数理解析研究所講究録
968巻 1996年 110-124

分岐特性Cauchy問題の解の真性特異点

HIDESHI YAMANE 山根 英司[1]

(千葉工大)

§0. イントロダクション

これは [Y2] のほぼ忠実な日本語訳である。

J. Leray [L] と L. Gårding, 小竹武 , J. Leray [G-K-L] は初期面が特性点を持つ場合に, 正則なデータを持つ Cauchy 問題の解の特異点について調べた。彼らは, 解がある超曲面 Kの周りに分岐する事を示した。

浜田雄策は, 別のクラスの特性 Cauchy 問題を調べた。この場合, データは全て regular なのに解が真性特異点を持つ事がある。

方程式 $Pu = v$ を考える。u が分岐したり真性特異点を持つ場合まで含めて考えなければならない事はすでに判っている。そうなると, vが特異な場合まで許すのが望ましい。勿論 u の属するクラスを広げずにの話である。

[D] と [O-Y] は, こういう方針でなされた研究である。これらは [L] と [G-K-L] の一般化である。

この論説では [H] に類似の問題を考察する。[H] に比べて作用素 Pには強い条件を課すが, vに課す条件は弱める。特異な場合を含めるのである。さらに,[D] のような symbol calculus を用いて, vが正則でも u が真性特異点を持つ理由を分かりやすく説明する。本当に分かりやすく書くので, みなさん読んで下さいね。

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 35A20; Secondary 35S99.

[1]Department of Mathematics, Chiba Institute of Technology, 2-1-1 Shibazono, Narashino, Chiba 275, Japan. e-mail address:yamane@cc.it-chiba.ac.jp

§1. 結果

SとKを$\mathbb{C}_x^n$の超曲面で, それぞれ $x_1 = x_2^q$ と $x_1 = 0$ で定義されるものとする。ここでqは2以上の整数。$x = 0$ における多価関数のクラス$\mathcal{N}_{q,K}$を導入する。 その定義は

$$f(x) \in \mathcal{N}_{q,K} \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{q-1} f_j(x) x_1^{j/q}, \qquad f_j \text{ は } x = 0 \text{ の近傍で正則。}$$

また,

$$\mathcal{N}_{q,K}^l = \{f(x) \in \mathcal{N}_{q,K}; \quad f \text{ は } S \text{ 上で } l \text{回消える}\} \qquad (l \geq 0)$$

とおく。さらに次のようにおく:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{q,K} = \sum_{j=0}^{q-1} x_1^{j/q} \varinjlim_{X \ni 0} \mathcal{O}(X \backslash K)\text{。}$$

$\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}$ は多価関数や真性特異点を持つ関数を含む。Cauchy 問題を設定するために次のクラスを導入する:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}^l = \{f \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,K}; \quad f \text{ は } S \text{ 上で } l \text{回消える}\} \quad (l \geq 0)\text{。}$$

次が主定理である。

<u>定理 1</u>. $P(x,D)$ を原点の近傍で定義された微分作用素で次の形のものとする:

$$P(x,D) = D_1^{A_1} D_2^{A_2} - \sum_{|\alpha| < A_1 + A_2} D^\alpha a_\alpha(x), \quad A_1 \geq 0,\ A_2 \geq 0\text{。}$$

ここで $a_\alpha(x)$ は原点の近傍で正則で x_1 と x_2 について多項式とする。この時, 任意の $v(x) \in D_1^{A_1} \mathcal{N}_{q,K}^{A_1}$ に対し, $\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}^{A_1+A_2}$ の元 $u(x)$ がただ一つ存在して

$$Pu = v$$

が成り立つ。

<u>注意.</u> もし$\sum_{|\alpha|<A_1+A_2} D^\alpha a_\alpha(x)$ が D_1に関して高々$A_1 - 1$ 階ならば, P は [O-Y] で扱われたクラスに属し, 解 u は $\mathcal{N}_{q,K}^{A_1+A_2}$ に属する。

定理 2. ([O-Y]) $A_1 \geq 1$ と仮定する。この時
(A) $x_1^{-\frac{q-1}{q}} \mathcal{N}_{q,K} \subset D_1^{A_1} \mathcal{N}_{q,K}^{A_1}$. さらに $A_1 = 1$ の時は等号が成り立つ。
(B) もし $l \geq q$ ならば $x_1^{-\frac{l}{q}} \notin D_1^{A_1} \mathcal{N}_{q,K}^{A_1}$ 。

