数理解析研究所講究録
962 巻 1996 年 137-147

群の EULER 数について (COXETER 群の場合)

秋田 利之

1. はじめに

ある種の有限性を満たす群 G に対して (有理)Euler 数 $e(G)$ という不変量が定義できます。もともとはトポロジーに由来する概念なのですが, G の p-部分群や中心などに関する代数的な不変量でもあります。

この文章の前半では群の Euler 数に関する基本的な事柄について触れ, 後半では Coxeter 群の Euler 数について解説します。Coxeter 群の Euler 数をはじめに研究したのは J.-P. Serre です。Serre は Euler 数の計算式や Coxeter 群の Poincaré 級数と Euler 数との関係などを得ました。

さて Coxeter 群 W が与えられると, その特別な部分群の poset を考えることにより単体的複体 $\mathcal{F}(W)$ を構成できます。与えられた単体的複体 K に対して $K=\mathcal{F}(W)$ となる Coxeter 群 W の Euler 数は (K に depend した) ある有界な範囲に値をとるのですが一般には K だけでは値が一つには決まりません。しかし M. W. Davis の結果を使うと, 単体的複体 $\mathcal{F}(W)$ が偶数次元の球面の単体分割となっているときには $e(W)=0$ となることがわかります。私は Davis の結果に inspire されて単体的複体 $\mathcal{F}(W)$ と Euler 数 $e(W)$ との関係を調べ次の結果を得ました。

(1) $\mathcal{F}(W)$ が偶数次元の閉多様体 M の単体分割ならば $e(W)$ は M のみで決まる定数になる。

(2) $\mathcal{F}(W)$ が連結なグラフなら $e(W)$ は $\mathcal{F}$ の種数で上からおさえられる。

逆に偶数次元の閉多様体の単体分割 K に対して $K=\mathcal{F}(W)$ となる Coxeter 群 W で特別なものを考えることにより, K の単体の個数の数え上げに関する結果を得ることもできました。球面の単体分割の場合には Dehn-Sommerville 方程式が有名ですが, 一般の多様体に関しての結果は私の探した範囲では他に見当たりませんでした (知っている人がいたら教えてください)。

2. VFL 型の群

以下の三つの節で群の Euler 数に関する基本的な事実を説明します。群の Euler 数の一般論については詳しくは[5],[10] を参照してください。

G を群, $\mathbb{Z}G$ を G の群環, $\mathbb{Z}$ を自明な $\mathbb{Z}G$ 加群とします。

定義 2.1. $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}G$ 上の**有限な自由分解** $F_* = (F_i)_{i\geq 0}$ とは $\mathbb{Z}G$-加群の完全系列

$$\cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

で以下の二つの条件を満たすもののこと

(1) i が十分大きければ $F_i = 0$。

(2) 各 F_i が有限生成自由加群。

$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}G$ 上の有限な自由分解が存在する群を **FL(型)** と呼びます。

定義 2.2. 群 G が **VFL(型)** とは有限指数の部分群で FL のものが存在することです。

注意 1. *FL* なら *VFL* ですが逆は一般にはなりたちません。実際 *FL* 型の群は有限位数の元を持たないのですが, *VFL* の群は一般には有限位数の元を持ちます (下の例2 を見よ)。また G が *VFL* であることと G の有限指数の部分群が *VFL* であることは同値です。

例 2.1. G, H が FL (resp. VFL) ならばそれらの自由積 $G * H$ と直積 $G \times H$ は FL (resp. VFL) です。群の拡大と融合積に対しては FL の方は保たれるのですが VFL のほうは保たれるとは限りません。

例 2.2. 単体的複体 K の普遍被覆が可縮 (一点に連続的に変形できること) のとき K は aspherical といいます。aspherical であることと K のホモトピー群 $\pi_n(K)$ $(n \geq 2)$ が自明であることとは同値です。

