数理解析研究所講究録
965巻 1996年 134-144

INTRODUCTION TO BLOCH-KATO CONJECTURE

広島大学理学部　都築 暢夫　(TSUZUKI NOBUO)

§1. はじめに

Bloch-Kato予想とはモチーフのL-関数の特殊値を数論的不変量を用いて表すというものである。これは代数体のζ-関数の極限公式が超越的な数である単数基準や類数等を用いて表せることやアーベル多様体に対するBirch, Swinerton-Dyer予想のモチーフへの一般化にあたる。この予想はTamagawa、Weil、Onoらにより研究されてきた代数群のTamagawa数公式に類似する形で述べられる。(Artin motifはこの場合に含まれる。)

代数群の場合はadelic points上にTamagawa測度と呼ばれるものが定まる。Tamagawa測度の定義にあたってはexponential写像が重要な役割を果たし、局所的な整数点のvolumeがL-関数の局所因子の値になる。代数群のadelic points(正しくはその一部)をglobal pointsで割ったもののvolumeがTamagawa数であり、それは$\sharp\mathrm{Pic}_{tor}/\sharp Ш$になることが多くの場合知られている。(代数体上の$\mathbf{G}_m$の場合、Шが類数、$\mathrm{Pic}_{tor}$が1のべき根の数にあたる。)Tamagawa数公式はその定義から、代数群のL-関数の$s=1$での特殊値に関する公式に書き換えられる[We]。

モチーフに対するTamagawa数公式の自然な拡張を図ることは、まず最初にBlochにより行われた。Blochは1980年ごろにアーベル多様体のBirch, Swinerton-Dyer予想をheight pairingのbiextensionを用いた解釈を利用してTamagawa数公式風に書き換えをした[Bl1]。アーベル多様体はモチーフの典型例であるとともに群でもあり、有理点やexponential写像等の代数群の場合の類似がかなり自然に進む。それに対して一般のモチーフの場合にはそれらの概念は素朴にはなく、新たな解釈が必要になる。Bloch-Kato予想では、有限素点上ではp進Hodge理論、無限素点上ではHodge理論を用いることによりそれらを定義することを可能にしている。また、無限素点および大域的有理点の解釈の中にBeilinson予想が含まれるなど、L-関数の特殊値に関する旧来の予想を含んでいる。WilesらによるFermatに関する仕事では、楕円曲線の対称積のШの位数がそのL-関数の値で表されることを示して谷山-志村予想を導かれた[Wi][TW]。

最近では、Iwasawa 理論のモチーフへの拡張として、L-関数の特殊値の p-進的性質の研究も盛んである。([K1][P] 等) Bloch-Kato 予想と Iwasawa 理論はどちらも L-関数の値の起源を知るという上で不可分な関係にあり、車輪の両輪としてこの分野の推進の原動力になっている。

§2. Local motivic points

この節では p 進 Hodge 理論を用いて有限素点上の motivic points の定義の準備をする。p 進 Hodge 理論について詳しくは [FI][T] 等を見よ。

(2.1) p を素数、K を $\mathbf{Q}_p$ の有限次代数拡大体、G_K で K の絶対 Galois 群とする。K_0 を K に含まれる $\mathbf{Q}_p$ の最大不分岐拡大体、σ を K_0 の Frobenius 写像とする。

素数 l に対して、V が l 進表現であるとは、V が連続 G_K-作用をもつ有限次元 $\mathbf{Q}_l$-vector 空間のことをいう。

$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$、$\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}$ を Fontaine が定義した p 進 period の環とする。p 進表現 V に対して、

$$\mathrm{DR}(V) = H^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V), \qquad \mathrm{DR}(V)^i = H^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^i \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$$
$$\mathrm{Crys}(V) = H^0(K, \mathbf{B}_{\mathrm{crys}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$$

と定める。前者は、減少 filtration 付きの K-vector 空間で、後者は $\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}$ の Frobenius f から定まる σ-linear な射 f をもつ K_0-vector 空間になる。V に対して

$$\dim_K \mathrm{DR}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V \qquad (\dim_{K_0} \mathrm{Crys}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V)$$

のとき、de Rham 表現（crystalline 表現）という。

V の l 進表現に対して、V の特性多項式を

$$P_p(V,u) = \begin{cases} \det(1 - f_K u \mid \mathrm{H}^0(K^{nr}, V)) \in \mathbf{Q}_l[u] & (l \neq p) \\ \det(1 - f^{[K_0:\mathbf{Q}_p]} u \mid \mathrm{Crys}(V)) \in K_0[u] & (l = p) \end{cases}$$