Theorem 2 の証明は [O-Y] に書いた。以下では, 定理 1 を証明する。

§2. マイクロ微分作用素の逆

マイクロ微分作用素と形式ノルムの定義をおさらいする。詳しくは [K-K-K] を参照して下さい。

定義 1. Ω を $T^*\mathbb{C}_x^n$ の conic な開集合とする。ξ で x の dual な変数を表す。$P(x,\xi)$ を次の形の形式和とする:

$$P(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{m-k}(x,\xi)\,。$$

ここで $p_{m-k}(x,\xi)$ はΩで正則でξについて $m-k$ 次斉次とする。$P(x,\xi)$ が以下の増大度条件を満たすとき, $P(x,\xi)$ はΩにおける m 階のマイクロ微分作用素だという:
Ωの任意のコンパクト集合 K に対し正定数 C_K が存在して

$$\text{(G)} \qquad |p_{m-k}(x,\xi)| \leq C_K^{k+1} k!。$$

時には $P(x,\xi)$ を $P(x,D)$ と書く。

対応

$$\Omega \mapsto \{P(x,D);\quad P \text{ は}\Omega\text{における } m \text{ 階のマイクロ微分作用素}\}$$

は $T^*\mathbb{C}^n$ 上の層をなす。これを $\mathcal{E}(m)$ と表す。

マイクロ微分作用素の計算では [Bou-Kr] で定義された形式ノルムが大変有効である。

定義 2. 定義 1 の状況で, 形式ノルム $N_m^K(P;t)$ とは次の式で定義される形式和である:

$$N_m^K(P;t) = \sum_{k,\alpha,\beta} \frac{2(2n)^{-k} k!}{(|\alpha|+k)!(|\beta|+k)!} \sup_K \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta p_{m-k}(x,\xi) \right| t^{2k+|\alpha+\beta|}。$$

ここで和は $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$, $\quad \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$ に関してとる。

注意. もし $N_m^K(P;\varepsilon) < \infty$ がある $\varepsilon > 0$ に関して成り立てば, 増大度条件 (G) が満たされる。逆に, もし (G) が満たされれば, $N_m^{K'}(P;\varepsilon) < \infty$ がある $K' \subset K$ と$\varepsilon > 0$ に対して成り立つ。

[Y] から 2 つの補題を引用する。

補題 1. ([Y] の補題 10) $R(x,D)$ を階数 $\leq -j < 0$ のマイクロ微分作用素でコンパクト集合$\omega \subset T^*\mathbb{C}^n_x$ のある近傍で定義されたものとする。ここで jは正整数である。このとき次が成り立つ:

$$N_0^\omega(R;t) << \frac{(2n)^{-j}}{j!} t^{2j} N_{-j}^\omega(R;t)\text{。}$$

証明. 定義より

$$N_0^\omega(R;t) = \sum_{k,\alpha,\beta} \frac{2(2n)^{-k}k!}{(|\alpha|+k)!(|\beta|+k)!} \sup_\omega \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta r_{-k}(x,\xi) \right| t^{2k+|\alpha+\beta|}\text{。}$$

ここで $R = \sum_{k\geq 0} r_{-k}$ であり, r_{-k} は $-k$次斉次部分である。$k = 0,1,2,\ldots,j-1$ に対応する項による寄与はない。ゆえに $l = k - j$ と置くと,

$$\begin{aligned} N_0^\omega(R;t) = &\sum_{l\geq 0,\alpha\beta} \frac{2(2n)^{-(l+j)}(l+j)!}{(|\alpha|+l+j)!(|\beta|+l+j)!} \\ &\times \sup_\omega \left| D_x^\alpha D_\xi^\beta r_{-(l+j)}(x,\xi) \right| t^{2(l+j)+|\alpha+\beta|} \quad\text{。}\end{aligned}$$

次を示せば良い:

$$\frac{2(2n)^{-(l+j)}(l+j)!}{(|\alpha|+l+j)!(|\beta|+l+j)!} \leq \frac{(2n)^{-j}}{j!} \frac{2(2n)^{-l}l!}{(|\alpha|+l)!(|\beta|+l)!}\text{。}$$

この評価は次の計算で得られる:

$$\frac{2(2n)^{-(l+j)}(l+j)!}{(|\alpha|+l+j)!(|\beta|+l+j)!} \times \frac{(|\alpha|+l)!(|\beta|+l)!}{2(2n)^{-l}l!}$$

$$\begin{aligned} &\leq (2n)^{-j} \times \frac{1}{(|\alpha|+l+j)\cdots(|\alpha|+l+1)} \times \frac{(l+j)\cdots(l+1)}{(|\beta|+l+j)\cdots(|\beta|+l+1)} \\ &\leq (2n)^{-j} \times \frac{1}{j!} \times 1\text{。}\end{aligned}$$

□

補題 2. *([Y] の 補題 11 の特別な場合)* Q を階数 ≤ -1 のマイクロ微分作用素とする。このとき

$$N_0^{\omega}(Q^j;t) << \frac{(2n)^{-j}}{j!} t^{2j} \left\{ N_{-1}^{\omega}(Q;t) \right\}^j \text{。}$$

