数理解析研究所講究録
961巻 1996年 103-111

On a zero density estimate for Dedekind zeta functions of the fields $\mathbb{Q}(n^{1/k})$.

岩手大学教育学部　川田 浩一
(Koichi Kawada, Iwate Univ.)

1. 導 入

kを2以上の自然数とし，$\zeta(s)$をRiemann zeta関数とする。$s=\sigma+it$は複素変数で，σ, tはそれぞれsの実数部分，虚数部分である。自然数nに対して，$\zeta_n(s)$を，有理数体$\mathbb{Q}$にnの実k乗根を添加した体$\mathbb{Q}(n^{1/k})$のDedekind zeta関数とする。この場合，Uchida[7]あるいはvan der Waall[8]により，$\zeta_n(s)/\zeta(s)$は整関数である。先にkは2以上，としたが，$k=2$のときは$\zeta_n(s)/\zeta(s)$はあるDirichletのL関数となり，L関数の零点密度定理などにより，以下の話はもっと簡単に扱える。したがって以下の話が意味をもつのは，kが3以上のとき，ということになる。

いま，$N(n;\alpha,T)$を整関数$\zeta_n(s)/\zeta(s)$の零点のうち，

$$\sigma \geqq \alpha, \quad |t| \leq T$$

なる領域に入っているものの個数とする。さらに集合I_kを，

x^k-n が多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ において既約であるような自然数 n 全ての集合とする。

このとき，筆者が[2]で述べた通り，

$$(1)\qquad \sum_{\substack{n\le N\\ n\in I_k}} N(n;1-\eta,T) \ll (NT)^{1-\delta}$$

となる正の実数 η,δ が存在することが証明できる。実際，[2]には，より詳しい形が示されている。

この零点密度の評価(1)は，自然数を素数と k 乗数の和として表すことに関する研究の中で必要となったものである。自然数 n を素数と k 乗数の和として表すとき，その表し方の数を $r_k(n)$ とすると，

$$(2)\qquad r_k(n) \sim \frac{n^{1/k}}{\log n}\,\mathfrak{S}_k(n) \qquad (n\in I_k,\ n\to\infty)$$

という漸近式が予想されている。ここで，$\mathfrak{S}_k(n)$ は特異級数(singular series)と呼ばれるもので，

$$\mathfrak{S}_k(n)=\prod_p\left(1-\frac{\rho_n(p)-1}{p-1}\right)$$

で定義される。ただし，文字 p は素数を表し，$\rho_n(p)$ は合同式 $x^k-n\equiv 0$ の法 p での解 x の個数である。ここでは，$\zeta_n(s)$ の性質を用いて，定義式の無限積が収束すること，および不等式 $\mathfrak{S}_k(n)\gg(\log n)^{-k}$ $(n>1)$ が証明できること，に注意

しておく。

筆者[2]は，ほとんどすべての自然数nに対して，予想されている漸近式(2)が成立することを示した。より詳しくいうと，任意に固定した正の実数Aに対して，

$$E_k(N) = \#\{1 < n \leq N\,;\ |r_k(n) - \frac{n^{1/k}}{\log n}\mathfrak{S}_k(n)| > n^{\frac{1}{k}}(\log n)^{-A}\}$$

とおくとき，

(3) $$E_k(N) \ll N(\log N)^{-A}$$

となる。この証明の中で，特異級数の扱いに関する部分に，前述の零点密度の評価(1)が使われているが，その点については[2]を参照されたい。また，証明の詳細は，学位論文[3]に含まれている。

さて，このE_k(N)についての評価(3)は，筆者のプレプリント[1]が雑誌に受理されないうちに，Perelli-Zaccagnini[6]によって，区間の長さを短かくするという点で精密化された。彼らは素数とk乗数の和について扱った論文[6]の中で，予想されている漸近式(2)に対する例外の自然数の個数については，$H \geq N^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}$，$\varepsilon > 0$のもとで，

