数理解析研究所講究録
960巻 1996年 77-84

Remarks on seminormal oversemigroups

愛知教育大学教育学部　金光三男(Mitsuo Kanemitsu)

茨城大学理学部　松田隆輝(Ryuki Matsuda)

半群はすべて可換で, cancellative torsion-free で, 演算は加法で書かれていて0を持つとする. 自明な半群 {0} は, 今は除くものとする.

Sを半群とするとき, $q(S)=\{ s_1 - s_2 \mid s_1, s_2 \in S \}$をSの**商群**という. TがSを含むq(S)の部分半群のとき, TをSの**oversemigroup**という.

今, Tを半群, SをTの部分半群とする. Tの元tがS上**整**(**integral**)とは, ある自然数nが存在して $nt \in S$となるときをいい, S上整であるTの元の全体をS^*と書くとき, S^*をTにおけるSの**整閉包**(**integral closure**)という. SがTにおいて**整閉**(**integrally closed**)であるとは, $S = S^*$のときをいう. 特に$T = q(S)$のとき, SがTにおいて整閉であるとき, Sは**正規**(**normal**)**半群**という. これらの定義などについては[1]を参照して下さい.

定義 1. $G=q(S)$をSの商群とする. Sが**半正規半群**(**seminormal semigroup**)とは, $\alpha\in G$で, $2\alpha\in S$, $3\alpha\in S$なら, $\alpha\in S$が成立するときをいう.

例 1. Sを(1, 0), (1, 1)で$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$において生成される半群とする. 但し, $\mathbf{Z}$は整数環とする. このとき, $S=\{(a, b)\mid a\geqq b,\ a, b\in\mathbf{Z}_0\}$となる. 但し, $\mathbf{Z}_0$は負でない整数全体とする. $q(S)=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$である. $\alpha\in q(S)$で$2\alpha\in S$, $3\alpha\in S$とする. $\alpha=(a-c, b-d)$と書ける. 但し, $(a, b), (c, d)\in S$である. $2\alpha\in S$より, $a-c\geqq b-d$. よって, $\alpha\in S$. これよりSは半正規半群となる. $R=k[S]$を体k上Sの半群環とすると, Rは半正規環である.

例 2. kを体とする. 代数曲線$y^2=x^3$の座標環を$R=k[X, Y]/(Y^2-X^3)=k[U^2, U^3]$とする. Sを2, 3で生成される$\mathbf{Z}$の半群とすると, $S=\{0, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$となる. $q(S)=\mathbf{Z}$となる. $1\in q(S)$で$2\cdot 1\in S$, $3\cdot 1\in S$だが, 1はSの元ではないのでSは半正規半群ではない. よって$R=k[S]$も半正規環ではない.

例 3. kを体とする．代数曲面$y^2 = xz^2$の座標環を$R = k[X, Y, Z]/(XZ^2 - Y^2) = k[U^2, UV, V]$とする．Sを(2,0),(1,1),(0,1)で生成される半群とすると，$S = \{(2a+b, b+c) \mid a, b, c \in \mathbf{Z}_0\}$で，$q(S) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$である．(1,0)はSの元ではないが，$2(1,0) \in S$．3(1,0)はSの元ではない．今$\alpha = (m, n) \in q(S)$で$2\alpha \in S$，$3\alpha \in S$とする．$3\alpha \in S$より m，n は負ではない整数である．$m = 2t$とおくと，$\alpha = (m, n) = (m, 0) + (0, n) = t(2,0) + n(0,1) \in S$．また，$m = 2t+1$のとき，nが0でないとき，$\alpha = (m, n) = t(2,0) + (1,1) + (n-1)(0,1) \in S$．$n = 0$とすると，$3\alpha = (3m, 0) = (3t+1)(2,0) + (1, 0)$となり矛盾である．これより$n \neq 0$である．よってSは半正規半群である．従ってRは半正規環である．

注意. 例3より，Sは半正規半群でも2－閉($\alpha \in q(S)$で$2\alpha \in S$のとき，$\alpha \in S$となるときをいう)とは限らない．

次に半群Sのイデアルの定義を復習しよう(cf.[1])．Iは空集合ではないSの部分集合とする．

(1) IがSの**イデアル**とは，$I + S \subset I$のときをいう．

(2) PをSのイデアルとする．$x, y \in S$で$x + y \in P$のとき，$x \in P$又は$y \in P$が成立するとき，PをSの**素イデアル**という．

(3) MをSのイデアルとする．Mが**極大イデアル**とは，$M \neq S$で，且つIがSのイデアルでMを含むときは，$I = S$か又は$I = M$のときをいう．

$M = \{ m \in S \mid m$はSの非単元$\}$が空集合でなければ，MはSの唯一つの極大イデアルである．

補題1. (1) $\{ S_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$をSの半正規oversemi-groupsのdirected unionとする．このとき$\cup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$は半正規半群である．