証明. [B-Kr] により, $N_{-j}^{\omega}(Q^j) << \left\{ N_{-1}^{\omega}(Q) \right\}^j$ である。補題 2 は 補題 1 から従う。 □

さて, 定理 1 の P を考えよう。マイクロ微分作用素$\tilde{P}(x,D)$ を次の式で定義する:

$$\tilde{P}(x,D) = D_1^{-A_1} D_2^{-A_2} P(x,D) \text{。}$$

明らかに

$$\tilde{P} = 1 - \sum_{|\alpha| < A_1 + A_2} D_1^{-A_1} D_2^{-A_2} D^{\alpha} a_{\alpha}(x)$$

が成り立ち, その adjoint $\tilde{P}^*$ は

$$\tilde{P}^*(x,D) = 1 - \sum_{|\alpha| < A_1 + A_2} a_{\alpha}(x)(-D_1)^{-A_1}(-D_2)^{-A_2}(-D)^{\alpha}$$

で与えられる。和の階数は≤ -1 である。 $\tilde{P}^*$ の逆を Rで表す。Rは Neumann 級数で計算できる:

$$R = (\tilde{P}^*)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} Q(x,D)^j \text{。}$$

ここで

$$Q(x,D) = \sum_{|\alpha| < A_1 + A_2} a_{\alpha}(x)(-D_1)^{-A_1}(-D_2)^{-A_2}(-D)^{\alpha} \in \mathcal{E}(-1) \text{。}$$

q_{jk}を Q^jの $(-k)$ 次斉次部分とする：即ち

$$Q(x,D)^j = \sum_{k=j}^{\infty} q_{jk}(x,D) \in \mathcal{E}(-j) \text{。}$$

(実は, 後で示すようにこれは有限和である) 。補題 2 と形式ノルムの定義より,

$$t > 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{2(2n)^{-k} t^{2k}}{k!} \sup |q_{jk}| \leq \frac{(2n)^{-j}}{j!} t^{2j} \left\{ N_{-1}(Q;t) \right\}^j$$

(簡単のためコンパクト集合には言及しない) 。 従って,

$$|q_{jk}| \leq \frac{1}{2}(2n)^{-j+k} \frac{k!}{j!} t^{2(j-k)} \left\{ N_{-1}(Q;t) \right\}^j \text{。} \tag{1}$$

次に, $Q^j = \sum_k q_{jk}$ が有限和であることを示そう。実際

補題 **3.** jによらない正整数 m が存在して Q^j は$-j,\ -(j+1),\cdots,-mj$ 次の斉次部分のみからなる。

証明. $a(x)D_1^{\gamma_1}D_2^{\gamma_2}\cdots D_n^{\gamma_n}$ の形の項を $(s,-t)$ 型と呼ぼう。ここで $s\in\mathbb{N}_0,\ t\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\cdots\}$ であり a は正則関数で x_1 と x_2 については次数$\leq s$ の多項式とする。さらに$\gamma_1+\cdots+\gamma_n\geq -t,\ \gamma_1\in\mathbb{Z},\ \gamma_2\in\mathbb{Z},\ \gamma_3\in\mathbb{N}_0,\ldots,\gamma_n\in\mathbb{N}_0$ とする。(もし $s'\geq s$ かつ $t'\geq t$ であれば, $(s,-t)$ 型の項は $(s',-t')$ 型である)。

全ての a_αが x_1と x_2について次数 $\leq l$の多項式とする。このとき Q は $(l,-A)$ 型 $(A=A_1+A_2)$ の項からなる。容易に判るようにもし $r_1(x,D)$ (resp. $r_2(x,D)$) が $(s_1,-t_1)$ (resp. $(s_2,-t_2)$) 型だとすると, $r_1(x,D)r_2(x,D)$ は $(s_1+s_2,-t_1-t_2)$, $(s_1+s_2-1,-t_1-t_2-1)$, ..., $(0,-s_1-s_2-t_1-t_2)$ 型の項からなる。帰納法により Q^jは $(jl,-jA),\ldots,$ $(0,-jl-jA)$ 型の項からなることが示せる。このことと $\operatorname{ord}Q^j\leq -j$を組み合わせて, 補題が示される。 □

$r_k(x,D)$ を作用素 $R(x,D)=\tilde{P}^*(x,D)^{-1}=\sum_{j=0}^\infty Q(x,D)^j$の $(-k)$ 次斉次部分とする。このとき $R=\sum_{k=0}^\infty r_k(x,D)$ であり, また, 上の補題より

$$r_k=\sum_{j=\lceil\frac{k}{m}\rceil}^{k}q_{jk},\quad \text{ただし}\quad \lceil\frac{k}{m}\rceil=\min\{n\in\mathbb{N}_0;\ n\geq\frac{k}{m}\}$$

