数理解析研究所講究録
962巻 1996年 62-70

対称群の group association scheme の intersection numbers による特徴付け

冨山正人（九州大学大学院数理学研究科）
山崎則男（九州大学大学院数理学研究科）

1 序

association scheme の研究において特に重要視されている問題の１つに既知の association scheme の intersection numbers $\{p_{i,j}^k\}_{i,j,k}$ による特徴付け問題がある。これまでこの問題に関して、 P- and Q- polynomial association scheme の場合には多くの結果が得られている。（まだ全ての既知の P- and Q- polynomial association scheme について解決している訳ではない。）しかし、 P- and Q- polynomial association scheme 以外のものについてはまだほとんどなされていない。一昨年、本研究者の一人である冨山正人により、４次対称群と５次交代群の group association scheme （２章で定義する。）において解決した。([7] を参照。) 具体的に述べると、５次交代群の場合はその intersection numbers を持つ association scheme はそれに限り、４次対称群の場合はそれ以外にも２つの association scheme が存在する。その２つはこれまで知られていなかった association scheme である。（平成５年３月の数理研での代数的組合せ論研究集会にて講演発表。）なお、次数３以下の対称群、次数４以下の交代群の場合は自明である。

group association scheme の intersection numbers による特徴付け問題は有限群における「指標表を１つ与えた時、それを持つ群を決定せよ。」という問題と類似した問題と言える。群の指標表を与えることとその群の group association scheme の intersection numbers を与えることは同じことである。（計算公式がある。）ただし、上の２つの問題は全く異なる問題である。例えば dihedral group D_8 と quaternion group Q_8 のように、群としては非同型でも、 group association scheme が同型になるような例もある。一方、４次対称群は指標表から群としては特徴付けされているが、４次対称群の group association scheme と同じ intersection numbers を持つ association scheme は３つある。

本研究の結果は次の通り。

主定理 ([8]、[9])
次数5以上の対称群の group association scheme と全く同じ intersection numbers を持つ association scheme はそれに限る。

2 定義、用語、準備

定義
有限集合 X と X 上の $d+1$ 個の関係 R_i $(i=0,1,\cdots,d)$ の組 $\mathcal{X}=(X,\{R_i\}_{0\leq i\leq d})$ で以下の4条件 (i)–(iv) を満たすものを association scheme と呼ぶ。

(i) $R_0=\{(x,x)\ :\ x\in X\}$。

(ii) $X\times X=R_0\cup R_1\cup\cdots\cup R_d$ かつ $R_i\cap R_j=\phi$ $(i\neq j)$。

(iii) 各 $i\in\{0,1,\cdots,d\}$ に対し、${}^tR_i=\{(x,y)\ :\ (y,x)\in R_i\}$ と定義すると ${}^tR_i=R_j$ となる $j\in\{0,1,\cdots,d\}$ がある。

(iv) 各 $i,j,k\in\{0,1,\cdots,d\}$ に対して、
$|\{z\in X\ :\ (x,z)\in R_i,(z,y)\in R_j\}|$ は $(x,y)\in R_k$ のもとで x, y のとりかたによらず i, j, k のみにより定まる定数 p_{ij}^k となる。

この p_{ij}^k 達を intersection numbers と呼ぶ。
さらに、次の条件 (v) を満たすものを commutative association scheme と呼び、条件 (vi) を満たすものを symmetric association scheme と呼ぶ。

(v) 各 $i,j,k\in\{0,1,\cdots,d\}$ に対して、$p_{ij}^k=p_{ji}^k$。

(vi) 各 $i\in\{0,1,\cdots,d\}$ に対し、${}^tR_i=R_i$。

定義
G を任意の有限群、$C_0=\{id\},C_1,\cdots,C_d$ を G の共役類全体とする。G の上の関係 R_i $(i=0,1,\cdots,d)$ を $R_i=\{(x,y)\ :\ yx^{-1}\in C_i\}$ で定義する。

