数理解析研究所講究録
967巻 1996年 188-195

ユニタリ群$\tilde{U}(1,n;C)$の離散部分群の Heisenberg translations について

岡山理科大学工学部　神谷茂保 (SHIGEYASU KAMIYA)

Möbius 変換群の離散部分群の研究において次の Jørgensen の不等式は重要である。

Theorem 1 ([B; Theorem 5.4.1]).
f, gを Möbius 変換とし、f, gによって生成される群$< f, g >$が non-elmentary かつ discrete であるとするとき次の不等式が成立する。
すなわち

$$|tr^2(f) - 4| + |tr(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| \geq 1$$

とくに　fが parabolic のときは、つぎの清水の補題とよばれるものとなる。

Corollary 2 ([B; p.105], [Kr; Lemma 2.4]).
$f(z) = z + 1,\ g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($a, b, c, d \in \boldsymbol{C}$かつ $ad - bc = 1$) とする。
f, gによって生成される群$< f, g >$が non-elementary かつ discrete であるならば $|c| \geq 1$ である。

この Corollary 2 より次の Corollary 3 はすぐにわかる

Corollary 3 ([Kr; Theorem 2.5]).
G を上半平面 H に作用する Fuchs 群とする。$f(z) = z + 1$ が G の元であるとする。このとき任意の整数 l, m に対して、$g^l \neq f^m$であるような G の元 gに対して

$$g(\{z \in \boldsymbol{C} | I_m(z) > 1\} \cap \{z \in \boldsymbol{C} | I_m(z) > 1\} = \phi$$

となる。

上半平面（ここでは、右半平面）を一般化した次の Siegel domain $\tilde{H}^n$

$$\tilde{H}^n = \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \boldsymbol{C}^n |\ Re(w_1) > \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} |w_j|^2\}$$ を考える。

$\tilde{H}^n$ に isometry として作用するユニタリ群 $\tilde{U}(1,n;\boldsymbol{C})$ の離散部分群の場合にも Möbius 変換群の離散部分群のときと同様なことが成立することを示そう。

<u>Theorem 4</u> ([Ka 1; Theorem 3.2], [Ka 2; Theorem 2.1], [Pa; Theorem 3.2]).
$\tilde{G}$ を $\tilde{U}(1,n;\boldsymbol{C})$ の離散部分群とする。
$\tilde{G}_\infty$ (∞ の stabilizer) は Heisenberg translations のみより成るとする。

(1) $\tilde{G}$ が次の型の元 $\tilde{g}$ をふくむとする。すなわち

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad Re(s) = 0, \qquad s \neq 0$$

をふくむとする。
このとき $U_{\tilde{g}} = \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \tilde{H}^n | Re(w_1) > \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} |w_j|^2 + |s|\}$ は $\tilde{G}_\infty$ の下で precisely invariant である。

(2) $\tilde{G}_\infty$ に vertical translation は含まれていないとする。
$\tilde{G}$ が次の元 $\tilde{g}$ をふくむとする。すなわち

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & \boldsymbol{a}^* \\ \boldsymbol{a} & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad Re(s) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|^2, \qquad \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{C}^{n-1},\ \boldsymbol{a}^* = \bar{\boldsymbol{a}}^T$$

をふくむとする。
このとき $U_{\tilde{g}} = \{z = (u, v, \zeta) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C}^{n-1} |\ u > t_{\tilde{g}}(z)^2 + 4\|\boldsymbol{a}\|^2\}$ は $\tilde{G}_\infty$ の下で precisely invariant である。

ここで、Heisenberg translation とは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & \boldsymbol{a}^* \\ \boldsymbol{a} & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

の型の元のことをいい

vertical translation とは、$\boldsymbol{a}=\mathbf{o}$となる Heisenberg translation のことをいう。

$t_{\tilde{g}}(z)$ は、$\tilde{g}$の zでの translation length といわれるもので $t_{\tilde{g}}(z)=\rho(z,\tilde{g}(z))$ で定義される。ここでρは、Cygan metric とよばれるもので後に定義する。

1. complex hyperbolic space $\tilde{H}^n$ に horospherical coordinates（以下、H－座標とよぶ）を導入する。

$k>0$ に対して

$$\tilde{F}(\infty,k)=\{w\in\tilde{H}^n \mid Re(w_1)=\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}|w_j|^2+k\}$$

とおく。すると

$$\bigcup_{k>0}\tilde{F}(\infty,k)=\tilde{H}^n,\quad \tilde{F}(\infty,k_1)\cap\tilde{F}(\infty,k_2)=\phi \qquad (k_1\neq k_2\text{のとき})$$