である。評価 (1) を用いて次を得る：

$$|r_k|\leq\sum_{j=\lceil\frac{k}{m}\rceil}^{k}|q_{jk}|\leq\sum_{j=\lceil\frac{k}{m}\rceil}^{k}\frac{1}{2}(2n)^{-j+k}\frac{k!}{j!}t^{2(j-k)}\left\{N_{-1}(Q;t)\right\}^j。$$

ここで

$$\frac{1}{j!}\leq\frac{1}{\lceil\frac{k}{m}\rceil!}\frac{1}{(j-\lceil\frac{k}{m}\rceil)!}$$

を用いて

$$\begin{aligned}|r_k|&\leq\frac{1}{2}(2n)^k k!\frac{1}{\lceil\frac{k}{m}\rceil!}t^{-2k}(2n)^{-\lceil\frac{k}{m}\rceil}\left\{t^2N_{-1}(Q;t)\right\}^{\lceil\frac{k}{m}\rceil}\\&\quad\times\sum_{j=\lceil\frac{k}{m}\rceil}^{k}(2n)^{-(j-\lceil\frac{k}{m}\rceil)}\frac{1}{(j-\lceil\frac{k}{m}\rceil)!}\left\{t^2N_{-1}(Q;t)\right\}^{j-\lceil\frac{k}{m}\rceil}\\&\leq\frac{1}{2}(2n)^k k!\frac{1}{\lceil\frac{k}{m}\rceil}t^{-2k}(2n)^{-\lceil\frac{k}{m}\rceil}\left\{t^2N_{-1}(Q;t)\right\}^{\lceil\frac{k}{m}\rceil}\\&\quad\cdot\exp\left\{\frac{1}{2n}t^2N_{-1}(Q;t)\right\}\end{aligned}$$

が判る。従って, 任意のコンパクト集合$\omega \subset \{x \in \mathbb{C}^n; |x| << 1\} \times \{\xi; \xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0\} \subset T^*\mathbb{C}^n_x$に対して, kによらない正定数 C_ω が存在して

$$(2) \qquad \sup_\omega |r_k(x,\xi)| \leq C_\omega^{k+1} \frac{k!}{\lceil \frac{k}{m} \rceil !}。$$

ここで $|x| << 1$ とは $|x|$ が十分小さいということである。

さて

$$r_k(x,D) = \sum_{|\beta|=-k} b_\beta(x) D^\beta \in \mathcal{E}(\{|x| << 1\} \times \{\xi_1 \neq 0,\ \xi_2 \neq 0\})$$

と表示する。$\beta_1 > 0$ ($\Rightarrow \beta_2 < 0$) のときに $b_\beta(x)$ に関する評価を導こう。部分和

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{|\beta|=-k, \beta_1 \leq 0} b_\beta(x) D^\beta$$

は [D] のシンボルクラス $\mathcal{E}_K$ に属し, すでに良く判っている。

$$b_\beta(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \oint_{|\xi_2|=\delta_2} \oint_{|\xi_3|=\delta'} \cdots \oint_{|\xi_n|=\delta'} \xi_2^{-\beta_2-1} \xi_3^{-\beta_3-1} \cdots \xi_n^{-\beta_n-1} \times r_k(x;1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n) d\xi_2 d\xi_3 \cdots d\xi_n$$

なので,(2) より

$$(3) \qquad |b_\beta(x)| \leq C_{\delta_2,\delta'}^{k+1} \frac{k!}{\lceil \frac{k}{m} \rceil !} \delta_2^{-\beta_2} \delta'^{-|\beta'|}, \quad \beta' = (\beta_3,\ldots,\beta_n),$$

を得る。ここで $C_{\delta_2,\delta'}$ は kによらない正定数。

このセクションを終える前に, 次に注意しよう:

$$\tilde{P}^{-1} = R^* = \sum_{k=0}^\infty \{r_k(x,D)\}^* = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\beta|=-k} (-D)^\beta b_\beta(x)\ 。$$

§3. 準備

補題 4.

$$\left(\frac{1}{z^{q-1}}D_z\right)^j = \frac{1}{z^{qj}}\{\theta - q(j-1)\}\cdots\{\theta - q\}\theta, \quad j \geq 1。$$

ここで $\theta = zD_z$。

証明.

$$\theta\frac{1}{z^k} = \frac{1}{z^k}\theta - z\frac{k}{z^{k+1}} = \frac{1}{z^k}(\theta - k)$$

である。補題は帰納法で示される。 □

補題 5. jを正整数とする。 $0 < y < 1$ の時,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\{k+q(j-1)\}\cdots\{k+q\}k}_{j\text{ factors}}y^k \leq \frac{j!y^q}{(1-y)\{y^{q-1}(1-y)\}^j}。$$

