数理解析研究所講究録
969巻 1996年 143-152

Colombeau型超函数の中での微分方程式の可解性と非可解性

東大数理　富川 尚充（Takamitu Tomikawa）

1、Colombeau型の超函数

1-1、Colombeauによる定義

定義1、$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の部分集合列 $\mathcal{A}_q(\mathbb{R}^n)$ $(q=0,1,2,\cdots)$ を、次のように定義する。

$$\mathcal{A}_q(\mathbb{R}^n)=\left\{\phi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n);\int_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\phi(x)dx=\delta_{0,|\alpha|},\ 0\leqq{}^\forall|\alpha|\leqq q\right\}$$

ここにおいて、δ はクロネッカーのデルタである。

定義2、$\phi(x)\in\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき、$\phi_\varepsilon(x)$ $(\varepsilon\in(0,1])$ を次のように定義する。

$$\phi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ここで、任意の $\varepsilon\in(0,1]$ に対して、$\phi(x)\in\mathcal{A}_q(\mathbb{R}^n)$ ならば、$\phi_\varepsilon(x)\in\mathcal{A}_q(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ。

定義3、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。次のような写像を考える。

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)\times\Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \Psi & & \Psi \\ & (\phi, x) & \longmapsto & R(\phi, x) \end{array}$$

ただし、$\phi\in\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ を固定するごとに $R(\phi,x)\in C^\infty(\Omega)$

このとき、次の条件を満たす写像を moderate な写像という。

$\forall K\subset\subset\Omega,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n,\ \exists N_{K,\alpha}\in\mathbb{N}$

s.t. $\forall\phi(x)\in\mathcal{A}_{N_{K,\alpha}}(\mathbb{R}^n),\ \exists C_{K,\alpha,\phi}>0,\ \exists\varepsilon_{K,\alpha,\phi}>0$

s.t. $0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\alpha,\phi}\Rightarrow \sup\{|\partial_x^\alpha R(\phi_\varepsilon,x)|;x\in K\}\leqq C_{K,\alpha,\phi}\,\varepsilon^{-N_{K,\alpha}}$

一方、次の条件を満たす写像を null な写像という。

$\forall K\subset\subset\Omega,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n,\ \exists N_{K,\alpha}\in\mathbb{N},\ \exists\{a_q(K,\alpha)\}_{q=0}^{+\infty}$ ただし $\mathbb{N}\ni a_q\nearrow+\infty$

s.t. $\forall q\geqq N_{K,\alpha},\ \forall\phi(x)\in\mathcal{A}_q(\mathbb{R}^n),\ \exists C_{K,\alpha,\phi}>0,\ \exists\varepsilon_{K,\alpha,\phi}>0$

s.t. $0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\alpha,\phi}\Rightarrow \sup\{|\partial_x^\alpha R(\phi_\varepsilon,x)|;x\in K\}\leqq C_{K,\alpha,\phi}\,\varepsilon^{a_q(K,\alpha)-N_{K,\alpha}}$

定義4. Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする。このとき、新しい超函数の空間を次のように定義する。

$$\mathcal{G}(\Omega)=\{\text{moderate な写像}\}/\{\text{null な写像}\}$$

ここで、$\mathbb{R}^n$ 上の distribution は、次のように埋め込まれる。

$$Cd:\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\ni f\longmapsto[(Cdf)(\phi,x)]\in\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$$

ただし、

$$(Cdf)(\phi,x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x+y)\,\phi(y)\,dy$$

定義5．$[R(\phi,x)]$が$\mathcal{G}^{\infty}(\Omega)$の元であるとは、$R(\phi,x)$が次の条件を満たすことである。

$$
\begin{aligned}
&{}^{\forall}K\subset\subset\Omega,\ {}^{\exists}N_K\in\mathbb{N}\\
&\quad \text{s.t. } {}^{\forall}\alpha\in\mathbb{N}_0^n,\ {}^{\exists}M_{K,\alpha}\in\mathbb{N}_0\\
&\quad \text{s.t. } {}^{\forall}\phi(x)\in\mathcal{A}_{M_{K,\alpha}}(\mathbb{R}^n),\ {}^{\exists}C_{K,\alpha,\phi}>0,\ {}^{\exists}\varepsilon_{K,\alpha,\phi}>0\\
&\quad \text{s.t. } 0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\alpha,\phi}\Rightarrow \sup\{|\partial_x^{\alpha}R(\phi_\varepsilon,x)|;\ x\in K\}\leqq C_{K,\alpha,\phi}\,\varepsilon^{-N_K}
\end{aligned}
$$