K が aspherical な有限複体ならばその基本群 $G = \pi_1(K)$ は FL です。例えば $\mathbb{Z}$ は FL です (K を単位円 S^1 とすればよい)。また種数 $g > 0$ の有向閉曲面 Σ_g は aspherical なのでその基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ $(g > 0)$ も FL です。

例 2.3. 以下に (V)FL 型の群の簡単な例を挙げておきます。

(1) 自明な群 $\{1\}$ は FL。$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \to 0$ がその有限な自由分解です。

(2) 有限群は VFL。

(3) 自由群 F_n, 自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ は FL(例2.1と2.2から)。

(4) $SL(2, \mathbb{Z})$ は指数が 24 の部分群で自由群 F_3 に同型なものをもつことがよく知られています。したがって VFL となります。

例 2.4 (完全三角群). a, b, c を 2 以上の整数とします。表示

$$T^*(a,b,c) = < s_1, s_2, s_3 | s_i^2 = (s_1s_2)^a = (s_2s_3)^b = (s_3s_1)^c = 1 >$$

で定義される群を**完全三角群**と呼びます。$T^*(a,b,c)$ が有限群になるには

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$$

が成り立つのが必要十分です。無限位数の完全三角群には有限指数の部分群で有向閉曲面Σ_g $(g > 0)$ の基本群と同型なものが存在します[14]。したがって例2.2から完全三角群は VFL であることがわかります。

例 2.5. 一般には与えられた群が (V)FL かどうかを判定するのはとても困難です。今までに VFL であることが証明された群で重要なものを列挙しておきます。

(1) 数論的群 ($SL(n,\mathbb{Z})$, $Sp(2n,\mathbb{Z})$ など) (Borel-Serre)。
(2) 写像類群 (Harer)。
(3) F_nの外部自己同型群 (Culler-Vogtmann)。

3. 群の EULER 数の定義

定義 3.1. G を FL 型の群とします。$F_* = (F_i)_{i \geq 0}$を $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}G$ 上の有限な自由分解とします。そのとき G の **(有理)Euler 数** $e(G)$ を

$$e(G) = \sum_i (-1)^i \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}G} F_i \in \mathbb{Z}$$

と定義します。これは自由分解 F_*の選び方にはよりません。次に G を VFL 型の群とします。そのとき $e(G)$ を

$$e(G) = \frac{e(H)}{(G:H)} \in \mathbb{Q}$$

で定義します。ただし Hは G の有限指数の部分群で FL 型のものです。$e(G)$ は Hの選び方にはよりません。

注意 2. 定義が *well-defined* であることから $(G:H) < \infty$ のとき

$$e(H) = (G:H) \cdot e(G)$$

が成り立つことがわかります。

群の Euler 数を最初に定義したのは C. T. C. Wall です[13]。

4. 性質と例

例 4.1. Gが自明なら$e(G)=1$(例2の(1)で与えた自由分解からすぐわかる)。またGが有限群ならば$e(G)=1/|G|$。ですから有限群に対しては Euler 数は面白くありません。

例 4.2. Kを aspherical な有限単体的複体とします。Kの基本群を$G=\pi_1(K)$とすると

$$e(G)=\chi(K)$$

となります。これが群の Euler 数の概念の出発点で, 先に述べた FL 型の群の Euler 数の定義はこの例の代数的な言い替えです。このことから$e(\mathbb{Z})=\chi(S^1)=0$, $e(\pi_1(\Sigma_g))=\chi(\Sigma_g)=1-g$がわかります(記号は例2.2を参照)。

例 4.3. G, Hが VFL であればその自由積と直積の Euler 数はそれぞれ

$$e(G*H)=e(G)+e(H)-1,$$
$$e(G\times H)=e(G)\cdot e(H)$$

で与えられます。

例 4.4. 例4.2と4.3から$e(\mathbb{Z}^n)=0$, $e(F_n)=1-n$がわかります。さらに例2から$e(SL(2,\mathbb{Z}))=-1/12$となります。