このとき $\mathcal{X}(G) = (G, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ は commutative association scheme になる。これを群 G の group association scheme と呼ぶ。

n を5以上の自然数、 S_n を n 次の対称群とする。又、$\Lambda = \Lambda(n)$ を自然数 n の分割全体の集合とする。 S_n の共役類 と $\mathcal{X}(S_n)$ の関係を Λ の元で番号付けする事にし、$\mathcal{X}(S_n) = (S_n, \{R^*_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ を S_n の group association scheme、 $\mathcal{X} = (X, \{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ を $\mathcal{X}(S_n)$ と同じ intersection numbers を持つ association scheme とする。ここで、$\mathcal{X}(S_n)$ も $\mathcal{X}$ も symmetric association scheme となる事が intersection numbers からすぐにわかる。

$x \in X$, $u \in S_n$, $\lambda \in \Lambda$ について、

$$R_\lambda(x) = \{y \in X : (x,y) \in R_\lambda\}$$
$$R^*_\lambda(u) = \{v \in S_n : (u,v) \in R^*_\lambda\}$$

としよう。すると $R^*_\lambda(id) = C_\lambda$ (分割 $\lambda \in La$ に対応する S_n の共役類) となる。

以降 $\lambda = (1,\cdots,1,i_1,\cdots,i_m) \in \Lambda$ (ただし、$i_1,i_2,\cdots,i_m \ge 2$) について $\lambda = (i_1,\cdots,i_m)$ と書くことにする。例えば互換に対応する S_n の共役類は $R^*_{(2)}(id)$ となる。又、上の λ について

$$\varphi(\lambda) = \sum_{s=1}^{m} (i_s - 1)$$

とする。

$\Gamma = (X, R_{(2)})$ と $\Gamma^* = (S_n, R^*_{(2)})$ を2つのグラフとしよう。目標は $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}(S_n)$ が同型になることを示すことであるが、次の命題が容易に得られる事により Γ と Γ^* が同型である事を示せば良いことになる。

命題

$\Gamma \simeq \Gamma^* \Longrightarrow \mathcal{X} \simeq \mathcal{X}(S_n)$

S_n の元

$$u = (\alpha_1^{(1)}\cdots\alpha_{i_1}^{(1)})(\alpha_1^{(2)}\cdots\alpha_{i_2}^{(2)})\cdots(\alpha_1^{(m)}\cdots\alpha_{i_m}^{(m)}) \in R^*_{(i_1,i_2,\cdots,i_m)}(id)$$

について、

$$u(\alpha_k^{(s)}) = (\alpha_1^{(1)}\cdots\alpha_{i_1}^{(1)})\cdots(\alpha_1^{(s)}\cdots\alpha_{k-1}^{(s)}\alpha_{k+1}^{(s)}\cdots\alpha_{i_s}^{(s)})\cdots(\alpha_1^{(m)}\cdots\alpha_{i_m}^{(m)}).$$

$$u[(\alpha_h^{(s)}\cdots\alpha_{h+f-1}^{(s)})(\alpha_{h+f}^{(s)}\cdots\alpha_{h-1}^{(s)})]$$
$$=(\alpha_1^{(1)}\cdots\alpha_{i_1}^{(1)})\cdots(\alpha_h^{(s)}\cdots\alpha_{h+f-1}^{(s)})(\alpha_{h+f}^{(s)}\cdots\alpha_{h-1}^{(s)})\cdots(\alpha_1^{(m)}\cdots\alpha_{i_m}^{(m)}).$$

とする。$(1\le s\le m,\ 1\le k\le i_s,\ 1\le f\le i_s-1,\ 1\le h\le i_s)$
例えば、

$$u=(\,1\,2\,3\,4\,)(\,5\,6\,)\in R^*_{(2,4)}(id)$$

のとき、

$$\begin{aligned} u(2) &= (\,1\,3\,4\,)(\,5\,6\,)\\ u(5) &= (\,1\,2\,3\,4\,)\\ u[(\,2\,3\,)(\,4\,1\,)] &= (\,2\,3\,)(\,4\,1\,)(\,5\,6) \end{aligned}$$