定義6、$f=[R(\phi,x)]\in\mathcal{G}(\Omega)$に対して、$f\approx 0$であることを、次のように定義する。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}R(\phi_\varepsilon,x)=0 \qquad (\mathcal{D}'(\Omega)\text{の意味で})$$

つまり、任意に固定した$\psi(x)\in C_0^{\infty}(\Omega)$に対して、次が成り立つことである。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega R(\phi_\varepsilon,x)\psi(x)\,dx=0$$

1－2．片岡による定義

定義7、急減少函数の空間$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$の部分集合$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$を次のように定義する。

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)=\{\phi(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n);\ \hat{\phi}(\xi)=1+O(|\xi|^{\infty}),\ \xi\to 0\}$$

ここにおいて、$\hat{\phi}(\xi)$は$\phi(x)$のFourier変換である。

ここで、$\{\phi_\varepsilon(x)\left(=\frac{1}{\varepsilon^n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})\right);\ \phi(x)\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n),\ \varepsilon>0\}$は、$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$に含まれる。

定義8、Ωは$\mathbb{R}^n$の開集合とする。次のような写像を考える。

$$
\begin{array}{rccc}
R: & \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)\times\Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & (\phi, x) & \longmapsto & R(\phi, x)
\end{array}
$$

ただし、$\phi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$を固定するごとに$R(\phi,x)\in C^\infty(\Omega)$

このとき、次の条件を満たす写像をmoderateな写像という。

$\forall K\subset\subset\Omega, \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n, \exists N_{K,\alpha}\in\mathbb{N}$

s.t. $\forall\phi(x)\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \exists C_{K,\alpha,\phi}>0, \exists\varepsilon_{K,\alpha,\phi}>0$

s.t. $0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\alpha,\phi} \Rightarrow \sup\{|\partial_x^\alpha R(\phi_\varepsilon,x)|; x\in K\}\leqq C_{K,\alpha,\phi}\,\varepsilon^{-N_{K,\alpha}}$

一方、次の条件を満たす写像をnullな写像という。

$\forall K\subset\subset\Omega, \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^n, \forall\phi(x)\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n), \forall l\in\mathbb{N}$

$\exists C_{K,\alpha,\phi,l}>0, \exists\varepsilon_{K,\alpha,\phi,l}>0$

s.t. $0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\alpha,\phi,l} \Rightarrow \sup\{|\partial_x^\alpha R(\phi_\varepsilon,x)|; x\in K\}\leqq C_{K,\alpha,\phi,l}\,\varepsilon^{l}$

定義9、Ωは$\mathbb{R}^n$の開集合とする。このとき、新しい超函数の空間を次のように定義する。

$$\mathcal{Y}_*(\Omega)=\{\text{moderateな写像}\}/\{\text{nullな写像}\}$$

ここで、

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\ni f\longmapsto[(Cdf)(\phi,x)]\in\mathcal{Y}_*(\mathbb{R}^n)$$

は well-definedであり、"Cd"は局所性をもつので埋め込み

$$Cd:\mathcal{D}'\to\mathcal{Y}_*$$

が得られる。

定義10. $[R(\phi,x)]$ が $\mathcal{G}^{\infty}_{*}(\Omega)$ の元であるとは、$R(\phi,x)$ が次の条件を満たすことである。

$${}^{\forall}K\subset\subset\Omega,\ {}^{\exists}N_K\in\mathbb{N}$$
$$\text{s.t. } {}^{\forall}\alpha\in\mathbb{N}_0^n,\ {}^{\forall}\phi(x)\in\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n),\ {}^{\exists}C_{K,\alpha,\phi}>0,\ {}^{\exists}\varepsilon_{K,\alpha,\phi}>0$$
$$\text{s.t. } 0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\alpha,\phi}\Rightarrow \sup\{|\partial_x^{\alpha}R(\phi_{\varepsilon},x)|;x\in K\}\leqq C_{K,\alpha,\phi}\varepsilon^{-N_K}$$