(2) Sの半正規oversemigroupsの共通部分はまた半正規oversemigroupである．

(3) TをSの加法的閉集合とする．Sが半正規半群なら，S_Tもそうである．

(4) Tをtorsion-freeアーベル群，Sをその部分半群とする．Mを$M \cup T$の形の付値半群の極大イデアルとする．このとき，半群$S \cup M$が半正規である必要十分条件はSが半正規半群であることである．

例えば，（3）の証明をしてみよう．$\alpha \in q(S_T)$で$2\alpha \in S_T$，$3\alpha \in S_T$とする．このとき，$2\alpha = s - t$，$3\alpha = s' - t$（$s, s' \in S$）となるSの元tがとれる．$2(\alpha + t) \in S$，$3(\alpha + t) \in S$でSは半正規半群だから，$\alpha + t \in S$となる．よって，$\alpha \in S_T$となる．（4）については，[2, Proposition 3.11]をみて下さい．

定理 1. Tを半群とし，Sをその部分半群でSとTのすべての中間半群は半正規であるとする．このとき次のことが成立する．

(1) Tの各元tに対してSの元sが存在して，$s + t$はS上整になる．

(2) BをSの加法的閉部分集合とする．このときS_BとT_Bのすべての中間半群は半正規である．

(3) （[2, Theorem 3.14]）Sは群，又はTはSのover-semigroupである．

定理 2. Tを半群，Sをその部分半群とする．このとき次の(1)-(3)は同値である．

(1) SとTの間のすべての半群は半正規である．

(2) $2u, 3u \in T$となる任意の$u \in q(T)$に対して，

S[2u, 3u]は半正規半群である.

特に，$T=q(S)=G$のときは次の(3)と(1)(又は(2))は同値となる.

(3) 各$\alpha \in G-S$に対して，αを含まない極大なSのすべてのoversemigroupは半正規半群である.

例えば，(3)⇒(1)を証明してみよう. LをSのover-semigroupとする. 任意の$\alpha \in G-L$に対して，ツォルンの補題より，αを含まないLのoversemigroupで極大な半群L_αが存在する. L_αは半正規半群で$L=\cap L_\alpha$だから，補題1(2)より，Lは半正規半群となる.

定理3. 次の(1)－(3)は同値である.

(1) Sは半正規半群である.

(2) S^*をSの整閉包とする. 任意の$u \in S^*-S$に対して，SのS[u]における導手はS[u]の根基イデアルである.

(3) mが自然数で，$\beta \in q(S)$のとき，m以上の任意の自然数nに対して$n\beta \in S$なら$\beta \in S$である.

例えば，(1)から(2)を証明してみよう. 今，(1)と(3)の同値性はいえたとする. CをSのS[u]における導手とする. α

を$S[u]$におけるCの根基の元とする. αがCの元であることを示す. ある自然数nが存在して, $n\alpha \in C$となる.
βが$S[u]$の元とすると, 負でない任意の整数mに対して, Cは$S[u]$のイデアルだから, $m\alpha + n\alpha \in S[u] + C \subset C$となる.
よって, $(m+n)(\alpha+\beta) = (m\alpha + n\alpha) + (m+n)\beta \in S[u] + C \subset C$となる. CはSのイデアルでもあるから, $(m+n)(\alpha+\beta) \in S$となる. (3)より, $\alpha+\beta \in S$である.
よって, $\alpha + S[u] \subset S$であるから$\alpha \in C$となる. これで, Cは根基イデアルであることがいえた.

次に半群における可逆分数イデアルを定義しよう.

定義2. Sを半群とし, Iを空集合でない$G = q(S)$の部分集合とする.

(1) IがSの**分数イデアル**とは, 次の2つの条件を満たすときをいう.

(i) $S + I \subset I$.

(ii) $r + I \subset S$となるSの元rが存在する.

(2) $I^{-1} = \{\alpha \in G \mid \alpha + I \subset S\}$とおく. $I + I^{-1} = S$のとき, Iは**可逆分数イデアル**という.

半群における可逆分数イデアルは単項分数イデアルである．

何故なら，$I+I^{-1}=S$ だから $a\in I$ と $b\in I^{-1}$ が存在して $0=a+b$ となる．任意の I の元 x に対して，$x=x+0=x+(a+b)=a+(b+x)\in a+S$ となる．よって $I\subset a+S$ がいえた．逆に，任意の $I+S$ の元 $a+s$ に対して I は S のイデアルだから，$a+S\subset I$．ゆえに $I=a+S$ となり，I は単項分数イデアルであることがいえた．

従って，ピカール群

$\mathrm{Pic}(S)=$ {可逆分数イデアル} ／ {単項分数イデアル}

は (0) となる．

定理 4. $\mathrm{Pic}(S)=(0)$.

参考文献

[1] R. Gilmer, Commutative Semigroup Rings, The Univ. of Chicago, Chicago, 1984.

[2] M. Kanemitsu and R. Matsuda, Note on seminormal overrings, to appear in Houston J. Math. vol. 22 (1996).