とわかる。

(1) $\forall w\in\tilde{H}^n$に対して次のようにH－座標をきめる。すなわち

$$w \longleftrightarrow (k,t,w')\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{C}^{n-1}$$

$$\text{ここで}\begin{cases} k &= Re(w_1)-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}|w_j|^2 \\ t &= I_m(w_1) \\ w' &= (w_2,\ldots,w_n)\end{cases}$$

(2) $p=(k_1,t_1,w')$, $q=(k_2,t_2,W')$ に対して Cygan metric $\rho(p,q)$ を

$$\rho(p,q)=|\{\tfrac{1}{2}\|W'-w'\|^2+|k_2-k_1|\}+i\{t_1-t_2+I_m(w'^*W')\}|^{\frac{1}{2}}$$

と定義する。

Heisenberg translation $\tilde{g}$に対して Cygan matric は不変 、すなわち$\rho(\tilde{g}(p),\tilde{g}(q))=\rho(p,q)$ であることがわかる。とくに $k_1=k_2=0$ のときは、Heisenberg metric と一致する。

(3) $Z = (Z_0, Z_1, \ldots, Z_n),\ W = (W_0, W_1, \ldots, W_n) \in \boldsymbol{C}^{n+1}$に対して

$$\tilde{\Phi}(Z, W) = -(\bar{Z}_0 W_1 + \bar{Z}_1 W_0) + \sum_{j=2}^{n+1} \bar{Z}_j W_j$$

とおく。
$\tilde{U}(1, n; \boldsymbol{C})$ の元 $\tilde{g}$に対して isometric sphere $I_{\tilde{g}}$を [G] にしたがって次のように定義する。

$$I_{\tilde{g}} = \{w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \tilde{H}^n \mid\ |\tilde{\Phi}(W, Q)| = |\tilde{\Phi}(W, \tilde{g}^{-1}(Q))|\}$$

ここで　$Q = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ W = (1, w_1, \ldots, w_n)$ とする。
$I_{\tilde{g}}$の半径を $r_{\tilde{g}}$とかくことにすると Möbius 変換の時と同じ型の次の公式が成立する。$\tilde{g}^{-1}(\infty)$ が $I_{\tilde{g}}$の中心となる。

$$\begin{aligned} r_{\tilde{g}\tilde{h}} &= \frac{r_{\tilde{g}} r_{\tilde{h}}}{\rho(\tilde{g}^{-1}(\infty), \tilde{h}(\infty))} \\ r_{\tilde{h}}^2 &= \rho((\tilde{g}\tilde{h})^{-1}(\infty), \tilde{h}^{-1}(\infty))\rho(\tilde{g}^{-1}(\infty), \tilde{h}(\infty)) \end{aligned}$$

2. Theorem 4 の (2) の方の証明の概略を [Pa] にしたがって示そう。

<u>補題 1.</u> $\tilde{h} \in \tilde{U}(1, n; \boldsymbol{C})$ は$\tilde{h}^{-1}(\infty)$ を中心とし半径 rの sphere を$\tilde{h}(\infty)$ を中心とし半径 $r_{\tilde{h}}^2/r$の sphere にうつす。

（証明）
$\tilde{h}(\infty) \neq \infty$ となる$\tilde{G}_\infty$の 元$\tilde{h}$をとる。すると$\tilde{h}_1(0) = \tilde{h}(\infty),\ \tilde{h}_2^{-1}(0) = \tilde{h}^{-1}(\infty)$ となるような Heisenberg translation $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$が存在する。
$i_{\tilde{h}} = \tilde{h}_1^{-1} \tilde{h} \tilde{h}_2^{-1}$ とおく。すると $i_{\tilde{h}}$は 0 と ∞ を入れかえることがわかり

$$i_{\tilde{h}} : (k, t, w') \longmapsto \left(\frac{r_{\tilde{h}}^4 k}{|\frac{1}{2}|w'|^2 + k + it|^2}, \frac{r_{\tilde{h}}^4 t}{|\frac{1}{2}|w'|^2 + k + it|^2}, \frac{r_{\tilde{h}}^2 A w'}{\frac{1}{2}|w|^2 + k + it}\right)$$

（ここで $A \in U(n-1; \boldsymbol{C})$）とかけることがわかる。
Heisenberg translation が Cygan metric を不変にすることをより
$r_{i_{\tilde{h}}} = r_{\tilde{h}}$ がでる。
又、$i_{\tilde{h}}^{-1}(\infty) = 0$ より $I_{i_{\tilde{h}}}$は中心が 0 で半径 $r_{\tilde{h}}$の sphere とわかる。

(k,t,w') を $I_{i_{\tilde{h}}}$上の点とすると

$$\rho((0,0,0), i_{\tilde{h}}(k,t,w')) = \frac{r_{\tilde{h}}^2}{r}$$

となる。

とくに$\tilde{h}$により $I_{\tilde{h}}$が $I_{\tilde{h}^{-1}}$にうつることは補題1よりすぐにわかる。

<u>補題 2.</u> $\tilde{G}$を離散部分群とする。$\tilde{G}$は次の型の元$\tilde{g}$をふくむものとする。

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & \boldsymbol{a}^* \\ \boldsymbol{a} & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad Re(s) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|^2$$