定義11. $f=[R(\phi,x)]\in\mathcal{G}_{*}(\Omega)$ に対して、$f\overset{\theta}{\approx}0$ であることを、次のように定義する。

$${}^{\forall}K\subset\subset\Omega,\ {}^{\forall}\phi(x)\in\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n),\ {}^{\exists}C_{K,\phi}>0,\ {}^{\exists}\theta_{K,\phi}>0$$
$$\text{s.t. } {}^{\forall}\psi(x)\in C_0^{\infty}(K),\ 0<\varepsilon<\theta_{K,\phi}$$
$$\Rightarrow\left|\int_K R(\phi_{\varepsilon},x)\psi(x)\,dx\right|\leqq C_{K,\phi}\,\varepsilon^{\theta_{K,\phi}}\cdot\sup\{|\partial_x^{\alpha}\psi(x)|;x\in K,|\alpha|\leqq C_{K,\phi}\}$$

※　Ω が相対コンパクトな開集合の場合, $(Cd\,u)(\phi,x)\in\mathcal{G}(\Omega)$ $(u\in\mathcal{D}'(\Omega))$ は次のように定義する。$\phi(x)\in\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$d(\phi):=\sup\{|x|;\phi(x)\neq 0\}$　, $\overline{\Omega}_a:=\{x\in\Omega:\mathrm{dist}(x,\Omega^c)\geqq a\}$

とし、次の性質をもつ $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ の元 K_ϕ を考える。

$K_\phi(x)=1$ $(x\in\overline{\Omega}_{2d(\phi)})$, $\mathrm{supp}\,K_\phi\subset\overline{\Omega}_{d(\phi)}$, $0\leqq|K_\phi(x)|\leqq 1$ $(x\in\mathbb{R}^n)$

ここで、次のようにおく。

$$(Cd\,u)(\phi,x)=\int_{\mathbb{R}^n}(K_\phi f)(t+x)\,\phi(t)\,dt$$

2、あるクラスの微分方程式の$\mathcal{S}/\approx$解について

補題1、Ωは$\mathbb{R}^n$の開集合とする。$C(\Omega)$-函数列$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$がΩ上$f(x)\in C(\Omega)$に一様収束するとする。

このとき、任意の$\phi\in\mathcal{A}_0$を固定して、$x\in\Omega$と$\varepsilon\in(0,1]$を変数と考えるとき、固定したϕとΩに含まれる任意のコンパクト集合Kに対して正の定数$\varepsilon_{K,\phi}$が定まり、$(Cdf_n)(\phi_\varepsilon,x)$は$(Cdf)(\phi_\varepsilon,x)$に$(0,\varepsilon_{K,\phi})\times K\ (\subset(0,1]\times\Omega)$上一様収束する。

証明、$\phi\in\mathcal{A}_0$に対して、$\int_{\mathbb{R}^n}|\phi_\varepsilon(t)|dt=\int_{\mathrm{supp}\,\phi}|\phi(t)|dt$が成り立つので、左辺は$\varepsilon\in(0,1]$によらず$\phi$によって定まる定数$M_\phi\ (<+\infty)$になる。Ωに含まれるコンパクト集合$K$と$\phi\in\mathcal{A}_0$に対して

$$0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\phi}\Rightarrow K+\mathrm{supp}\,\phi_\varepsilon\subset\Omega$$

を満たすように正の定数$\varepsilon_{K,\phi}$をとれる。このとき、

$$0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\phi},\ x\in K,\ t\in\mathrm{supp}\,\phi_\varepsilon\Rightarrow|(K_{\phi_\varepsilon}f_n)(t+x)-(K_{\phi_\varepsilon}f)(t+x)|\leqq\|f_n-f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

が成り立つ。よって、$0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\phi}$, $x\in K$ならば、

$$|(Cdf_n)(\phi_\varepsilon,x)-(Cdf)(\phi_\varepsilon,x)|$$
$$\leqq\int_{\mathbb{R}^n}|(K_{\phi_\varepsilon}f_n)(t+x)-(K_{\phi_\varepsilon}f)(t+x)||\phi_\varepsilon(t)|dt\leqq M_\phi\|f_n-f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

