f) = \partial K(f)$ である。これをもう少し詳しくみると、

Theorem. 2

f を次数 2 以上の polynomial とし、$K(f)$ は連結とする。

そのとき、$Th.1$ で得られた external rays は巡回的に置換される。

つまり、a についている external rays を $R_{t(i)}(0 \leq t(0) <, .. < t(n-1) < 1)$ とすると、ある整数 m が存在して、f は $R_{t(i)}$ を $R_{t(i')}$ に写す。ここで、$i' = i + m \ (mod\ n)$ であり、各 $t(i)$ は 2π を無視した external rays の角を表しておけばよい。

このとき、$\frac{m}{n}$ を *rotation number* という。

rotation number とは、その名前の通り、rotation の割合を表している。それを明らかにするのが次の定理である。

Theorem. 3

z_0 を $f'(z_0) = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$ なる parabolic fixed point とすると、z_0 での rotation number は、$\dfrac{m}{n}$ である。

parabolic fixed point のときは $|f'(z_0)|=1$ だから $f'(z_0) = e^{2\pi i\theta}, \theta \in [0,1]$ と書け、attracting petals を考えれば、ある種の回転になっていることは理解しやすい。

しかし、$|f'(z_0)| > 1$ となる repelling fixed foint のときは、$Th.3$ のようにはいかない。

repelling fixed point のときのその点での微分係数と rotation number の関係を示したのが次の Yoccoz inequality である。

Yoccoz inequality

z を repelling fixed point とすると、

$$\frac{Reg(z)}{|g(z) - 2\pi iq/p|} \geq \frac{mq}{2\log d}$$

ここで、$m=g.c.d(p,q)$、$g(z)$は$\log f'(z)$のbranchである。

この不等式から、$g(z)$は2 π $i\frac{q}{p}$で虚軸に接する半径$\frac{mq}{\log d}$のclosed disk内にあることがわかる。

つまり、repelling fixed pointの場合でもその点の微分係数とrotation numberとは ”ある意味で” 近いと思ってよい。

新たに、記号を導入する。

$R(a):=\{a$についているexternal raysのunion$\}$

$R(\tilde{a}):=\bigcup_{k=1}^{p-1}R(f^k(a))\quad(p:$ 周期$)$

3 Quadratic family

ここでは、特に　$f(z)\equiv P_c(z)=z^2+c$ について考える。

Proposition .4

$\tilde{a}=\{a_k\}_{k=1}^{p-1}$をrepelling periodic cycleとし、各a_kについているexternal raysは少なくとも２つあるとする。

そのとき、次のことが成り立つ。

(1) critical value cを含む$\mathrm{C}_\infty\backslash R(\tilde{a})$のcomponent S_1は２つのexternal raysによって境界づけられたsecterである。

(2) critical point 0 を含む$\mathrm{C}_\infty\backslash f^{-1}(R(\tilde{a}))$のcomponent S_0は４つのexternal raysによって境界づけられる。

それらの２つはa_k、他の２つは$-a_k$についている。

4 Douady－Hubbard polynomial－like map

U′, Uをtopological disk、すなわち、単連結な領域で、U′⊂⊂Uとする。

$f:\mathrm{U}'\to\mathrm{U}$がd－fold branched coveringのとき、fを次数dの*DH polynomial－like map*という。

特に、次数２のとき、*DH quadratic like map*という。

polynomial like map fに対して、*filled Juliaset*、*julia set*を次のように定めればよいことがわかる。

$K(f) = \{z : f^n(z) \in U', n = 1, 2, ...\}$

$J(f) = \partial K(f)$

この節の残りで、polynomial like mapsの性質をいくつか述べる。

polynomial like mapはその名前の通り、polynomialらしきものである。もちろん、polynomialsはpolynomial like mapsである。実際、∞がsuperattracting fixed pointであるから、ある領域に制限すればよい。

polynomialsに対してはよく知られているつぎのことが、polynomial like mapsに対しても成り立つ。

$K(f)$,$J(f)$が連結であることと有限なcritical pointsがすべて$K(f)$に含まれることとは必要 十分である。

２つのpolynomial like maps$f$、gに対して、hがfとgのquasiconformal conjugacyであるとは、hは$K(f)$の近傍から$K(g)$の近傍への写像で、$h \circ f = g \circ h$が成り立つきをいう。

fとgが*hybrid equivalent*であるとは、$K(f)$のほとんど至るところ$\bar{\partial} h = 0$となるときをいう。

Straightening Theorem

(1) 次数dのpolynomial like map$f$は、次数dのあるpolynomialにhybrid equivalentである。

(2) (1)において$K(f)$が連結のとき、fとhybrid equivalentなpolynomialはaffine conjugacyを除いて一意に決まる。

(3) 連結なJuliasetをもつquadratic like mapはz^2+cの形のpolynomialとhybrid equivalentで、その対応は一意的である。

5 DH renormalization

ここからは次数を２に限って考え、critical pointは0とする。

fをquadratic like mapとし、$\tilde{\alpha}$をdividing repelling cycleとする。

dividing pointとは、$K(f)\backslash a$がdividingとなるときをいう。もっといえば、その点に2つ以上のexternal raysが存在するときである。