例 4.5 (完全三角群). 無限位数の完全三角群$T^*=T^*(a,b,c)$の Euler 数は

$$e(T^*)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1\right) \tag{1}$$

で与えられます。

例 4.6. 例2.5で触れた群の Euler 数はいずれもζ-関数の値と関連することが知られています。例えば

$$e(Sp(2n,\mathbb{Z}))=\prod_{k=1}^{n}\zeta(1-2k)$$

となります。

最後に§1 で触れたp-部分群, 中心と Euler 数との関係を書いておきます。

定理 1 (Brown). p素数, p^nが$e(G)$の分母を割り切るならばGは位数p^nの部分群をもつ。

有限群の場合その Euler 数は位数の逆数ですから, 上の定理は Sylow の定理の(部分的な)一般化になっています。

定理 2 (Gottlieb-Stallings). $e(G) \neq 0$ ならば G の中心は有限位数となる。

5. Coxeter 群

この節では Coxeter 群に関する概念を準備します。Coxeter 群に関しては詳しくは[9]を参照してください。まず Coxeter 群の定義を与えます。

定義 5.1. Sを有限集合,m を $S \times S$から自然数または形式的な記号 ∞ への写像で

(1) $m(s,t) = m(t,s)$ $(s,t \in S)$
(2) $m(s,s) = 1$ $(s \in S)$
(3) $s \neq t$ なら $2 \leq m(s,t) \leq \infty$

を満たすものとします。このとき

$$W = < s \in S | (s \cdot t)^{m(s,t)} = 1 \text{ if } m(s,t) \neq \infty >$$

という表示で定義された群を **Coxeter 群**とよびます。また (W,S) を **Coxeter system** といいます。

注意 3. Wは *involution(*位数 *2* の元*)* により生成されます。

例 5.1. 直交群 $O(n)$ の (いくつかの) 鏡映により生成される有限部分群を有限鏡映群といいます。有限位数の Coxeter 群は有限鏡映群となり, 逆に有限鏡映群は Coxeter 群の構造をもちます。有限鏡映群は完全に分類されておりその位数もわかっています。

例 5.2. Sが二つの元 $\{s,t\}$ からなるとき Wは位数 $2m(s,t)$ の二面体群 ($m(s,t) < \infty$ のとき) か $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($m(s,t) = \infty$ のとき) となります。

例 5.3. 完全三角群は Coxeter 群です (表示からあきらか)。

定義 5.2. (W,S) を Coxeter system とします。$T \subset S$に対し W_Tを Tによって生成される Wの部分群とし W_Tを**放物的部分群 (parabolic subgroup)** と呼びます。とくに $W_\emptyset = \{1\}$, $W_S = W$。

注意 4. 放物的部分群 W_Tに対して (W_T, T) は *Coxeter system* となります。関係を与える写像 $T \times T \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は m を $T \times T$に制限したものになります。

例 5.4. 完全三角群 $T^*(a,b,c)$ の放物的部分群は自明な部分群, 位数 2 の巡回群が 3 個, 二面体群が 3 個, それに T^* 自身からなります。

6. Coxeter 群の Euler 数 (1)

§1 でふれたように Coxeter 群の Euler 数ははじめに J.-P. Serre によって研究されました[10]。Serre は Coxeter 群が VFL 型の群であることを証明し，また Coxeter 群の Euler 数の計算式を得ました。ここでは Chiswell によって与えられた計算式を引用します[6]。

定理 3 (Chiswell). (W,S) を *Coxeter system* とする。Wの位数が無限大のとき

$$e(W)=\sum_{\substack{T\subset S\\ |W_T|<\infty}}(-1)^{|T|}e(W_T)=\sum_{\substack{T\subset S\\ |W_T|<\infty}}(-1)^{|T|}\frac{1}{|W_T|}$$