となる。

ここで、$u\in R^*_{(i_1,\cdots,i_m)}(id)$ とし、$v\in R^*_\mu(id)$ とする。ただし、$\mu\in\Lambda$、$\varphi(\mu)\le\varphi(i_1,\cdots,i_m)$ とする。このとき $(u,v)\in R^*_{(2)}$ となるならば、$v=u(\alpha_k^{(s)})$ となるかとなるか $v=u[(\alpha_h^{(s)}\cdots\alpha_{h+f-1}^{(s)})(\alpha_{h+f}^{(s)}\cdots\alpha_{h-1}^{(s)})]$ どちらかである事が容易にわかる。
$(1\le s\le m,\ 1\le k\le i_s,\ 1\le f\le i_s-1,\ 1\le h\le i_s)$

よって次の補題が得られる。

補題

(1) $\lambda=(i_1,\cdots,i_m)\in\Lambda$ とし、$\mu\in\Lambda$ は $\varphi(\mu)\le\varphi(\lambda)$ を満たすとする。このとき $p^\lambda_{(2),\mu}\ne 0$ となる必要十分条件は $\varphi(\mu)=\varphi(\lambda)-1$ であり、かつ次の条件のうち１つが成り立つ事である。

(i) $\mu=(i_1,\cdots,i_{s-1},i_s-1,i_{s+1},\cdots,i_m)\quad(1\le s\le m,\ i_s\ge 3)$
(ii) $\mu=(i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_m)\quad(1\le s\le m,\ i_s=2)$
(iii) $\mu=(i_1,\cdots,i_{s-1},f,i_s-f,i_{s+1},\cdots,i_m)$
$(1\le s\le m,\ i_s\ge 4,\ 2\le f\le i_s-2)$

(2) $\lambda\in\Lambda$ とする。このとき、$(x,y)\in R_\lambda$ となる任意の $x,\ y\in X$ に対して、$\partial(x,y)=\varphi(\lambda)$ となる。（∂ はグラフ Γ 上の距離。）特に、Γ は直径 $d(\Gamma)=n-1$ の連結な２部グラフとなる。

上の補題（2）により、例えば $x,\, y \in \Gamma$ に対して、

$$\partial(x,y) = 2 \Longleftrightarrow (x,y) \in R_{(2,2)} \cup R_{(3)}$$

となる。これは、対称群が３互換の共役類を持つ事を意味している。

3 Spherical Representation

この章では、主定理を証明するための主な道具となる association scheme の spherical representation （association scheme の球面への埋め込み）を紹介する。

命題

G を一般の有限群、χ を G の１つの既約指標とする。又、$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ を group association scheme $\mathcal{X}(G)$ と全く同じ intersection numbers を持つ commutative association scheme とする。又、$\mathcal{E}$ を $|X|$ 次元エルミート空間、$\langle\ ,\ \rangle$ を標準内積とする。このとき、次を満たす写像 $^- : X \to \mathcal{E}$ が存在する。

$$(x,y) \in R_i \Longleftrightarrow \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \chi(a_i)$$

ここで、 a_i は共役類 C_i の代表元。

特に、 χ が実指標ならば、$\mathcal{E}$ は $|X|$ 次元ユークリッド空間としてよい。

証明

一般に $\mathcal{X}$ の Bose-Mesner 代数には、次のような原始冪等元が存在する。（[1] の Chapter II.7 を参照。）

$$E = \frac{1}{|X|}\sum_{i=0}^{d} \chi(id)\chi(a_i)A_i.$$

ただし、 A_i は R_i における隣接行列。これより、$\overline{x} = \sqrt{\frac{|X|}{\chi(id)}}E\hat{x}$ （$\hat{x}$ は y 成分が $\delta_{x,y}$ である長さ $|X|$ の列ベクトル。）となる写像 $^- : X \to \mathcal{E}$ が上を満たすものである。 □

次数 n の対称群は n 点集合上の2重可移置換群であるので、各分割 $\lambda=(i_1,\cdots,i_s)\in\Lambda$ に対応する共役類について、

$$\chi(\lambda)=n-1-\sum_{s=1}^{m}i_s$$

となる実指標が存在する。本研究ではこれについての spherical representation $^-:X\to\mathcal{E}$ （$\mathcal{E}$ は $|X|$ 次元ユークリッド空間）が主定理の証明のための強力な武器となる。

4 証明の概略

以下、証明の概略を述べる。

(Step 1.)