証明. 実際,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\{k+q(j-1)\}\cdots\{k+q\}k}_{j\text{ factors}}y^k \\
\leq&\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\{k+q(j-1)\}\{k+qj-q-1\}\cdots\{k+(q-1)(j-1)\}}_{j\text{ factors}}y^k \\
=&\frac{1}{y^{qj-q-j}}\frac{d^j}{dy^j}\sum_{k=0}^{\infty}y^{k+q(j-1)} \\
\leq&\frac{y^q}{y^{(q-1)j}}\frac{d^j}{dy^j}(1+y+y^2+\cdots) \\
=&\frac{y^q}{y^{(q-1)j}}\frac{j!}{(1-y)^{j+1}}。
\end{aligned}$$

□

補題 6. $f(z)$ を $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < r+\varepsilon\}$, $r > 0$, $\varepsilon > 0$, における正則関数とする。もし $|f(z)| \leq M$ が $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq r\}$ で成り立てば, $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < r\}$ において,

$$\left|\left(\frac{1}{z^{q-1}}D_z\right)^j f(z)\right| \leq M\frac{j!\left(\frac{|z|}{r}\right)^q}{\left(1-\frac{|z|}{r}\right)\left\{|z|^q\left(\frac{|z|}{r}\right)^{q-1}\left(1-\frac{|z|}{r}\right)\right\}^j}$$

である。

証明. fのテイラー展開を

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

とする。このとき

$$f_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz, \qquad |f_k|\le Mr^{-k}$$

である。補題 4 を用いて

$$\left(\frac{1}{z^{q-1}}D_z\right)^j f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k\frac{1}{z^{qj}}\{k-q(j-1)\}\cdots\{k-q\}kz^k$$

が判る。右辺の級数は補題 5 を用いて評価できる:

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{1}{z^{q-1}}D_z\right)^j f(z)\right|\\ \le&\sum_{k=0}^{\infty} Mr^{-k}\frac{1}{|z|^{qj}}\{k+q(j-1)\}\cdots\{k+q\}k|z|^k\\ =&\frac{M}{|z|^{qj}}\frac{j!\left(\frac{|z|}{r}\right)^q}{\left(1-\frac{|z|}{r}\right)\left\{\left(\frac{|z|}{r}\right)^{q-1}\left(1-\frac{|z|}{r}\right)\right\}^j}。\end{aligned}$$

□

§4. マイクロ微分作用素の多価関数への作用

$\mathcal{N}_{q,K}$の研究の為に, 特異な座標変換 $z=x_1^{1/q}$を用いる。 $\tilde{S}$ で $\mathbb{C}^n_{z,x_2,x'}$ の超曲面 $z=x_2$ を表す。ここで $x'=(x_3,\ldots,x_n)$ 。この特異な座標変換により, 同型

$$\mathcal{N}_{q,K}\simeq\mathcal{O}_{(z,x_2,x')=0}$$

$$f(x)=\sum_{j=0}^{q-1} f_j(x)x_1^{j/q}\mapsto\tilde{f}(z,x_2,x')=\sum_{j=0}^{q-1} f_j(z^q,x_2,x')z^j。$$

が誘導される。さらに $f\in\mathcal{N}^l_{q,K}$ の時その時に限り $\tilde{f}$ は $\tilde{S}$上で l回消える。

命題 **1.** *([D] 命題 6)* 特性 *Cauchy* 問題

$$D_2 g = f \in \mathcal{N}^l_{q,K}$$

は一意解 $g \in \mathcal{N}^{l+1}_{q,K}$ を持つ。さらにもし

$$|\tilde{f}(z, x_2, x')| \leq M\{|z| + |x_2 - z|\}^m$$

が, ある正定数 M と非負整数 m に対して成り立てば

$$|\tilde{g}(z, x_2, x')| \leq \frac{M}{m+1}\{|z| + |x_2 - z|\}^{m+1}$$

である。

証明. 方程式 $D_2 g = f$ は $D_2\tilde{g} = \tilde{f}$ に同値で, 初期面 S は $\tilde{S}$ に変換される。$\tilde{S}$ は 非特性なので, 正則な解 $\tilde{g}$ が一意に存在する。評価は初等的な積分表示から得られる。 □

この命題から判るように $\mathcal{N}_{q,K}$ とその仲間は特性 Cauchy 問題の研究に適したクラスである。正則関数のクラスでは話がうまくまとまらない。

定義 **3.** 上の命題を用いて

$$D_2^{-1} : \mathcal{N}^l_{q,K} \to \mathcal{N}^{l+1}_{q,K}$$

を定義できる。これは

$$D_2 : \mathcal{N}^{l+1}_{q,K} \to \mathcal{N}^l_{q,K}$$

の右逆であるが, 左逆ではない。

注意. もし u が $\mathcal{N}_{q,K}$ の元で f が $x = 0$ の近傍で正則ならば, $D_2^{-l}(f(x)u(x))$, $l \in \mathbb{N}_0$ を定義できる。これは Cauchy 問題

$$\begin{cases} D_2^l w(x) = f(x)u(x) \\ w(x) \in \mathcal{N}^l_{q,K} \end{cases}$$