有限鏡映群の位数はわかっているので，与えられた Coxeter 群 Wの Euler 数は上の式により計算できます。

さらに Serre は Coxeter 群の Poincaré 級数と Euler 数との関係を与えました。Coxeter system (W,S) に対して

$$g(t)=\sum_{w\in W}t^{l(w)}$$

とおきます。ここで $l(w)$ は wをあらわす reduced word の長さの最小です。$g(t)$ は (W,S) の **Poincaré 級数**と呼ばれます。そのとき

例 6.1 (J.-P. Serre). Coxeter 群 Wに対して

$$e(W)=\frac{1}{g(1)}$$

が成り立つ。

一般の VFL 型の群に対してはこのような性質は成り立ちません ([8] を参照)。

7. Coxeter 群の Euler 数 (2)

Coxeter system (W,S) に対して

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}(W,S)=\{\emptyset\neq T\subset S: W_T\text{の位数は有限}\}$$

とおきます。$\mathcal{F}$は包含関係により poset となります。さらに$\mathcal{F}$は頂点の集合をSとする抽象単体的複体とみなせます ($T\in\mathcal{F}$で元の個数が$i+1$のものを$\mathcal{F}$のi-単体とみる)。

例 7.1. $\mathcal{F}=\mathcal{F}(W,S)$ の例をいくつか書いておきます。

(1) 有限鏡映群のとき $\mathcal{F}=\Delta^{|S|-1}$。ただし$\Delta^n$は標準 n-単体。

(2) 無限位数の完全三角群 $T^*(a,b,c)$ に対して $\mathcal{F}=\partial\Delta^2$となります。ただし$\partial\Delta^2$は$\Delta^2$の境界をあらわします (三角形になっています)。

(3) [12] に $\mathcal{F}=\partial\Delta^3$ となる Coxeter 群の一覧がのってます。

注意 5. 与えられた有限複体 K に対して $\mathcal{F}(W,S)=K$ となる *Coxeter system* (W,S) が存在するかどうかはわかりません。しかし K が *flag complex* ならば存在することがわかります。

単体的複体 K に対して K の相異なる頂点 $v_0,\cdots,v_n$ が互いに辺 *(1-*単体*)* で結ばれているならば $\{v_0,\cdots,v_n\}$ は n-単体を張るとき K は *flag complex* といいます。任意の単体的複体 K の重心細分は *flag complex* となっています。

さて $\mathcal{F}$ の構造から $e(W)$ を評価することを考えます。もし (W,S) が有限鏡映群ならば $|W|\geq 2^{|S|}$ なります。上の計算式を使うと, 与えられた単体的複体 K に対して $\mathcal{F}(W,S)=K$ となる Coxeter 群の Euler 数 $e(W)$ は

$$1-\sum_{i:\text{even}}\frac{f_i(K)}{2^{i+1}}\leq e(W)\leq 1+\sum_{i:\text{odd}}\frac{f_i(K)}{2^{i+1}} \tag{2}$$

という不等式を満たすことがわかります。ただし $f_i(K)$ は K の i-単体の個数です。下の例でわかるようにこれは最良の評価ではありません。

例 7.2 (完全三角群). $K=\partial\Delta^3$ としましょう。この場合 $\mathcal{F}(W,S)=K$ となる Coxeter 群は無限位数の完全三角群です。この Euler 数を式 (2) で評価すると

$$-\frac{1}{2}\leq e(W)\leq\frac{7}{4}$$

となりますが, 完全三角群の Euler 数の公式 (1) から

$$-\frac{1}{2}< e(W)\leq 0 \tag{3}$$

が best-possible な評価式となることがわかります。

このように一般には $\mathcal{F}$ を固定しても $e(W)$ の取り得る値は幅をもちます。ところが M. W. Davis [7] の結果から次の事実が得られます。