$R=R(\tilde{a})$とおき、Rとsymmetricなraysを$R'=-R$で表し、Eを任意のequipotentialとする。

Ωをcritical pointを含む$\mathbb{C}_\infty\backslash(E\cup R\cup R')$のcomponentとする。この$\Omega$は$Th.3(2)$によって得られるものである。

さらに、pはraysの周期とし、Ω'は$f^{-p}(\Omega)$のaについているcomponentとする。ここで、$a\in\tilde{a}$である。

$\Omega'\ni 0$のとき、$f^p:\Omega'\to\Omega$はdouble covering mapになる。

quadratic like map$f$が*DH renormalizable*(くり込み可能)であるとは、上のように、repelling cycle $\tilde{a}$が存在して、$0\in\Omega'$であって、$f^{pn}(0)\in\Omega', n=1,2,...$となるときをいう。

さらに、fが*immediately DH renormalizable*であるとは、DH renormalizableであって、aがfのdividing fixed pointとしてとれるときをいう。

6 Yoccoz puzzle

fをquadratic polynomialとし、2つのfixed points α、βはrepellingとする。

さらに、αはdividing fixed pointで、rotation numberは$\frac{q}{p}(p>1)$とする。

Eを$K(f)$に十分近いequipotentialとすると、$K(f)$を含むEに囲まれた領域はαについているexternal raysによってp個の領域に分割される。

その分割によってできるp個の領域を$Y_i^{(0)}$ $(i=0,..,p-1)$ とおいて*depth zero*の*puzzle pieces*という。

depth n の*puzzle pieces* $Y_i^{(n)}$ を$f^{-n}(Y_k^{(0)})$のconnected componentとする。

ここで、critical pointのiteratesは、αにならないとする。

そのとき、critical pointを含む唯一つのpuzzle pieceがとれるので、そのpuzzle pieceを$Y^{(n)}=Y_0^{(n)}$とおき、criticalという。

もし、仮に、critical pointのiteratesがαになったとすると、critically finiteになる。

このときJuliasetはlocally connectedになることがわかっている。

$M(f) := \{$すべての`level`の`puzzle pieces`$\}$とすると、`Markov property`を満たす。つまり、

(1) 任意の2つの`puzzle pieces`は、交わりのない内部をもつか、`depth`の大きい`piece`が`depth`の小さい`piece`に含まれているかである。

(2) 任意の`puzzle piece`$Y_i^{(n)}$に対して、ある整数kが存在して、$f : Y_i^{(n)} \to Y_k^{(n-1)}$である。この写像は$Y_i^{(n)}$が`critical`かどうかによって`double covering`か、`conformal`かになっている。

Theorem.5

fは`quadratic polynomial`とし、2つの`fixed points`は`repelling`とする。

fが$DH\ non-renormalizable$であるなら、

$$\sum_{n=0}^{\infty} mod(Y^{(n)} \backslash Y^{(n+1)}) = \infty$$

このことから、

$$diam Y^{(n)} \to 0 (n \to \infty)$$

Corollary.6

$Th.5$が成り立つとき、$J(f)$は`locally connected`となる。

$Cor.6$の"$Th.5$が成り立つとき"というのは少し曖昧だが、重要なのは$Y^{(n)}$の$diameter$が0にいくことである。

また、`critical puzzle piece`である$Y^{(n)}$だから意味がある。

7 Principal nest

ここでも、fは`quadratic polynomial`とし、その2つの`fixed points`は`repelling`としておく。

Wを閉集合とし、あるzに対して$f^l(z) \in$ Wとする。

$orb_l(z)$に沿うWの`pull back` $W_0, W_1, ..., W_l$を次のように定義する。

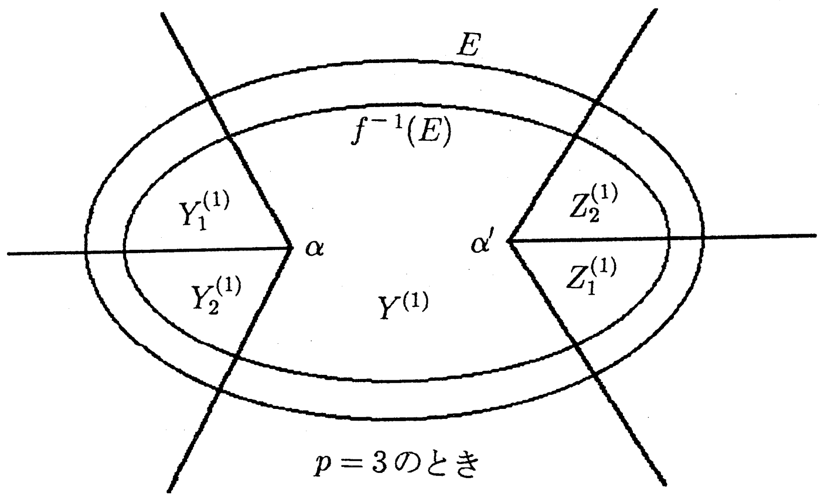
$W_0 = W, W_{-1} \ni f^{l-1}(z), \ldots, W_{-l} \ni z$、各 W_{-k}は$f^{l-k}(z)$を含む$f^{-1}(W_{-k+1})$のcomponentのclosureとする。