と定める。ここで、f_K は G_K の geometric Frobenius (剰余体上で $p^{[K_0:\mathbf{Q}_p]}$ 乗写像の逆写像)、K^{nr} は K の最大不分岐拡大体とする。

V を l 進表現、T ($\iota : T \to V$) をその $\mathbf{Z}_l$-lattice とする。$H^1(K,V)$ ($H^1(K,T)$) の finite part を $l \neq p$ のときは

$$H^1_f(K,V) = \ker(H^1(K,V) \to H^1(K^{ur},V))$$

$l=p$ のときは

$$H^1_f(K,V)=\ker(H^1(K,V)\to H^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{crys}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V))$$

と定める。ただし、K^{ur}は Kの最大不分岐拡大とする。また、T $(\iota:T\to V)$ を Vの $\mathbf{Z}_l$-lattice とするとき、$H^1(K,T)$ の finite part を

$$H^1_f(K,T)=\iota^{-1}(H^1_f(K,V))$$

とおく。

(2.2) Vを p 進表現とする。G_K-加群の完全列

$$0\longrightarrow \mathbf{Q}_p \xrightarrow[\alpha]{} \mathbf{B}_{\mathrm{crys}}\otimes\mathbf{B}^0_{\mathrm{dR}} \xrightarrow[\beta]{} \mathbf{B}_{\mathrm{crys}}\oplus\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\longrightarrow 0$$

$(\alpha(x)=(x,x)$、$\beta(x,y)=(x-f(x),x-y))$ [BK] に $\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$ して連続コホモロジー $H^*(K,\ )$ をとる。すると、連結準同型から exponential 写像

$$\exp:\mathrm{DR}(V)/\mathrm{DR}(V)^0\to H^1_f(K,V)$$

が導かれる。

例. $V=\mathbf{Q}_p(1)$ とすると、

$$\mathrm{DR}(V)/\mathrm{DR}(V)^0\cong \mathrm{Lie}(\mathbf{G}_m/K)$$
$$H^1_f(K,V)=\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\varprojlim_n O_K^\times/(\vee_K^\times)^{p^n}$$

となり、exponential 写像 exp は通常の p 進局所体の exponential 写像である。

(2.3) Vを $P_p(V,1)\neq 0$ を満たす l進表現とする。

定理. [BK](1) $l\neq p$ ならば $H^1_f(K,V)=0$ となる。さらに、Vが不分岐なら、Vの $\mathbf{Z}_l$-lattice$T$に対して、

$$\sharp H^1_f(K,T)=|P_p(V,1)|_l^{-1}$$

となる。ここで、$|\ |_l$は、$\mathbf{Q}_l$の正規化された絶対値（$|l|_l=l^{-1}$）を表す。

(2) $l=p$ かつ Vが de Rham 表現ならば exponential 写像

$$\exp:\mathrm{DR}(V)/\mathrm{DR}(V)^0\to H^1_f(K,V)$$

は同型になる。さらに、$K=K_0$、Vが crystalline 表現で、Vの $\mathbf{Z}_p$-lattice Tが Fontaine-Laffaille 理論を用いて $\mathrm{DR}(V)$ の O_K-lattice Mから定まるものとする。このとき、M/M^0 の exp による像の volume を 1 とする Haar 測度μを $H^1_f(K,V)$ に入れると

$$\mu(H^1_f(K,T) = |P_p(V,1)|_p^{-1}$$

となる。ここで、$|\ |_p$は、K_0の正規化された絶対値（$|p|_p=p^{-1}$）を表す。

注意. p 進 Hodge 理論で扱うのは通常 $\mathbf{Q}_p$-係数であるが、L-関数の p 進的な性質等を考察するときには $\mathbf{Z}_p$-lattice や torsion の様子を知ることは不可欠である。実は、絶対分岐指数が 1 の局所体では若干の仮定の下で $\mathbf{Z}_p$-係数や torsion も扱うことができる。それが、Fontaine-Laffaille の理論である [FL]。

§3. Global motivic points

(3.1) Xを $\mathbf{Q}$ 上の proper smooth variety とし、$\mathcal{M}=H^m(X)(r)$ を Xから定まる pure motif とする。このとき、weight $w=m-2r$である。

$$V = H^m(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}(2\pi i)^r)$$
$$D = H^m_{dR}(X/Q)(r)$$