の一意解である。

他方, $D_2^{-l} \circ f(x)$ は [D] のシンボルクラス $\mathcal{E}_K$ に属し, $\left(D_2^{-l} \circ f(x)\right) u(x) \in \mathcal{N}_{q,K}^l$ は [D] で定義されている。Dunau は積分を右においている：

$$D_2^{-l} \circ f(x) = f(x) D_2^{-l} + \sum_{j=l+1}^{\infty} f_j(x) D_2^{-j}。$$

ここで $f_j(x)$ は正則関数。彼の定義は

$$\left(D_2^{-l} \circ f(x)\right) u(x) \underset{\mathrm{def}}{=} f(x) D_2^{-l} u(x) + \sum_{j=l+1}^{\infty} f_j(x) D_2^{-j} u(x)$$

である。これは上と同じ方程式の解となり, さらに

$$D_2^{-l}\left(f(x)u(x)\right) = \left(D_2^{-l} \circ f(x)\right) u(x)$$

である。そんな訳で積分が右にあっても左にあっても違いはない。

いよいよ$\tilde{P}(x,D)^{-1} w(x) \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,K}$ を定義しよう。ここで $\tilde{P}$ は§2 で定めた記号で $w(x) \in \mathcal{N}_{q,K}$である。

$\tilde{P}^{-1}$ は

$$\tilde{P}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=-k} (-D)^{\beta} b_{\beta}(x) \in \mathcal{E}(\{|x| << 1,\ \xi_1 \neq 0,\ \xi_2 \neq 0\}), \quad \mathrm{ord}\, \tilde{P}^{-1} \leq 0$$

という表示を持つ。

$\beta_1 \leq 0$ に対応する項からなる部分和は [D] のシンボルクラス $\mathcal{E}_K$ に属し, $\mathcal{N}_{q,K}$への作用は [D] で定義されている。従って, $\tilde{P}^{-1}$の作用を定義するとき, 一般性を失うことなく, もし $\beta_1 \leq 0$ ならば $b_\beta \equiv 0$ であると仮定してよい。すなわち$\beta_2 < 0$ の項だけ考える。

$$\tilde{P}^{-1}(x,D) w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=-k} (-D)^{\beta} b_{\beta}(x) w(x)$$

とおく。これが$\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}$の元を定めることを示すのが目標である。$x_1^{1/q} = z$, $\tilde{w}(z,x_2,x') = w(z^q,x_2,x')$, $\tilde{b}_\beta(z,x_2,x') = b_\beta(z^q,x_2,x')$ とおく。

$$(\tilde{P}^{-1} w)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=-k} \left(\frac{1}{q z^{q-1}} D_z\right)^{\beta_1} D_2^{\beta_2} D'^{\beta'} \cdot (-1)^{|\beta|} \tilde{b}_\beta(z,x_2,x') \tilde{w}(z,x_2,x')$$

となる。§2 の (3) により $(z, x_2, x') = 0$ の近傍 X において

$$\left|(-1)^{|\beta|}\tilde{b}_\beta \tilde{w}\right| \le C_{\delta_2,\delta'}^{k+1} \cdot \frac{k!}{\lceil \frac{k}{m} \rceil!} \delta_2^{-\beta_2} \delta'^{-|\beta'|} \sup_X |\tilde{w}|, \quad |\beta| = -k$$

となる。より小さな近傍において正定数 $r' > 0$ が存在して

$$\left|D'^{\beta'} \cdot (-1)^{|\beta|}\tilde{b}_\beta \tilde{w}\right| \le \beta'! r'^{-|\beta'|} C_{\delta_2,\delta'}^{k+1} \cdot \frac{k!}{\lceil \frac{k}{m} \rceil!} \delta_2^{-\beta_2} \delta'^{-|\beta'|} \sup_X |\tilde{w}|$$

が成り立つ。次に命題 1 を, まず $m = 0$ に対し, 次に $m = 1$ に対しというように繰り返して用いる。 こうして

$$\left|D_2^{\beta_2} D'^{\beta'} \cdot (-1)^{|\beta|}\tilde{b}_\beta \tilde{w}\right| \le \frac{\lambda^{-\beta_2}}{(-\beta_2)!} \beta'! r'^{-|\beta'|} C_{\delta_2,\delta'}^{k+1} \cdot \frac{k!}{\lceil \frac{k}{m} \rceil!} \delta_2^{-\beta_2} \delta'^{-|\beta'|} \sup_X |\tilde{w}|$$