$z \in int\,W$のとき、$int\,W$への$orb(z)$のfirst returnに対応するpull backということにする。

*Sec.*6で考えたdepth 1のpuzzle piecesに注目する。

fのdepth 1のpuzzle piecesを$Y^{(1)}, Y_i^{(1)}, Z_i^{(1)}(i = 1, .., p-1)$とおく。

ここで、$Y_i^{(1)}$はdividing repelling fixed point αについているpuzzle piecesとし、$Z_i^{(1)}$はαとsymmetricな点α'についているpuzzle piecesとする。



$p = 3$のとき

$f^{-1}(E)$によってcutされた$f^p(Y^{(1)})$は$Y^{(1)}$と$Z_i^{(1)}(i = 1, .., p-1)$のunionであるから,次の2つが考えられる。

(1) $f^{kp}(0) \in Y^{(1)}(k = 1, 2, ..)$

(2) $t > 0, j > 0$が存在して、$f^{tp}(0) \in Z_j^{(1)}$

(1)のとき、fは*immediately DH renormalizable*であり、*principal nest*を$Y^{(0)}$で定義する。

ここから、(2)のときについて考え、*principal nest* $Y^{(0)} \supset V^0 \supset V^1 \supset \cdots\cdot$を構成する。

tを$f^{tp}(0) \in Z_i^{(1)}$なるfirst momentとする。

V^0を$orb_{tp}(0)$に沿うpull backとし、V^{n+1}を$int\, V^n$へのcritical pointのfirst returnに対応するpull backとする。

critical pointが$intY^{n+1}$へreturn backしないとき、*combinatorically non − recurrent*といい、principal nestは有限である。

そうでないとき、つまり、*combinatorically recurrent*のとき、principal nestは無限となる。

$l = l(n)$を$int\, V^n$へのcritical pointのfist return timeとおくと、

$g_n = f^{l(n)} : V^n \to V^{n-1}$はtwo − to − one branched coveringとなる。

level $n-1$へのreturnが*central*であるとは、$g_n(0) \in V^n$のときをいう。いいかえれば、$l(n) = l(n+1)$となるときである。

level $n, n+1, .., n+N-1 (N \geq 1)$が*central cascade*を形成するとは、

level $n, n+1, .., n+N-2$へのreturnがcentralであって、level $n+N-1$へのreturnがnon − centralのときをいう。

このとき、$g_{n+k}|_{V^{n+k}} = g_{n+1}|_{V^{n+k}}$ $(k = 1, .., N)$であって、$g_{n+1}(0) \in V^{n+N-1} \setminus V^{n+N}$である。$g_{n+k}|_{V^{n+k}} = g_{n+1}|_{V^{n+k}}$ $(k = 1, .., N)$は$g_{n+1}, .., g_{n+N}$がquadrartic like mapとして同じであることを意味する。

level $n, n+1, .., n+N-1 (N \geq 1)$がcentral cascadeを形成し、さらに、level $n-1$へのreturnがnon − centralのとき、*maximal*という。

principal nestはmaximal cascadesのunionである。

maximal cascadesの数をfの*height*といい、$\chi(f)$で表す。ただし、fがimmediately renormalizableのときは、$\chi(f) = -1$とする。

8 DH renormalization and central cascades

Proposition.7

quadratic like map$f$がrenormalizableであることと、$\chi(f)$が有限になることとは必要十分である。

9 Increasing of moduli

Theorem.8

principal nest{ V^n} 内の non − central level を count したものを $n(k)$ とすると、

$$modA^{n(k)+1} \geq Bk$$

ここで、$A^n = \mathrm{V}^n \setminus \mathrm{V}^{n+1}, B = B(\mu)$ は $\mu = modA^1$ にのみによる定数である。

*Prop.*7から、renormalizable でなければ maximal cascades の個数が無限になることがわかる。つまり、$modA^{n(k)}$ の和は Bk の和以上の速さで無限大にいくことになる。

Reference

[1] M.Lyubich;Dynamics of quadratic polynomials,combinatorics and geometry of the Yoccoz puzzle. MSRI preprint.1995

[2] J.H.Hubbard;Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci:three theorems of J.C.Yoccoz.In:"Topological Metheods in Mordern Mathematics,A Symposium in Honor of John Milnor's 60'th Birthday",Pulish or Perish.1993

[3] L.Goldberg & J.Milnor;Fixes points of polynomial maps.Part 2.Fixed point portraits. *Ann.Sc.Ec.Norm.Sup.*, 26(1993)

[4] A.Douady & J.H.Hubbard;On the dynamics of polynomial − like maps. *Ann.Sc.Ec.Norm.Sup.*, 18(1985)