とおく。前者は、singular cohomology で、後者は de Rham cohomology の m-ひねり、すなわち、Hodge filtration を

$$\mathrm{Fil}^i D = Fil^{i+r} H^m_{dR}(X/\mathbf{Q})$$

としたものとする。また、Vの $\mathbf{Z}$-lattice を

$$M = H^m(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}(2\pi i)^r)/(tor)$$

とおく。各素数 lに対して、Artin の比較定理から、

$$V_l = V \otimes \mathbf{Q}_l \cong H^m_{et}(X_{\overline{\mathbf{Q}}}, \mathbf{Q}_l)(r)$$

となり、$M_l = M \otimes \mathbf{Z}_l$は $G_{\mathbf{Q}}$-安定な $\mathbf{Z}_l$-lattice となる。ここで、$X_{\overline{\mathbf{Q}}} = X \times_{\mathbf{Q}} \overline{\mathbf{Q}}$を表す。各素点 p に対して、$D_p = D \otimes \mathbf{Q}_p \cong H^m_{dR}(X/\mathbf{Q}_p)(r)$ （$\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$）とおくと、

$$D_p \cong \mathrm{DR}(V_p) \qquad (p<\infty) \quad \text{(Faltings [Fa])}$$
$$D_\infty \cong (V \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C})^+ \qquad (p=\infty) \quad \text{(Hodge 理論)}$$

が成り立つ。ただし、Vには $X(\mathbf{C})$、$\mathbf{Q}(2\pi i)^r$の両者の $G_{\mathbf{R}}$-作用から定まる $G_{\mathbf{R}}$-作用が入り、$(\ )^+$は対角的作用に関する固定部分とする。以下では、$\mathcal{M}$ の L-関数の局所因子 $P_p(V_l,u)$ が lの取り方によらない（bad reduction のところが問題）等の若干の仮定が成り立つとする。（詳しくは [BK] を見よ。）

Sを $\mathbf{Q}$ の無限素点 ∞ を含む素点の有限集合とする。$\mathcal{M}$ の S上の局所因子を除いた L-関数を

$$L_S(\mathcal{M},s)=\prod_{p\notin S}P_p(V_p,p^{-s})^{-1}$$

とおくと、$L_S(\mathcal{M},s)$ は$\Re(s)>w/2+1$ で絶対収束する。以下では、$w\leqq -1$ として $s=0$ における特殊値について考察する。$w\leqq -3$ のときは、$s=0$ は絶対収束域にはいっている。$w=-1$、-2 のときは $L_S(\mathcal{M},s)$ は $s=0$ の周りに解析接続されると仮定する。

一般の代数体上のモチーフから Weil restriction をとることにより、$\mathbf{Q}$ 上のモチーフが得られ、L-関数を考える場合はどちらで考えてもよい。また、weight wの L-関数は全平面に有理型に解析接続され、

$$s\longleftrightarrow w+1-s$$

の型の関数等式を持つことが予想されている。Tate twist

$$L_S(\mathcal{M}(1),s)=L_S(\mathcal{M},s+1)$$

と合わせると、$\mathbf{Q}$ 上の weight が-1 以下のモチーフの $s=0$ での特殊値を考えれば十分であることが解る。また、一般のモチーフは、$H^m(X)(r)$ と projector との組で与えられるが、ここでは簡単のため projector は考えない。

(3.2) Local motivic points.

$\mathcal{M}$ の $\mathbf{Q}_p$上の motivic points$A(\mathbf{Q}_p)$ を

$$A(\mathbf{Q}_p)=\begin{cases} H^1_f(\mathbf{Q}_p,M\otimes_{\mathbf{Z}}\widehat{\mathbf{Z}})=\bigotimes_{l<\infty}H^1_f(\mathbf{Q}_p,M_l) & (p<\infty)\\ (D\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}/(D^0\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{C}+M))^+ & (p=\infty)\end{cases}$$

で定める。各素点 p に対して、exponential 写像

$$\exp:D_p/D_p^0\to A(\mathbf{Q}_p)\otimes\mathbf{Q}_p$$

を、$p<\infty$ のときは§2 の写像で、$p=\infty$ のときは自然な全射で定める。weight wの仮定から、$P_p(V_p,1)\neq 0$ となり、$p<\infty$ のとき exp は同型である。$p=\infty$ のときは局所同型になる。

$\mathbf{Q}$-vector 空間の同型

$$\omega : \det_{\mathbf{Q}} D/D^0 \to \mathbf{Q}$$

を一つ固定することにより、exp を通して $A(\mathbf{Q}_p)$ 上に Haar 測度$\mu_{p,\omega}$が定まる。無限素点を含む十分大きな素点の有限集合 Sを取れば、§2 の定理から、$p \notin S$に対して、

$$\mu_{p,\omega}(A(\mathbf{Q}_p)) = P_p(V_p, 1)$$

となる。

(3.3) $w \leqq -3$ の場合の Tamagawa 測度.

