数理解析研究所講究録
961巻 1996年 32-35

An application of the projections of C^{∞} automorphic forms

東京工業大学 大学院 野田 工 (Takumi Noda)

1. 概要

Riemann のゼータ関数および保型形式に付随する L 関数の零点を、Hecke 作用素の固有値と結びつける関係式を与える (Noda [3])。ここでは、正則保型形式に付随する symmetric square L-function の積分表示に対して、C^{∞}automorphic forms の射影に関する性質を用いた。その結果、適当な条件の下で Riemann ゼータ関数及び symmetric square L-function の零点を、正則保型形式に対する Hecke 作用素の固有値に直接結び付ける関係式を得ることに成功した。有名な、Riemann ゼータ関数の零点がある種の自己共役作用素の固有値に『書き替え』られるであろう、という Hilbert-Pólya の予想に対する解答には遠いが、上の結果は Riemann ゼータ関数の零点と自己共役作用素の固有値とを結びつけた初めての関係式だと思われる。また、Riemann ゼータ関数の零点と保型形式に付随する L 関数の零点、両者に共通に成立する関係式であるという点にも注意したい。

2. 主結果

整数環を Z、kを正の偶数、そして S_kをモジュラー群 $\mathrm{SL}_2(Z)$ 上重さ kの正則尖点形式全体からなる空間とする。$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e^{2\pi inz}\in S_k$ を、Hecke 作用素の同時固有関数とする。また第一 Fourier 係数は 1 とする。このとき $f(z)$ に付随する symmetric square L-function は、次のような Euler 積として定義される。

$$L_2(s,f)=\prod_{p:\ prime}(1-\alpha_p^2p^{-s})^{-1}(1-\alpha_p\beta_pp^{-s})^{-1}(1-\beta_p^2p^{-s})^{-1}$$

ここで $\alpha_p+\beta_p=a(p)$ かつ $\alpha_p\beta_p=p^{k-1}$ とする。Riemann のゼータ関数を$\zeta(s)$ と書くとき、主結果は次のように述べられる。

定理. $\Delta_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau_k(n)e^{2\pi inz}\in S_k$ を $\dim S_k=1$ つまり $k=12,16,18,20,22,$ そして 26 の場合における、一意に定まる、正規化された Hecke 作用素の同時固有関数とする。ρ を領

域 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ における $\zeta(s)$ または $L_2(s+k-1,\Delta_k)$ の零点とする。$\zeta(2\rho)\neq 0$ を仮定すると、すべての正の整数 n に対して次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&-\tau_k(n)\left\{\zeta(2\rho)\cdot 2^{-2\rho}\pi^{-2\rho}n^{1-2\rho}\cdot\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(k)}{\Gamma(k-\rho)}+\zeta(2\rho-1)\cdot 2^{2\rho-2}\pi^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Gamma(\rho-\frac{1}{2})\Gamma(k)}{\Gamma(k-1+\rho)}\right\}\\
&=\sum_{0<m<n}\tau_k(m)\sigma_{1-2\rho}(n-m)F(1-\rho,k-\rho;k;\tfrac{m}{n})\\
&\qquad\qquad+\sum_{n<m}\left(-\tfrac{n}{m}\right)^{k-\rho}\tau_k(m)\sigma_{1-2\rho}(n-m)F(1-\rho,k-\rho;k;\tfrac{n}{m})
\end{aligned}
$$

ここに $F(a,b;c;z)$ は Gauss の超幾何関数で、$\sigma_s(m)$ は m の正の約数の s 乗の和である。

注意　いま $T(n,k;\rho)$ を定理の等式における右辺とするとき、領域 $0<\mathrm{Re}(\rho)\leq\frac{1}{2}$ について 次の二つの条件は同値である。

(A.1) $\mathrm{Re}(\rho)=\frac{1}{2}$,

(A.2) $T(n,k;\rho)=O(\tau_k(n))$.

3. L 関数および C^∞ automorphic forms の性質

$H=\{z=x+\sqrt{-1}\,y\mid y>0\}$ を上半平面とする。$f(z)\in S_k$ を正規化された Hecke 作用素の同時固有関数とするとき、Rankin-Selberg method により $L_2(s,f)$ は次のような積分表示を持つ。

$$
\text{(B.1)}\qquad L_2(s,f)=\frac{\zeta(2s-2k+2)}{\zeta(s-k+1)}\frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)}\int_{\mathrm{SL}_2(Z)\backslash H}|f(z)|^2E(z,s-k+1)y^{k-2}dxdy
$$