グラフ $\Gamma=(X,R_{(2)})$ 内に $(x_1,x_3)\in R_{(3)}$, $(x_2,x_4)\in R_{(2,2)}$ となるような4角形 $x_1\sim x_2\sim x_3\sim x_4\sim x_1$ は存在しない。

この証明は主定理の証明の中でも最も複雑な部分となっている。([8] を参照。) なお3章で述べた spherical representation がここでも強く効いている。

以下は [9] を参照。

(Step 2.)

任意の点 $x\in X$ に対し、グラフ $\Delta_x=(R_{(2)}(x),R_{(2,2)})$ は Johnson graph $J(n,2)$ と同型となる。

これは、グラフ Γ の点の近傍の association scheme としての構造が、Γ^* のそれと一致する事を意味する。なお、 $J(n,2)$ はパラメーター

$$(p^{(0)}_{(2),(2)},p^{(2)}_{(2),(2,2)},p^{(2,2)}_{(2),(2,2,2)},p^{(3)}_{(2),(2,3)})=\left(\binom{n}{2},\binom{n-2}{2},\binom{n-4}{2},\binom{n-3}{2}\right)$$

の strongly regular graph であり、このパラメーターによる特徴付けの結果 ([2],[3],[4],[5],[6] を参照) を証明で使う。この証明のために次の spherical representation の補題が重要である。

補題

Γ における４角形 $x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_4 \sim x_1$ が $(x_1, x_3) \in R_{(2,2)}$ と $(x_2, x_4) \in R_{(2,2)}$ を満たすならば、$\overline{x_1} - \overline{x_2} + \overline{x_3} - \overline{x_4} = \overline{0}$ となる、ただし、$\overline{0}$ は零ベクトル。

以降 X の１点を固定し、それを id と名付ける。

(Step 3.) 〔帰納法〕

$0 \leq l \leq d(\Gamma)$ に対し、次の条件 $T(l)$ を満たす。

条件 $T(l)$：

(i) $\varphi(i_1, \cdots, i_m) \leq l$ を満たす $(i_1, \cdots, i_m) \in \Lambda$ に対して、$R_{(i_1,\cdots,i_m)}(id)$ の点と $R^*_{(i_1,\cdots,i_m)}(id)$ の点を同一視できる。

(ii) Γ の誘導部分グラフ $\left(\bigcup^{l}_{\varphi(i_1,\cdots,i_m)=0} R_{(i_1,\cdots,i_m)}(id), R_{(2)}\right)$ と Γ^* の誘導部分グラフ $\left(\bigcup^{l}_{\varphi(i_1,\cdots,i_m)=0} R^*_{(i_1,\cdots,i_m)}(id), R^*_{(2)}\right)$ が同型になる。
つまり、$\varphi(i_1, \cdots, i_m) \leq l$ となっている
Γ の点 $u = (\alpha^{(1)}_1 \cdots \alpha^{(1)}_{i_1}) \cdots (\alpha^{(m)}_1 \cdots \alpha^{(m)}_{i_m}) \in R_{(i_1,\cdots,i_m)}(id)$ と
$\partial(id, v) = \partial(id, u) - 1$ となる Γ の点 v に対し、$u \sim v$ となる必要十分条件が、$v = u(\alpha^{(s)}_k)$ となるか $v = u[(\alpha^{(s)}_h \cdots \alpha^{(s)}_{h+f-1})(\alpha^{(s)}_{h+f} \cdots \alpha^{(s)}_{h-1})]$ となることである。
$(1 \leq s \leq m,\ 1 \leq k \leq i_s,\ 1 \leq f \leq i_s - 1,\ 1 \leq h \leq i_s)$

(iii) $\varphi(i_1, \cdots, i_m) \leq l + 1 \leq d(\Gamma)$ となる
$u = (\alpha^{(1)}_1 \cdots \alpha^{(1)}_{i_1}) \cdots (\alpha^{(m)}_1 \cdots \alpha^{(m)}_{i_m}) \in R^*_{(i_1,\cdots,i_m)}(id)$ に対し、次が成り立つ。
$(1 \leq s, s' \leq m,\ 1 \leq k, k', h \leq i_s,\ 1 \leq k'' \leq i_{s'},\ 2 \leq f \leq i_s - 2)$

(iiia) $\left(u(\alpha^{(s)}_k), u(\alpha^{(s)}_{k+1})\right) \in R_{(3)}$ 　 ($i_s \geq 3$ のとき)