$s = 0$ は $L_S(\mathcal{M}, s)$ の絶対収束域にあることから、

$$\mu = \prod_{p \leqq \infty} \mu_{p,\omega}$$

により、$\prod_{p \leqq \infty} A(\mathbf{Q}_p)$ 上に Haar 測度が定まる。積公式からμは同型ωの取り方によらない。μを $\mathcal{M}$ の Tamagawa 測度という。Sの取り方から、

$$L_S(\mathcal{M}, 0) = \prod_{p \notin S} \mu_{p,\omega}(A(\mathbf{Q}_p))$$

が成り立つ。

(3.4) $w = -1$、-2 の場合の Tamagawa 測度.

$s = 0$ は $L_S(\mathcal{M}, s)$ の絶対収束域に入らない。$s = 0$ の周りに解析接続するという仮定を用いて、$\prod_{p \leqq \infty} A(\mathbf{Q}_p)$ 上に Haar 測度を

$$\mu = (\varinjlim_{s \to 0} s^{-r} L_S(\mathcal{M}, s))^{-1} \prod_{p \in S} \mu_{p,\omega} \prod_{p \notin S} P_p(V_p, 1)^{-1} \mu_{p,\omega}$$

と定める。ただし、$r = \mathrm{ord}_{s=0} L_S(\mathcal{M}, s)$ とする。μは同型ωの取り方によらない。μを $\mathcal{M}$ の Tamagawa 測度という。

(3.5) weight $w \leqq -3$ の場合の Global points.

$\mathbf{A}_f$で $\mathbf{Q}$ の有限 adele を表す。$H^1(\mathbf{Q}, V \bigotimes \mathbf{A}_f)$ の finite part を

$$H^1_f(\mathbf{Q}, V \bigotimes \mathbf{A}_f) = \{x \in H^1(\mathbf{Q}, V \bigotimes \mathbf{A}_f) \mid x_p \in H^1_f(\mathbf{Q}_p, V \bigotimes \mathbf{A}_f) \text{ for all } p\}$$

とおく。ただし、x_pは x の自然な写像による像を表す。

Xの K群 $(K_{2r-m-1}(X)\bigotimes\mathbf{Q})^{(r)}$の中に次の条件を満たす $\mathbf{Q}$-vector 部分空間

$$\Phi\subset(K_{2r-m-1}(X)\bigotimes\mathbf{Q})^{(r)}$$

が存在することを仮定する。ただし、$(\ )^{(r)}$は Adams operator が r乗で作用する部分とする。

(i) Beilinson の定義した regulator 写像

$$R_\infty:(K_{2r-m-1}(X)\bigotimes\mathbf{Q})^{(r)}\to H^m_{\mathcal{D}}(X_{/\mathbf{R}},\mathbf{R}(r))$$

により、

$$\mathbf{R}\bigotimes_{\mathbf{Q}}\Phi\cong D_\infty/(D^0_\infty+M^+_\infty)$$

となる。ここで、$H^m_{\mathcal{D}}$は Deligne cohomology を表す。

(ii) Soulé の定義した p 進 chern 写像

$$K_{2r-m-1}(X)\to H^{m+1}(X,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(r))$$

から導かれる p 進 regulator 写像

$$R_{Gal}:(K_{2r-m-1}(X)\bigotimes\mathbf{Q})^{(r)}\to H^1(\mathbf{Q},V\bigotimes\mathbf{A}_f)$$

により、

$$\mathbf{A}_f\bigotimes\Phi\cong H^1_f(\mathbf{Q},\mathbf{A}_f\bigotimes V)$$

となる。

$\mathcal{X}$を Xの $\mathbf{Z}$ 上の proper flat model とすると、上のΦは

$$\Phi=\mathrm{Im}((K_{2r-m-1}(\mathcal{X})\bigotimes\mathbf{Q})^{(r)}\to(K_{2r-m-1}(X)\bigotimes\mathbf{Q})^{(r)})$$