(4) $$E_k(N+H) - E_k(N) \ll H(\log N)^{-A}$$

であることを示した。その中で，特異級数の扱いに関する部分には，Dedekind zeta関数の零点密度の評価ではなく，Nair-

Perelli [5] による結果が使われている。その結果 [5, Theorem 1] をここでの記号で書けば，$H \geqq N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$，$\varepsilon > 0$，$N, M \geqq 2$ のもとで，

$$(5) \quad \sum_{N<n\leq N+H} \left| \sum_{M<p\leq 2M} (\rho_n(p)-1) \right| \ll HM(\log M)^{-A}$$

という結果である。この評価 (5) の Vinogradov 記号に含まれている定数は，A, k, ε に依存するというだけでなく，非実効的 (ineffective) である。従って，これを用いて得られた結果 (4) の中に含まれる定数も，やはり非実効的である。

不等式 (5) の証明は，M が $\exp(\log N \cdot (\log\log N)^2)$ より大きいか小さいかに分けて行なわれるが，大きいときの方を扱う際に非実効的な定数が現れ，今のところそれを避けることができない。

彼らはそれを Siegel-Brauer の定理と呼んでいる ([5, Lemma 4]) が，Dedekind zeta 関数 $\zeta_n(s)$ の例外的に 1 に近い零点の評価に関する部分で非実効的な定数が現れるのである。

一方，不等式 (5) は，零点密度の評価 (1) の証明の基本となる補題とよく似た形をしている。n の区間の長さを除けば，本質的に同じ，といってよい。つまり，Nair-Perelli [5] は零点密度評価 (1) における n の区間を (5) と同じところまで短くすることができることをも指摘している，といえる。ただし，

零点密度の評価にあたっては，(5)でいえば，MがNの中乗程度の大きさのところまでしか必要とされないので，非実効的な定数が現れることはない。実際，(1)と(3)のどちらについても，その中に含まれている定数は実効的(effective)であった。

したがって，我々はまず(1)におけるnの区間を改良して短くし，それを用いて特異級数を扱うことで，(4)における定数を実効的なものにすることができる。

$\boxed{\text{定　理}}$　$N, T \geq 2$，$H \geq N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$，$\varepsilon > 0$のとき，ある正の定数$\eta, \delta$があって，

$$\sum_{\substack{N < n \leq N+H \\ n \in I_k}} \mathcal{N}(n; 1-\eta, T) \ll (HT)^{1-\delta}.$$

$\boxed{\text{系}}$　k, A, εのみに依存する実効的な定数がVinogradov記号に含まれているものとして，不等式(4)が成立する。

Nair-Perelliの結果[5, Theorem 1]は，多項式で表される素数の分布についての応用もある[5, Theorem 2]。そのTheorem 2の証明中の一つの鍵となる式[5, (36)]がTheorem 1によって示されている。我々はやはり零点密度の評価によって，[5, (36)]に含まれている定数を，非実効的なものでなく，実効的なも

のにすることができる。

2. 証明について。

定理の証明は、(1)の証明において機械的に区間の長さを短いものに置き代えるだけでできる、といえる。

気持ちとしては、Dirichlet のL関数に対する零点密度定理の証明(例えば Montgomery [4, Ch.12])と平行して証明を進める。そこでは大きな篩の不等式 (large sieve inequality, [4, Theorem 2.5]) が重要な役割を果たしているので、$\zeta_n(s)/\zeta(s)$ の零点密度を評価するにあたっては、それに対応するものを用意する必要がある。これが証明の一番大きなポイントであり、それ以外は、L関数の零点密度定理の証明と同じことを繰り返すだけ、ともいえる。

さて、Dedekind zeta 関数 $\zeta_n(s)$ の Euler 積表示は、

$$\zeta_n(s) = \prod_p \prod_{1\le f\le k} (1-p^{-fs})^{-a_n(f,p)} \qquad (\sigma>1)$$