が成り立つことから$(0,\varepsilon_{K,\phi})\times K$上一様収束することがわかる。

補題2、Ωは$\mathbb{R}^n$の開集合とする。Ω上の$\mathcal{S}(\Omega)$-函数列$\{v_n(\phi,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$は、任意に固定した$\phi\in\mathcal{A}_0$と、Ωに含まれる任意のコンパクト集合$K$に対して正の定数$\varepsilon_{K,\phi}$が定まり、$(0,\varepsilon_{K,\phi})\times K$上0に

一様収束するとする。

このとき、$v(\phi, x) \in \mathcal{Y}(\Omega)$が、$\mathbb{R}_+$で定義され自然数値をとり広義単調増加で無限大に発散する函数$n(y) \in \mathbb{N}$ $(y>0)$と上記の$\{v_n(\phi, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$を用いて

$$v(\phi, x) = v_{n(\|\phi\|)}(\phi, x) \quad (\|\ \| \text{は} L^\infty\text{-ノルム, 以下同様})$$

と書き表せるならば、$v(\phi, x) \approx 0$が成り立つ。

証明、任意の$\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$に対して、$K_\psi = \mathrm{supp}\,\psi$とおくと、

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega v(\phi_\varepsilon, x)\psi(x)dx\right| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\psi} v(\phi_\varepsilon, x)\psi(x)dx\right| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\psi} v_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}(\phi_\varepsilon, x)\psi(x)dx\right|$$

$$\leqq \lim_{\varepsilon\to 0}\|v_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}\|_{K_\psi}\int_{K_\psi}|\psi(x)|dx = 0$$

補題3、Ωは$\mathbb{R}^n$の開集合とする。$C(\Omega)$-函数列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$に対し、次の条件(☆)を満たし、$\mathbb{R}_+$で定義され、自然数値をとり、広義単調増加で無限大に発散する函数$n(y) \in \mathbb{N}$ $(y>0)$が存在するとする。

(☆) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \exists m_\alpha \in \mathbb{N}, \forall \phi \in \mathcal{A}_0, \exists C_{\alpha,\phi} > 0, \exists \varepsilon_{\alpha,\phi} > 0$

$$\text{s.t. } 0<\varepsilon<\varepsilon_{\alpha,\phi} \Rightarrow \sup_{x\in\Omega}|\partial^{(\alpha)} f_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}(x)| \leqq C_{\alpha,\phi}(\|\phi_\varepsilon\|)^{m_\alpha}$$

このとき、$F(\phi, x) := (Cd\, f_{n(\|\phi\|)})(\phi, x)$は$\mathcal{Y}(\Omega)$の元になる。

証明、任意に固定した$\phi \in \mathcal{A}_0$と$K \subset\subset \Omega$に対して

$$0<\varepsilon<\varepsilon_{K,\phi} \Rightarrow K + \mathrm{supp}\,\phi_\varepsilon \subset \Omega$$

を満たすように$\varepsilon_{K,\phi}$をとり、任意に固定した$\alpha \in \mathbb{N}_0^n$に対して、

$$0<\varepsilon<\varepsilon_{\alpha,\phi} \Rightarrow \sup_{x\in\Omega}|\partial^{(\alpha)} f_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}(x)| \leqq C_{\alpha,\phi}(\|\phi_\varepsilon\|)^{m_\alpha}$$

を満たすように$C_{\alpha,\phi}, \varepsilon_{\alpha,\phi}$をとることができる。ここにおいて、

$\varepsilon_{K,\alpha,\phi} := \min\{\varepsilon_{K,\phi}, \varepsilon_{\alpha,\phi}\}$, $C_{K,\alpha,\phi} := C_{\alpha,\phi}\|\phi\|^{m_\alpha} M_\phi$ とおけば、

$$|\partial^{(\alpha)}\mathcal{F}(\phi_\varepsilon, x)| \leqq \|\partial^{(\alpha)} f_{n(\|\phi_\varepsilon\|)}\|_{L^\infty(\Omega)} \times \int_{\mathrm{supp}\,\phi_\varepsilon} |\phi_\varepsilon(t)|\,dt \leqq C_{\alpha,\phi}(\|\phi_\varepsilon\|)^{m_\alpha} M_\phi$$

$$(0 < {}^\forall\varepsilon < \varepsilon_{K,\alpha,\phi},\ {}^\forall x \in K)$$