このとき$\tilde{h}(\infty) \neq \infty$ となる$\tilde{G}$の元に対して

$$r_{\tilde{h}}^2 < t_{\tilde{g}}(\tilde{h}^{-1}(\infty))t_{\tilde{g}}(\tilde{h}(\infty)) + 2\|\boldsymbol{a}\|^2$$

となる。ここで $t_{\tilde{g}}(z)$ は zにおける$\tilde{g}$の translation length

$$t_{\tilde{g}}(z) = |\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|^2 + i\{I_m(s) + 2I_m(\boldsymbol{a}^*w')\}|^{\frac{1}{2}}$$

である。

これは$\tilde{h}_{j+1} = \tilde{h}_j\tilde{g}\tilde{h}_j^{-1}$, $\tilde{h}_0 = \tilde{h}$とおき $r_{\tilde{h}}^2 > t_{\tilde{g}}(\tilde{h}^{-1}(\infty))t_{\tilde{g}}(\tilde{h}(\infty)) + 2\|\boldsymbol{a}\|^2$となるとき$\tilde{h}_j \longrightarrow \tilde{g}$ $(j \longrightarrow \infty)$ となることよりわかる。(実は、この部分が単純ではあるがめんどうなところであり核であるのだが)

<u>補題 3.</u> $z = (k,t,w')$, $x = (k',t',w')$ に対して $t_{\tilde{g}}(x)^2 \leq t_{\tilde{g}}(z)^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|^2\|W' - w'\|$

となる。

(証明)

$$\begin{aligned} t_{\tilde{g}}(x)^2 &= |\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|^2 + i\{I_m(s) + 2I_m(\boldsymbol{a}^*w')\}| \\ &= |\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|^2 + i\{I_m(s) + 2I_m(\boldsymbol{a}^*W')\} + i\{2I_m(\boldsymbol{a}^*w') - 2I_m(\boldsymbol{a}^*W')\}| \\ &= |\frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|^2 + i\{I_m(s) + 2I_m(\boldsymbol{a}^*w')\} + 2iI_m(\boldsymbol{a}^*(w' - W'))| \\ &\leq t_{\tilde{g}}(z)^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|^2\|w' - W'\|. \end{aligned}$$

補題 4. $z=(u,v,\zeta)$ を中心が $z_0=(0,v_0,\zeta_0)$ で半径 r ($r^2=t_{\tilde{g}}(z_0)^2+2\|\boldsymbol{a}\|^2$) の sphere 上の点とするとき $z\in\{(k,t,w')|\ k\le t_{\tilde{g}}(z)^2+4\|\boldsymbol{a}\|^2\}$ となる。

(証明)
$\rho((0,v_0,\zeta_0),(u,v,\zeta))=r$ とすると

$$
\begin{aligned}
r^2 &= |\frac{1}{2}\|\zeta-\zeta_0\|^2+u+i(v_0-v+I_m(\zeta_0^*\zeta))| \\
&\ge \frac{1}{2}\|\zeta-\zeta_0\|^2+u.
\end{aligned}
$$

よって補題 3 を用いると

$$
\begin{aligned}
u &\le r^2-\frac{1}{2}\|\zeta-\zeta_0\|^2 \\
&= t_{\tilde{g}}(z_0)^2+2\|\boldsymbol{a}\|^2-\frac{1}{2}\|\zeta-\zeta_0\|^2 \\
&\le t_{\tilde{g}}(z)^2+2\|\boldsymbol{a}\|^2\|\zeta-\zeta_0\|+2\|\boldsymbol{a}\|^2-\frac{1}{2}\|\zeta-\zeta_0\|^2 \\
&= t_{\tilde{g}}(z)^2-(\sqrt{2}\|\boldsymbol{a}\|-\frac{1}{\sqrt{2}}\|\zeta-\zeta_0\|)^2+4\|\boldsymbol{a}\|^2 \\
&\le t_{\tilde{g}}(z)^2+4\|\boldsymbol{a}\|^2.
\end{aligned}
$$

補題 5. $U_{\tilde{g}}=\{(u,v,\zeta)|\ u>t_{\tilde{g}}(z)^2+4\|\boldsymbol{a}\|^2\}$ とする。$\tilde{h}(\infty)\neq\infty$ となる $\tilde{G}$ の元 $\tilde{h}$ に対して $U_{\tilde{g}}\cap\tilde{h}(U_{\tilde{g}})=\phi$ となる。