という形で表すことができ、$f=1$ のとき、少なくとも $p\nmid kn$ であれば、$a_n(1,p)=\rho_n(p)$ となることが知られている。そこで、

$$\frac{\zeta_n(s)}{\zeta(s)} = \prod_p (1-p^{-s})^{-\rho_n(p)+1} \cdot \prod_{p\mid kn} (1-p^{-s})^{-a_n(1,p)+\rho_n(p)} \times$$
$$\times \prod_p \prod_{2\le f\le k} (1-p^{-fs})^{-a_n(f,p)}$$

$$= \prod_p \left(1 + (\rho_n(p) - 1) p^{-s}\right) \cdot F_n(s)$$

とかく。

我々はsの実数部分σが1に近いところに注目するので，$F_n(s)$は本質的には簡単に扱うことができる。この意味で，本質的には$\zeta_n(s)/\zeta(s)$をDirichlet級数で書いたときの係数は，

$$\beta_n(m) = \mu(m)^2 \prod_{p \mid m} (\rho_n(p) - 1)$$

である，ということができる。ここで$\mu(m)$はMöbius関数である。つまり雑な言い方をすれば，$\sigma > 1$において

$$\frac{\zeta_n(s)}{\zeta(s)} \doteqdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_n(m)}{m^s}$$

と思うことができる。

そして大きな篩の不等式の代わりとして，

$$\sum_{N < n \le N+H} \left| \sum_{M < m \le 2M} a_m \beta_n(m) \right|$$

に対して“自明でない”評価が与えられれば，それをもとに定理を得ることができる。実際，この和を$\ll HM^{1+\varepsilon} \max_{M < m \le 2M} |a_m|$とおさえれば自明だが，それより少し良くできれば，つまりある$\xi > 0$に対して，

$$(6) \qquad \sum_{N < n \le N+H} \left| \sum_{M < m \le 2M} a_m \beta_n(m) \right| \ll HM^{1-\xi} \max_{M < m \le 2M} |a_m|$$

という形の評価が示せれば，零点密度をおさえる際の良く知られた方法によって定理を得ることができるというわけである。

ところで，a_mの値を，mが素数のときのみ1，その他のときは0と定めれば，(6)の左辺は(5)の左辺と一致する。そして，Nair-Perelliの(5)の証明のMがあまり大きくないときの議論は，一般の複素数a_mに対しての(6)の証明にも同様に通用し，我々は次の補題を得ることができる。

補題 $H \geqq N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$，$M < N^{B}$，$\varepsilon, B > 0$とすると，不等式(6)は$\delta < \frac{\varepsilon}{10B}$に対して成立する。

定理はこの補題から従うが，その道筋は[1]（あるいは[3]）と同様である。

References.

[1] Kawada, K. "On the sum of a prime and a k-th power", Mathematical Research Note, Inst. Math. Univ. Tsukuba No. 92-008, 1992.

[2] Kawada, K. "On the asymptotic formula for the number of representations of numbers as the sum of a prime and a k-th power", Proc. Japan Acad. vol. 69 ser. A no.8 (1993), 283−286.

[3] Kawada, K. "Contributions to the additive theory of numbers", Thesis, University of Tsukuba, 1993.

[4] Montgomery, H.L. "Topics in Multiplicative Number Theory," Springer, 1971.

[5] Nair, M. and Perelli, A. "On the prime ideal theorem and irregularities in the distribution of primes", Duke Math. J. vol. 77. no.1 (1995), 1−20.

[6] Perelli, A. and Zaccagnini, A. "On the sum of a prime and a k-th power", Izvestija Acad. Nauk. ser. Mat. vol. 59 no.1 (1995), 185−200.

[7] Uchida, K. "On Artin L-functions", Tôhoku Math. J. vol. 27 no.2 (1975), 75−81.

[8] van der Waall, R.W. "On a conjecture of Dedekind on zeta functions", Indag. Math. vol. 37 (1975), 83−86.