ここで H は上半平面、$E(z,s)$ は次で定められる実解析的 Eisenstein 級数である。

$$
E(z,s)=\frac{1}{2}\sum_{c,d\in Z,\ (c,d)=1}y^s|cz+d|^{-2s}
$$

さらに、志村 [4]、Zagier [6] によって $L_2(s,f)$ は全 s-平面に正則に解析接続できることが知られている。

$\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(Z)$ と $z\in H$ に対して、$\gamma\langle z\rangle=(az+b)(cz+d)^{-1}$ と書く。また A_k を次の条件を満たす関数 F の集合とする。

(2.1) F は、H 上の C^∞ 級-複素数値関数

(2.2) すべての $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(Z)$ に対し $F(\gamma\langle z\rangle)=(cz+d)^kF(z)$

このとき関数 F は $\mathrm{SL}_2(Z)$ 上の重さ k の C^∞ *automorphic form* と呼ばれる。また、$\epsilon > 0$ に対して、

$$\int_0^1\int_0^\infty |F(z)| y^{k-2} e^{-\epsilon y} dydx < \infty$$

であるとき、*of bounded growth* と呼ばれる。of bounded growth なる $F \in A_k$ と $f \in S_k$ に対して、次の Petersson 内積が定まる。

$$< f, F >= \int_{\mathrm{SL}_2(Z)\backslash H} f(z)\overline{F(z)} y^{k-2} dxdy$$

このとき Sturm は次を示した。

定理 (Sturm [5]) $F \in A_k$ を of bounded growth かつ Fourier 展開が $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n,y) e^{2\pi i n x}$ であるとする。$k > 2$ を仮定し、

$$c(n) = 2 \cdot (2\pi n)^{k-1} \Gamma(k-1)^{-1} \int_0^\infty a(n,y) e^{-2\pi n y} y^{k-2} dy$$

とおくとき、$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n z} \in S_k$ かつ $< g, F >=< g, h >$ がすべての $g \in S_k$ に対して成り立つ。

4. 証明の方針

定理の証明は次のような方針で行なう。はじめに、式 (B.1) の積分内部の $f(z)E(z, s-k+1)$ が C^∞ automorphic form でかつ収束条件を満たすことを確かめる。次に $L_2(s,f)$ の正則性から、定理の条件下での $\zeta(s)$ および $L_2(s+k-1, f)$ の零点 ρ に対して

$$< f(z)E(z,\rho), f(z) >= 0$$

が成立していることがわかる。以下、$\dim S_k = 1$ として考える。このとき Sturm [3] の結果を用いると、すべての $g \in S_k$に対して $< g, \Delta_k \cdot E(z,s) >=< g, h >$ なる $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n,s) e^{2\pi i n z} \in S_k$ が構成できるが、いま $\dim S_k = 1$ であることから、$h(z,\rho) = 0$ でなければならない。したがって、$c(n,\rho) = 0$ がすべての正の整数について成り立つことから、定理の主張を得る。

5. 一般化

一般の Siegel modular group $Sp_{2m}(Z)$ について、正則尖点形式に付随する standard L-function (Andrianov [1]) の零点について考えてみる。Böcherer [2] の積分表示を用いれば、今までの議論の一般化が可能である。特に $Sp_2(Z) = SL_2(Z)$ の場合と $Sp_4(Z)$ の場合について確かめてある。$SL_2(Z)$ では symmetric square L-function の零点と degree 2 の Siegel Eisenstein series の Fourier 係数とを結びつける関係式が得られる。一方 $Sp_4(Z)$ の場合には、L 関数の critical line 上の零点が Riemann ゼータ関数の critical line 上の零点に一致する。これは Saito-Kurokawa lifting によってわかる（いまは尖点形式のなす空間の次元は 1 と仮定している)。したがって Riemann ゼータ関数の零点と degree 4 の Siegel Eisenstein series の Fourier 係数とを結びつける関係式を得ることができるが、かなり繁雑なものとなる。

6. 参考文献

[1] A.N. Andrianov *The multiplicative arithmetic of Siegel modular forms,* Russ. Math. Surv. **34** (1979) 75-148 (Engl. tranl.)

[2] S. Böcherer *Über die Funktionalgeichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe,* J. Reine Angew. Math. **362** (1985) 146-168

[3] T. Noda *An application of the projections of C^∞ automorphic forms,* Acta Arithmetica **72** No.3 (1995) 229-234

[4] G. Shimura *On the holomorphy of certain Dirichlet series,* Proc. London Math. Soc. **31** (1975) 79-98

[5] J. Sturm *The critical values of zeta functions associated to the symplectic group,* Duke Math. J. **48** No.2 (1981) 327-350

[6] D. Zagier *Mosular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields,* (Lect. Notes Math. vol. 627) Springer (1977) 106-169