が $\{|z| < \lambda/3, |x_2| < \lambda/3, \ldots, |x_n| < \lambda/3\}$ において成り立つ。

補題 6 より

(4)
$$\left|\left(\frac{1}{qz^{q-1}} D_z\right)^{\beta_1} D_2^{\beta_2} D'^{\beta'} \cdot (-1)^{|\beta|}\tilde{b}_\beta \tilde{w}\right|$$
$$\le \frac{\beta_1! \left(\frac{|z|}{r}\right)^q}{\left(1 - \frac{|z|}{r}\right) \left\{q|z|^q \left(\frac{|z|}{r}\right)^{q-1} \left(1 - \frac{|z|}{r}\right)\right\}^{\beta_1}}$$
$$\times \frac{\lambda^{-\beta_2}}{(-\beta_2)!} \beta'! r'^{-|\beta'|} C_{\delta_2,\delta'}^{k+1} \cdot \frac{k!}{\lceil \frac{k}{m} \rceil!} \delta_2^{-\beta_2} \delta'^{-|\beta'|} \sup_X |\tilde{w}|$$

が $\{0 < |z| < r < \lambda/3, |x_2| < \lambda/3, \ldots, |x_n| < \lambda/3\}$ において成り立つ。$|z|$, $0 < |z| < r$, に連続に依存する定数 $C_z > 1$ が存在して$\left\{q|z|^q \left(\frac{|z|}{r}\right)^{q-1} \left(1 - \frac{|z|}{r}\right)\right\}^{-1} \le C_z$が成り立つ。直ちに

$$\frac{1}{\left\{q|z|^q \left(\frac{|z|}{r}\right)^{q-1} \left(1 - \frac{|z|}{r}\right)\right\}^{\beta_1}} \le C_z^{\beta_1} \le C_z^{\beta_1 + |\beta'| + k} = C_z^{-\beta_2}$$

を得る。

さらに$\delta' > 0$ を $r'\delta' < 1$ なるように十分小さく取ると,

$$(r'\delta')^{-|\beta'|} \le (r'\delta')^{-|\beta'| - \beta_1 - k} = (r'\delta')^{\beta_2}$$

となる。また容易に判るように

$$\frac{\beta_1!\beta'!k!}{(-\beta_2)!} \leq 1$$

となる。なぜなら$\beta_1 + |\beta'| + k = -\beta_2$であるから。(4) とこれら3つの不等式を組み合わせて

$$\left|\left(\frac{1}{qz^{q-1}}D_z\right)^{\beta_1} D_2^{\beta_2} D'^{\beta'} \cdot (-1)^{|\beta|}\tilde{b}_\beta \tilde{w}\right| \leq \frac{\left(\frac{|z|}{r}\right)^q}{\left(1-\frac{|z|}{r}\right)\cdot \lceil \frac{k}{m} \rceil !}\left(\frac{C_z\lambda\delta_2}{r'\delta'}\right)^{-\beta_2} C_{\delta_2,\delta'}^{k+1} \sup_X|\tilde{w}|$$

を得る。

fix された k と β_2に対し,

$$\sharp\{(\beta_1, \beta');\ \beta_1 > 0,\ \beta' \in \mathbb{N}_0^{n-2},\ \beta_1 + \beta_2 + |\beta'| = -k\} \leq 2^{n-2-k-\beta_2}$$

である。故に

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k\geq 0}\sum_{|\beta|=-k}\left(\frac{1}{qz^{q-1}}D_z\right)^{\beta_1} D_2^{\beta_2} D'^{\beta'} \cdot (-1)^{|\beta|}\tilde{b}_\beta \tilde{w}\right| \\
\leq& \frac{\left(\frac{|q|}{r}\right)^q \sup_X|\tilde{w}|}{1-\frac{|z|}{r}} \sum_{k\geq 0}\frac{C_{\delta_2,\delta'}^{k+1}}{\lceil \frac{k}{m}\rceil !}\sum_{\beta_2=-\infty}^{-1}\sum_{\beta_1+|\beta'|=-k-\beta_2}\left(\frac{C_z\lambda\delta_2}{r'\delta'}\right)^{-\beta_2} \\
\leq& \frac{2^{n-2}\left(\frac{|z|}{r}\right)^q \sup_X|\tilde{w}|}{1-\frac{|z|}{r}} \sum_{k\geq 0}\frac{2^{-k}C_{\delta_2,\delta'}^{k+1}}{\lceil \frac{k}{m}\rceil !}\sum_{\beta_2=-\infty}^{-1}\left(\frac{2C_z\lambda\delta_2}{r'\delta'}\right)^{-\beta_2}
\end{aligned}$$

となる。

右辺は $\{0 < |z| << 1, |x_2| << 1, \ldots, |x_n| << 1\}$ の任意のコンパクト集合上一様に絶対収束する。$\delta_2 > 0$ をコンパクト集合に応じて十分小さく取れば良い。

以上をまとめると, ついに次が示された。

$$(\tilde{P}^{-1}w)(x) \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,K}。$$

さらにもし $w \in \mathcal{N}_{q,K}^{A_1+A_2}$ ならば, 容易に判るように

$$(\tilde{P}^{-1}w)(x) \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,K}^{A_1+A_2}。$$