定理 4. $\mathcal{F}(W)$ が偶数次元の *generalized homology* 球面ならば $e(W)=0$。

ここで単体的複体 K が n 次元の generalized homology 球面であるとは

(1) K は n 次元の球面と同じホモロジー群をもつ。

(2) K の i-単体のリンクは $(n-i+1)$ 次元の球面と同じホモロジー群をもつ。

を満たすことをいいます (Cohen-Macaulay 複体ともいいます)。球面の単体分割はもちろん generalized homology 球面となります。

注意 6. 定理の仮定は評価式 (2) や (3) とは異なり, $\mathcal{F}$は $2n$ 次元の球面の単体分割であれば何でもよいことに注意してください。定理と対照的なことに$\mathcal{F}$が円 S^1の単体分割という仮定のもとでは$e(W)$ はいくらでも小さくなりえます。

私はM. W. Davis の結果を一般化して次の結果を得ることができました。

定理 5. (W, S) を *Coxeter system* とする。$\mathcal{F}(W, S)$ が連結な偶数次元閉多様体 Mの*PL*-三角分割ならば

$$e(W) = 1 - \frac{\chi(M)}{2}.$$

ここで$\mathcal{F}$が PL-三角分割とは任意の単体$T \in \mathcal{F}$に対してそのリンク $Lk_{\mathcal{F}}T$が $(2n - |T| - 2)$ 次元の球面の単体分割であることをいいます。

定理の仮定を満たす Coxeter 群が存在しないとこまるわけですが, それは以下のように保証されます。

例 7.3. 単体的複体 Kが flag complex (注意5を参照) に対して $\mathcal{F}(W, S) = K$となる Coxeter system (W, S) が存在します。実際Sを Kの頂点全体の集合 (0-skelton) として

$$m(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 & s_1 = s_2 \\ 2 & \{s_1, s_2\} \text{ が 1-単体} \\ \infty & \text{その他}. \end{cases}$$

とおけば得られる Coxeter system はこの条件を満たします。このように$m(s, t) = 2$ または∞ となる Coxeter 群は right-angled と呼ばれています。

任意の単体的複体の重心細分は flag complex なので定理の仮定を満たす Coxeter 群はいくらでもあることがわかります。

8. 多様体の単体分割

定理5の逆を考えることにしましょう。Kを flag complex, (W, S) を例7.3のように構成した right-angled な Coxeter 群とします。right-angled であるなら有限位数の放物的部分群 W_T $(T \in S)$ は $W_T = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|T|}$なので, Euler 数 $e(W)$ は flag complex K の単体の数だけできまります。具体的には

$$e(W) = 1 + \sum_i \left(-\frac{1}{2}\right)^{i+1} f_i(K), \tag{4}$$

ただし $f_i(K)$ は Kの i-単体の個数となります。これより次の系を得ます。

系. Kを $2n$ 次元閉多様体の PL 単体分割, $f_i(K)$ を Kの重心細分の i-単体の個数とする。そのとき

$$\chi(K) = \sum_i \left(-\frac{1}{2}\right)^i f_i(K).$$

一般に Kが n 次元の閉多様体の単体分割ならば

$$\chi(K) = \sum_i (-1)^i f_i(K)$$
$$f_{n-1}(K) = \frac{n+1}{2} f_n(K)$$

が成り立ちます。多様体の次元が 4 以上のとき系の式は上の二つの式とは独立です (後者から前者を導くことはできません)。

球面の単体分割の場合には Dehn-Sommerville 方程式が有名ですが, 一般の多様体に関しての結果は私の探した範囲では他に見当たりませんでした (知っている人がいたら教えてください)。