(証明)
$z=(u,v,\zeta)\in U_{\tilde{g}}$ とする。すなわち $u>t_{\tilde{g}}(z)+4\|\boldsymbol{a}\|$ となるとする。
補題 4 より z は、中心が $\tilde{h}^{-1}(\infty)$ で半径 r が

$$
r^2=t_{\tilde{g}}(\tilde{h}^{-1}(\infty))^2+2\|\boldsymbol{a}\|^2
$$

となる sphere の外にある。
補題 2 の $r_{\tilde{h}}^2\le t_{\tilde{g}}(\tilde{h}^{-1}(\infty))t_{\tilde{g}}(\tilde{h}(\infty))+2\|\boldsymbol{a}\|^2$ を用いると

$$
\begin{aligned}
r'^2=\frac{r_{\tilde{h}}^4}{r^2} &\le \frac{(t_{\tilde{g}}(\tilde{h}^{-1}(\infty))t_{\tilde{g}}(\tilde{h}(\infty))+2\|\boldsymbol{a}\|^2)^2}{t_{\tilde{g}}(\tilde{h}^{-1}(\infty))^2+2\|\boldsymbol{a}\|^2} \\
&\le t_{\tilde{g}}(\tilde{h}(\infty))+2\|\boldsymbol{a}\|^2
\end{aligned}
$$

となるので
$\tilde{h}(z)\in\{\tilde{h}(\infty)$ を中心とし、半径 $\sqrt{t_{\tilde{g}}(\tilde{h}(\infty))+2\|\boldsymbol{a}\|^2}$ の sphere $\}$ となる。

補題 4 を用いると

$$\tilde{h}(z) \in \{(k, t, w') |\ k \leq t_{\tilde{g}}(z)^2 + 4\|\boldsymbol{a}\|^2\}$$

となる。ところが　$U_{\tilde{g}} = \{u > t_{\tilde{g}}(z)^2 + 4\|\boldsymbol{a}\|^2\}$ であったので $\tilde{h}(z) \in U_{\tilde{g}}^c$ となる。
故に　$U_{\tilde{g}} \cap \tilde{h}(U_{\tilde{g}}) = \phi$ となる。

<u>補題 6.</u> $\tilde{G}$が vertical translations をふくまないならば $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{G}_\infty - \{id\}$ に対して $\tilde{f}(U_{\tilde{g}}) = U_{\tilde{g}}$ となる。

[注意] 一般に交換子 $[\tilde{f}, \tilde{g}]$ は、vertical translation か id になる。(*cf.* [K2], [K3])

（証明）
$\tilde{f}(U_{\tilde{g}}) \neq U_{\tilde{g}}$とすると $z = (u, v, \zeta) \in \{u > t_{\tilde{g}}(z)^2 + 4\|\boldsymbol{a}\|^2\}$ しかし $\tilde{f}(z) \notin U_{\tilde{g}}$となるような zが存在する。

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sigma & 1 & \boldsymbol{b}^* \\ \boldsymbol{b} & 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

とすると
$\tilde{f}(z) = (u, v + I_m(\sigma) + I_m(\boldsymbol{b}^*\zeta), \zeta + \boldsymbol{b})$ となる。$\tilde{f}(z) \notin U_{\tilde{g}}$より　$u \leq t_{\tilde{g}}(\tilde{f}(z))^2 + 4\|\boldsymbol{a}\|^2$
とわかる。
よって
$t_{\tilde{g}}(z)^2 + 4\|\boldsymbol{a}\|^2 < u \leq t_{\tilde{g}}(\tilde{f}(z))^2 + 4\|\boldsymbol{a}\|^2$

$$\Longleftrightarrow |\tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|^2 + i(I_m(s) + 2I_m(\boldsymbol{a}^*\zeta))|^{\frac{1}{2}} < |\tfrac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\|^2 + i(I_m(s) + 2I_m(\boldsymbol{a}^*\zeta) + 2I_m(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}))|^{\frac{1}{2}}.$$

$I_m(\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b}) = 0$ とすると vertical translation がでてきてしまうので矛盾する。

References

[B] A. F. Beardon, The Geometry of Discrete Groups, Springer 1983.

[G] W. M. Goldman, Complex Hyperbolic Geometry, (to appear).

[K1] S. Kamiya, Notes on non-discrete subgroups of $\tilde{U}(1,n;\boldsymbol{C})$, Hiroshima Math. J., (1983), 501-506.

[K2] S. Kamiya, Notes on elements of $U(1,n;\boldsymbol{C})$, Hiroshima Math. J, 21 (1991), 23-45.

[K3] S. Kamiya, Parabolic elements of $U(1,n;\boldsymbol{C})$, Rev. Roumaine Math. Pure Appl, 40 (1995), 55-64.

[Kr] I. Kra, Automorphic Forms and Kleinian Groups. W.A. Benjamn Inc. (1972).

[Pa] J. R. Parker, Uniform discreteness and Heisenberg Translations, (to appear).