§5. 定理 1 の証明

最初に次に注意しよう:

$$D_2^{A_2} : \mathcal{N}_{q,K}^{A_1+A_2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{q,K}^{A_1}。$$

故に

$$D_1^{A_1}\mathcal{N}_{q,K}^{A_1} = D_1^{A_1}D_2^{A_2}\mathcal{N}_{q,K}^{A_1+A_2}。$$

$Pu = D_1^{A_1}D_2^{A_2}w,\ w \in \mathcal{N}_{q,K}^{A_1+A_2}$ を解こう。解 u は $u = \tilde{P}^{-1}w \in \tilde{\mathcal{N}}_{q,K}^{A_1+A_2}$ で与えられる。実際

$$Pu = P(\tilde{P}^{-1}w) = D_1^{A_1}D_2^{A_2}w$$

が成り立つ。一意性は Cauchy-Kowalevski の定理を非特性点で当てはめれば出る。

§6. 浜田の例

浜田 ([H]) は次の例を与えた。

$$\begin{cases} (D_2^2 - D_1)u(x) = 0 \\ u|_S = \gamma_1 x_2^3,\ D_1 u|_S = \gamma_2 x_2。\end{cases}$$

ただし

$$S = \{x_1 = x_2^2\}, \quad \gamma_1 = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\Gamma(m-\frac{3}{2})}{(2m)!}, \quad \gamma_2 = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})}{(2m)!}。$$

解 $u(x)$ は

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\Gamma(m-\frac{3}{2})}{(2m)!} x_1^{\frac{3}{2}-m} x_2^{2m}$$

で与えられる。これは分岐しており, さらに真性特異点を持っている。この現象を我々の観点から解釈しよう。まず問題を次の形のものに帰着する:

$$\begin{cases} (D_2^2 - D_1)u(x) = v(x), \quad v \in \mathcal{O}_{x=0} \text{ は既知} \\ u|_S = 0, \quad D_1 u|_S = 0\ 。\end{cases}$$

マイクロ微分作用素

$$\begin{aligned} (D_2^2 - D_1)^{-1} &= (1 - D_1 D_2^{-2})^{-1} D_2^{-2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(D_1 D_2^{-2})^j D_2^{-2} = \sum_{j=0}^{\infty} D_1^j D_2^{-2j-2} \end{aligned}$$

を用いて, 解を

$$u(x)=\sum_{j=0}^{\infty} D_1^j D_2^{-2j-2} v(x)$$

のように表示できる。

$z=x_1^{1/2}$ とおくと, 次を得る:

$$u(z^2,x_2,x')=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}D_z\right)^j D_2^{-2j-2} v(z^2,x_2,x')\text{。}$$

分岐は D_2^{-2j-2} のために起きる。真性特異点が現れるのは $\left(\frac{1}{2z}D_z\right)^j$ という因子のせいである。

References

[Bou-Kr] Boutet de Monvel, L. and Kreé, P., *Pseudodifferential operators and Gevrey classes*, Ann. Inst. Fourier, **17-1** (1967), 295–323.

[D] Dunau, J., *Un Problème de Cauchy Caractéristique*, J. Math. pures et appl. **69** (1990), 369-402.

[G-K-L] Gårding, L., Kotake, T. and Leray, J., *Problème de Cauchy, I bis et VI*, Bull. Soc. Math. de France **92** (1964), 263–361.

[H] Hamada, Y., *Les singularités des solutions du problème de Cauchy à données holomorphes*, Recent developments in hyperbolic equations (Pisa, 1987), Longman, 1988, pp. 82–95.

[K-K-K] Kashiwara, M., Kawai, T. and Kimura, T., *Foundation of Algebraic Analysis*, Kinokuniya, 1980 (in Japanese) ; English translation from Princeton, 1986.

[L] Leray, J., *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. math. France **85** (1957), 389-429.

[N-S] Nakamura, G. and Sasai, T., *The singularities of the solutions of the Cauchy problem for second order equations in case the initial manifold includes characteristic points*, Tôhoku Math. Journ. **28** (1976), 523-539.

[O-Y] Okada, Y. and Yamane, H., *A characteristic Cauchy problem in the complex domain*, to appear in J. Math. pures et appl.

[Y] Yamane, H., *Branching of singularities for some second or third order microhyperbolic operators*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2** **(3)** (1996).

[Y2] ———, *The essential singularity of the solution of a ramified characteristic Cauchy problem*, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[Y3] ———, *A characteristic Cauchy problem of non-Leray type in the complex domain*, to appear in Kansû-kaiseki wo mochiita henbibun-hôteishiki no kenkyû, RIMS Kôkyûroku, Kyoto Univ.

[Y4] ———, *Generalized Leray principle for characteristic Cauchy problems*, preprint.