9. COXETER 群の EULER 数とグラフの種数

最後に $\mathcal{F}(W,S)$ が 1 次元複体, すなわちグラフになるときを考察します。$\mathcal{F}(W,S)$ がグラフになることと Sの任意の相異なる元 s,t,u に対して

$$\frac{1}{m(s,t)} + \frac{1}{m(t,u)} + \frac{1}{m(u,v)} \leq 1$$

とは同値です (ただし $1/\infty = 0$ と解釈します)。このような Coxeter 群には aspherical という名前がついています。

さてグラフΓに対して $E(\Gamma)$ をΓの辺の集合としましょう。$\Gamma = \mathcal{F}(W,S)$ がグラフならば

$$1 - \frac{|S|}{2} < e(W) \leq 1 - \frac{|S|}{2} + \frac{|E(\Gamma)|}{4} \tag{5}$$

が成り立ちます。左の不等号は best-possible だが右側は必ずしもそうではありません。

私はグラフの次の評価式を得ることができました。グラフΓは十分大きなな種数の有向閉曲面に埋め込めます。そのような曲面の種数の最小をΓの種数と呼び$\gamma(\Gamma)$ と書きます。種数が 0 であることと平面グラフであることは同値です。

定理 6. *Coxeter system* (W,S) に対し $\mathcal{F} = \mathcal{F}(W,S)$ が連結なグラフのとき

$$e(W) \leq \gamma(\mathcal{F})$$

がなりたつ。

上の不等式は次の例の意味で best-possible です。

例 9.1. 任意の非負整数 n に対して Coxeter 群 W で次の条件を満たすものがあります:

(1) $\mathcal{F}$ は種数 n のグラフ

(2) $e(W) = n$

構成には完全二部グラフを用います。完全二部グラフ $K_{m,n}$ に対してその種数は

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil$$

で与えられます。Coxeter 群 (W, S) を $S = S_1 \sqcup S_2$, $|S_1| = m$, $|S_2| = n$,

$$m(s,t) = \begin{cases} 1 & s = t \\ 2 & s \in S_i, t \in S_j, i \neq j \\ \infty & \text{その他} \end{cases}$$

により与えると $\mathcal{F}(W, S) = K_{m,n}$ でその Euler 数は

$$e(W) = \frac{(m-2)(n-2)}{4}$$

となります。完全グラフのときにも同様のことが言えます。

References

1. H. Bass, Euler characteristics and characters of discrete groups, *Invent. Math.* **35** (1976), 155–196
2. ———, Traces and Euler characteristics, Homological group theory (C. T. C. Wall ed.), *London Math. Soc. Lecture Notes 36*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979, 1–26.
3. K. S. Brown, Euler characteristics of discrete groups and G-spaces, *Invent. Math.* **27** (1974) 229–264.
4. ———, Groups of virtually finite dimension, Homological group theory (C. T. C. Wall ed.), *London Math. Soc. Lecture Notes 36*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979, 27–70.
5. ———, *Cohomology of Groups*, Graduate texts in mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.
6. I. M. Chiswell, The Euler characteristic of graph products and of Coxeter groups, Discrete groups and geometry (Birmingham, 1991), *London Math. Soc. Lecture Notes 173*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 36–46,
7. M. W. Davis, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, *Ann. of Math.* **117** (1983), 293–324.
8. W. J. Floyd, S. P. Plotnick, Growth functions on Fuchsian groups and the Euler characteristics, *Invent. Math.***86** (1987), 1–29.

9. J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
10. J.-P. Serre, Cohomologie de groupes discrets, Ann. of Math. Studies, vol. 70, Princeton University Press, Princeton, 1971, 77–169.
11. J. Stallings, Centerless groups–an algebraic formulation of Gottlieb's theorem, *Topology* 4 (1965), 129–134.
12. W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton University (preprint 1978).
13. C. T. C. Wall, Rational Euler characteristics, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **57** (1952), 119-145.
14. H. Zieschang, E. Vogt, H. D. Coldewey, Surfaces and planar discontinuous groups, *Lecture Notes in Math.* 835, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

福岡大学理学部応用数学科
E-mail address: akita@ssat.fukuoka-u.ac.jp