が成り立つ。M_ϕ は補題1の証明中に出てくるものである。

定理、Ω は $\mathbb{R}^l$ の相対コンパクトな開集合、Ω_1 は $\mathbb{R}^{m-l}$ $(l \leqq m)$ の相対コンパクトな開集合とする。次の型の微分方程式

(☆☆) $Lu(x_1, x_2, \cdots, x_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_l)$

ただし、$F(u, \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}}u, \cdots, \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x^{\alpha_k}}u) = Lu(x_1, x_2, \cdots, x_l)$ と考えると、$F(y_0, y_1, \cdots, y_k)$ は緩増加函数であるとする。

を考える。任意の l 変数多項式 $P(x_1, x_2, \cdots, x_l)$ に対して、

$$Lv(x_1, x_2, \cdots, x_m) = P(x_1, x_2, \cdots, x_l)$$

が $C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega_1})$ 解 $v(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ をもつとき、任意の $f \in C(\overline{\Omega})$ に対して (☆☆) は $\mathcal{Y}^\infty(\Omega \times \Omega_1)/\sim$ 解をもつ。

証明、補題1, 補題2により、次の2つの条件を満たす $C^\infty(\Omega \times \Omega_1)$ 函数列 $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を構成すれば充分である。

(i) $Lf_n(x) - f(x)$ が $\Omega \times \Omega_1$ 上 0 に一様収束する。

(ii) $\mathbb{R}_+$ で定義され、自然数値をとり、広義単調増加で無限大に発散する適当な函数 $n(y) \in \mathbb{N}$ $(y > 0)$ を用いて

$$\mathcal{F}(\phi, x) = (Cd\, f_{n(\|\phi\|)})(\phi, x)$$

と定めると、$\mathcal{F}(\phi, x)$ は $\mathcal{Y}^\infty(\Omega)$ の元になる。

補題3により、条件(ii)は次の条件(ii)$'$を示せば充分である。

(ii)$'$ 補題3の条件(☆)を満たす、$\mathbb{R}_+$で定義され、自然数値をとり、広義単調増加で無限大に発散する函数$n(y)$ $(y>0)$が存在する。

Ωはコンパクト集合なので、Weierstrassの多項式近似定理によって、$f\in C(\overline{\Omega})$に対して$\overline{\Omega}$上一様収束する多項式列$\{P_n(x_1,x_2,\cdots,x_\ell)\}_{n\in\mathbb{N}}$をとることができる。この多項式列に対し、

$$L u_n(x_1,x_2,\cdots,x_m)=P(x_1,x_2,\cdots,x_\ell)$$

を満たす$C^\infty(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}_1)$-函数列$\{u_n(x_1,x_2,\cdots,x_m)\}_{n\in\mathbb{N}}$をとれる。ここで、

$$n(y):=\max\left\{\left\{m\in\mathbb{N}:\sup_{x\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}_1}\{|\partial^{(\alpha)}u_j(x)|:|\alpha|\leqq m,1\leqq j\leqq m\}\leqq y\right\},1\right\}$$

とおけば、$n(y)$は$\{u_n(x_1,x_2,\cdots,x_m)\}_{n\in\mathbb{N}}$に対して(ii)$'$を満たす。

3、Lewy-溝畑の方程式の$\mathcal{Y}_*/\mathcal{O}$解について

定理、$f(x_2)\in C^\infty(\mathbb{R})\setminus C^\omega(\mathbb{R})$で、周期$2\pi$の周期函数、また、$g(\phi,x_2)\in\mathcal{Y}_*(\mathbb{R})$は$g(\phi,x_2)\overset{0}{\approx}0$で、$\phi$を固定すると$x_2$について周期$2\pi$の周期函数になるとする。このとき、

(1) $(\partial_1+ix_1\partial_2)u(\phi,(x_1,x_2))\overset{\text{in }\mathcal{Y}_*}{=}(Cdf)(\phi,x_2)+g(\phi,x_2)$