と取れることが、(i) については Beilinson が、(ii) については Bloch-Kato および Jannsen がそれぞれ予想している。

iで包含写像

$$i:H^1_f(\mathbf{Q},M\bigotimes\widehat{\mathbf{Z}})\subset H^1_f(\mathbf{Q},V\bigotimes\mathbf{A}_f)$$

を表す。このとき、Global motivic points を

$$A(\mathbf{Q})=i^{-1}(\Phi)$$

と定める。$A(\mathbf{Q})$ の定義から、$p<\infty$ に対しては、自然な写像

$$A(\mathbf{Q}) \to A(\mathbf{Q}_p)$$

が存在する。$p=\infty$ のときは、同型

$$A(\mathbf{R})/A_{cpt}(\mathbf{R}) \cong D_\infty/(D_\infty^0 + M_\infty^+ \bigotimes \mathbf{R})$$

の $A(\mathbf{R})$ への持ち上げを一つ固定することで

$$A(\mathbf{Q}) \to A(\mathbf{R})$$

を定める。ただし、$A_{cpt}(\mathbf{R})$ で $A(\mathbf{R})$ の最大 compact 部分群とする。次で節で定める Tamagawa 数はこの取り方によらない。

完全列

$$0 \to M\bigotimes \widehat{\mathbf{Z}} \to M\bigotimes \mathbf{A}_f \to M\bigotimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$$

から、

$$A(\mathbf{Q})_{tor} \cong H^0(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\bigotimes M)$$

である。

(3.6) weight $w=-2$ の場合.

weight が-2 の pure motif は、(Artin motif)(1)、または、anisotropic motif と呼ばれるものに分解される。前者の場合は、古典的代数群の場合でありここでは省略する。後者の場合は weight が-3 の場合と同様にして global motivic points が定義できる。

(3.7) weight $w=-1$ の場合.$(m=2r+1)$

この場合の Tamagawa 数予想は Birch, Swinerton-Dyer 予想の一般化にあたり、global motivic points は X の Chow 群の homological に 0 と同値な部分を用いて定義される。

cycle 写像

$$CH^r(X) \to H^{2r}(X, \mathbf{A}_f(r))$$

から導かれる Abel-Jacobi 写像

$$(CH^r(X)\bigotimes \mathbf{Q})_{hom\sim 0} \to H^1(\mathbf{Q}, V\bigotimes \mathbf{A}_f)$$

において、 その像は $H^1_f(\mathbf{Q}, \mathbf{A}_f \bigotimes V)$ に入る。像の $H^1_f(\mathbf{Q}, \widehat{\mathbf{Z}} \bigotimes M) \to H^1_f(\mathbf{Q}, \mathbf{A}_f \bigotimes V)$ での逆像を global motivic points $A(\mathbf{Q})$ とする。Beilinson、および、Bloch により、height piring

$$A(\mathbf{Q}) \times A^*(\mathbf{Q}) \to \mathbf{R}$$

が定義されている [Be][Bl2]。 ただし、$A^*(\mathbf{Q})$ は $\mathcal{M}$ の双対モチーフ

$$\mathcal{M}^*(1) = H^{\dim_X + 1 - 2r}(X)(\dim_X - r)$$

の global points を表す。

§4. Bloch-Kato conjectures

記号は§3 の通りとする。

(4.1) weight $w \leqq -3$ の場合.

$\mathcal{M} = H^m(X)(r)$ の Tamagawa 数を

$$\mathrm{Tam}(M) = \mu\Big(\big(\prod_{p \leqq \infty} A(\mathbf{Q}_p)\big)/A(\mathbf{Q})\Big)$$

と定める。また、自然な射

$$\alpha_M : \frac{H^1(\mathbf{Q}, M \bigotimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z})}{A(\mathbf{Q}) \bigotimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}} \to \bigoplus_{p \leqq \infty} \frac{H^1(\mathbf{Q}_p, M \bigotimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z})}{A(\mathbf{Q}_p) \bigotimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}}$$

に対して、

$$Ш(M) = \ker\, \alpha_M$$

とおく。

予想 (Bloch-Kato) (1) $Ш(M)$ は有限群である。

(2) $\mathrm{Tam}(M) = \frac{\sharp H^0(\mathbf{Q}, M^* \bigotimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))}{\sharp Ш(M)}$

ここで、M^* は M の双対を表す。

注意 (1) $Ш(M)$ の l-prymary part は有限であり、l-べき部分のみに着目した l-Bloch-Kato 予想というのもある。

(2) 上の予想を L-関数の特殊値に関する形に書き直すと

$$L_S(\mathcal{M},0)=\frac{\sharp Ш(M)}{\sharp H^0(\mathbf{Q},M^*\bigotimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))}\mu_{\infty,\omega}(A(\mathbf{R})/A(\mathbf{Q}))\prod_{p\in S-\{\infty\}}\mu_{p,\omega}(A(\mathbf{Q}_p))$$

となる。

(4.2) weight $w=-2$ の場合.