(iiib) $\left(u(\alpha^{(s)}_k), u(\alpha^{(s)}_{k'})\right) \in R_{(2,2)}$ 　 ($i_s \geq 4,\ |k - k'| \neq 1, i_s - 1$ のとき)

(iiic) $\left(u(\alpha^{(s)}_k), u(\alpha^{(s')}_{k''})\right) \in R_{(2,2)}$ 　 ($s \neq s'$ のとき)

(iiid) $\left(u(\alpha^{(s)}_k), u[(\alpha^{(s)}_h \cdots \alpha^{(s)}_{h+f-1})(\alpha^{(s)}_{h+f} \cdots \alpha^{(s)}_{h-1})]\right) \in R_{(3)}$
($i_s \geq 4,\ 2 \leq f \leq i_s - 2$ のとき)

条件 $T(d(\Gamma))$ の (ii) は正にグラフ Γ と Γ^* が同型であるという主張である。

帰納法において (ii) の証明については次の補題を使う。（これは spherical representation より容易に得られる。）

補題

$x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_4 \sim x_1$ を Γ における 4 角形で、$(x_1, x_3) \in R_{(2,2)}$、$(x_2, x_4) \in R_{(2,2)}$ を満たすものとする。又、$y \in X$ を $y \not\sim x_1$、$\partial(y, x_2) = \partial(y, x_4) = 2$ を満たす点とする。このとき次が成り立つ。

(1) $(y, x_2) \in R_{(3)}$ か $(y, x_4) \in R_{(3)}$ ならば $y \sim x_3$ となる。

(2) もし $x_4 \sim z \sim y$、$x_2 \not\sim z$、$(x_1, z) \in R_{(2,2)}$ となる点 $z \in X$ があるならば $y \sim x_3$ となる。

同じく (iii) については次の補題を使う。（これも spherical representation より容易に得られる。）

補題

$x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_4 \sim x_1$ を Γ における 4 角形で、$(x_1, x_3) \in R_{(2,2)}$、$(x_2, x_4) \in R_{(2,2)}$ を満たすものとする。$x_1 \sim x_2 \sim x_5 \sim x_6 \sim x_1$ を Γ における 4 角形とする。このとき次が成り立つ。

(1) $(x_4, x_6) \in R_{(3)}$ ならば $(x_3, x_5) \in R_{(3)}$。

(2) $(x_4, x_6) \in R_{(2,2)}$ ならば $(x_3, x_5) \in R_{(2,2)}$。

参考文献

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I*, Benjamin-Cummings, California, 1984.

[2] L. C. Chang, "The uniqueness and nonuniqueness of the trianglar association schemes", Sci. Record. (New Ser.) **3** (1959), 604-613.

[3] L. C. Chang, "Association schemes of partially balanced designs with parameters $v = 28$, $n_1 = 12$, $n_2 = 15$ and $p^2_{11} = 4$", Sci. Record. (New Ser.) **4** (1960), 12-18.

[4] W. S. Connor, "The uniqueness of the trianglar association scheme", Ann. Math. Stat. **29** (1958), 262-266.

[5] A. J. Hoffman, "On the uniqueness of the trianglar association scheme", Ann. Math. Stat. **31** (1960), 492-497.

[6] S. S. Shrikhande, "On a characterization of the trianglar associaiton scheme", Ann. Math. Stat. **30** (1959), 39-47.

[7] M. Tomiyama, "Characterization of the group association scheme of A_5 by its intersection numbers", to appear in J. Math. Soc. Japan.

[8] M. Tomiyama and N. Yamazaki, "On a condition of the group association scheme of the symmetric group", in preparation.

[9] M. Tomiyama and N. Yamazaki, "Characterization of the group association scheme of the symmetric group", preprint.

冨山正人
九州大学大学院数理学研究科数理学専攻
〒812-81 福岡市東区箱崎６丁目１０番１号
e-mail：tomiyama@math.kyushu-u.ac.jp

山崎則男
九州大学大学院数理学研究科数理学専攻
〒812-81 福岡市東区箱崎６丁目１０番１号
e-mail：norio@math.kyushu-u.ac.jp