を満たすような$u(\phi,(x_1,x_2))\in\mathcal{Y}_*(\mathbb{R})$は存在しない。

証明、以下、等号は$\mathcal{Y}_*$での意味のものとする。ただし、絶対値に関する等号、不等号は通常の意味のものとする。

条件を満たす$u(\phi,(x_1,x_2))\in\mathcal{Y}_*(\mathbb{R})$が存在すると仮定して矛盾

を導く。uはϕ, x_1を固定するごとにx_2についての周期2πの周期函数と考えてよい。u, f, gのx_2についての複素Fourier級数展開を考え、式(1)は各Fourier係数$u_p(\phi, x_1), f_p, g_p(\phi)$ごとの常微分方程式と考えることができる。

$$(\partial_1 - p x_1) u_p(\phi, x_1) = f_p + g_p(\phi)$$

解は、$u_p(\phi, x_1) = u_p(\phi, 0) + e^{\frac{1}{2} p x_1^2} \int_0^{x_1} (f_p + g_p(\phi)) e^{-\frac{1}{2} p s^2} ds$ となる。

ある$x_1 = 2\delta > 0$に対して成り立つので代入し、変形すると、

(2) $f_p \int_0^{2\delta} e^{\frac{1}{2} p (4\delta^2 - s^2)} ds = u_p(\phi, 2\delta) - u_p(\phi, 0) - g_p(\phi) \int_0^{2\delta} e^{\frac{1}{2} p (4\delta^2 - s^2)} ds$

(3) $|\delta e^{p\delta^2}| \leqq \left| \int_0^{\delta} e^{\frac{1}{2} p (4\delta^2 - s^2)} ds \right| \leqq \left| \int_0^{2\delta} e^{\frac{1}{2} p (4\delta^2 - s^2)} ds \right|$

$K = [0, 2\pi]$と$\phi(x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$に対しては

$^\exists C_{K,\phi}, {}^\exists \theta_{K,\phi}, {}^\exists l_{K,\phi} \in \mathbb{N}$ s.t. (4) $|g_p| = \left| \int_0^{2\pi} g(\phi_\varepsilon, x_2) e^{-ipx_2} dx_2 \right| \leqq C_{K\phi} \varepsilon^{\theta_{K,\phi}} (|p|+1)^{l_{K,\phi}}$

$0 < {}^\forall \varepsilon < \theta_{K,\phi}$

$K' = [0, 2\delta] \times [0, 2\pi]$と$\phi(x) \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^2)$に対しては

$^\exists C_{K',\phi}, {}^\exists \varepsilon_{K',\phi}, {}^\exists m_{K'} \in \mathbb{N}$ s.t. $\sup_{(x_1, x_2) \in K'} |u(\phi_\varepsilon, (x_1, x_2))| \leqq C_{K',\phi} \varepsilon^{-m_{K'}}, \ 0 < {}^\forall \varepsilon < \varepsilon_{K',\phi}$

よって、(5) $\sup_{x_1 \in [0, 2\delta]} |u_p(\phi_\varepsilon, x_1)| = \sup_{x_1 \in [0, 2\delta]} \left| \int_0^{2\pi} u(\phi_\varepsilon, (x_1, x_2)) e^{-ipx_2} dx_2 \right| \leqq 2\pi C_{K',\phi} \varepsilon^{-m_{K'}}$

$0 < {}^\forall \varepsilon < \varepsilon_{K',\phi}$

ここで、式(3), (4), (5)を用いて$|f_p|$を評価すると、

$$|f_p| \leqq \frac{1}{\delta e^{p\delta^2}} 4\pi C_{K',\phi} \frac{1}{\varepsilon^{m_{K'}}} + C_{K,\phi} \varepsilon^{\theta_{K\phi}} (|p|+1)^{l_{K\phi}}, \ 0 < {}^\forall \varepsilon < \min\{\theta_{K,\phi}, \varepsilon_{K',\phi}\}$$

また、εをpの狭義単調減少函数$\varepsilon(p) = \exp\left(-\frac{p\delta^2 \theta_{K,\phi}}{2m_{K'}}\right)$と思えば、

$$|f_p| \leqq \left(\frac{4\pi C_{K',\phi}}{\delta} + C_{K,\phi} (|p|+1)^{l_{K,\phi}} \right) \exp\left(-\frac{p\delta^2 \theta_{K,\phi}^2}{2m_{K'}} \right)$$

となり、fのFourier係数f_pがpに関して指数的に減少するので$f(x_2) \in C^\omega(\mathbb{R})$が導かれる。これは矛盾である。