(3.6) で述べたように、(Artin motif)(1)、または、anisotropic motif の場合があり、前者の場合は古典的代数群の Tamagawa 数公式で後者の場合は weight が-3 の場合と同様の形の公式が予想されている。

(4.2) weight $w=-1$ の場合.

この場合は Birch, Swinerton-Dyer 予想の拡張で、保型形式の central value 等がこの場合である。(3.7) で述べた height pairing

$$A(\mathbf{Q})\times A^*(\mathbf{Q})\to\mathbf{R}$$

の descriminant Hが、Birch, Swinerton-Dyer 予想の場合と同様に登場する。Tamagawa 数を

$$Tam(M)=\mu(\prod_{p\leqq\infty}A(\mathbf{Q}_p))H/\sharp A(\mathbf{Q})_{tor}$$

と定義する。

予想 (Bloch-Kato) (1) $Ш(M)$ は有限群である。

(2) $\mathrm{Tam}(M)=\frac{\sharp H^0(\mathbf{Q},M^*\bigotimes\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(1))}{\sharp Ш(M)}$

(4.3) Bloch-Kato 予想が成り立つことが知られているものは今のところあまり多くない。(Riemann-zeta の$\zeta(r)$ ($r\geqq 2$) の場合でも、$p=2$ のとき p 進 Hodge 理論が整係数や torsion なものに対してあまりうまくいかないことから 2 べきを除く形になる。) また、保型形式の場合には、Ш の (l-part の) 有限性やその L-関数の特殊値との関係が Kolyvagin の Euler system の方法を用いて解ってきている。(詳しくは、[K2])

参考文献

[Be] Beilinson, A.A., *Height pairing between algebraic cycles*, Contemporary Math. **67** (1987), 1–24.

[Bl1] Bloch, S., *A note on height pairings, Tamagawa numbers and Birch and Swinerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **58** (1980), 65–76.

[Bl2] Bloch, S., *A height pairings for algebraic cycles*, J. Pure and Appl. Algebra **34** (1984), 65–76.

[BK] Bloch, S. and Kato, K., *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, Grothendieck Festschrift I, Progress in Math. **86** (1990), Birkhäuser, 333–400.

[Fa] Faltings, G., *Crystalline cohomology and p-adic etale cohomology*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory (1989), The Johns Hopkins University Press, 25–80.

[FI] Fontaine, J.-M. and Illusie, L., *p-adic periods*, Indo-French conf. on geom. Bombay (1989).

[FL] Fontaine, J.-M. and Laffaille, G., *Construction de représentation p-adiques*, Ann. Sc. ENS **15** (1982), 547–608.

[FP] Fontaine, J.-M. and Perrin-Riou, B., *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L*, Proc. of Sympo. in Pure Math **55** (1994), 559–706.

[K1] Kato, K, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functon via* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, Lecture Notes in Math. **1553** (1993), Springer-Verlag, 50–163.

[K2] Kato, K, 楕円曲線 *:* 保型形式の岩沢理論, 数理研講究録 **925** (1995), 66–76.

[P] Perrin-Riou, B., *Fonction L p-adiques des représentations p-adiques*, Asterisque **229** (1995).

[S] Sugimoto, S., *Bloch-Kato* 予想の紹介 *(その 2)*, 数理研講究録 **925** (1995), 43–52.

[TW] Taylor, R. and Wiles, A., *Ring-theoreric properties of certain Hecke algebras*, Ann of Math. **141** (1995), 553–572.

[T] Tsuzuki, N., *Bloch-Kato* 予想の紹介 *(その 1)*, 数理研講究録 **925** (1995), 34–42.

[We] Weil, A., *Adeles and algebraic groups*, Progress in Math. **23** (1982), Birkhäuser.

[Wi] Wiles, A., *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann of Math. **141** (1995), 443–551.