

## 一様せん断流中の渦管における渦度の伸張と排除

愛媛大院 木山 公志 (Hiroshi Kiyama)  
愛媛大工 河原 源太 (Genta Kawahara)  
愛媛大工 鮎川 恭三 (Kyozo Ayukawa)

### 1 緒言

近年の研究により、流れ方向に向いた管状の渦構造（縦渦）の存在が一様せん断乱流や壁乱流に代表される様々なせん断乱流で確認されている。この渦構造は乱れの生成や維持に重大な寄与をなすものと考えられている。この種の渦構造に関する理論解析としては Pearson & Abernathy (1984) と Moore (1985) の研究があり、彼らは一様せん断流中の直線状渦管が流れ方向に向いた場合に対して相似解を与えている。この相似解は、Reynolds 数が大きい場合に、せん断流の渦度が渦管の周辺部では渦管に巻き付けられるため伸張・強化され、一方渦管付近では粘性により排除されることを示している。しかしながら、実際に観測されているせん断乱流中の縦渦は、完全に流れ方向に向いているものよりも、むしろ流れ方向に対して傾きをもつものが大半であると考えられる (Bernard, Thomas & Handler 1993 参照)。

本報告では、一様せん断流中の渦管が流れに対してスパン方向にわずかに傾いた場合の漸近解析を行い、渦管の傾きが上述のせん断流の渦度の伸張と排除に及ぼす影響について述べる。特に、渦管がせん断流の渦度の向きに傾く場合 (cyclonic vortex tube) と反対向きに傾く場合 (anti-cyclonic vortex tube) との相違に注目する。

### 2 定式化

ここで考察する流れの概略を図 2.1 に示す。流体は非圧縮であり、流れの諸量は  $z$  方向（渦管軸方向）に一様であるとする。渦管は  $z$  方向に真っ直ぐに存在しており、せん断流はそれぞれ、 $z$  方向に  $\beta y$  ( $\beta > 0$ )、 $x$  方向に  $\alpha y$  の流速成分をもっている。渦管の流れに対するスパン方向への傾きをせん断流の  $x$  方向の速度  $\alpha y$  の正負によって与えることにする。以下、渦管の渦度とせん断流の渦度とがなす角が 90 度より小さい場合 ( $\alpha < 0$ ) を “cyclonic” と呼び、90 度より大きい場合 ( $\alpha > 0$ ) を “anti-cyclonic” と呼ぶ。

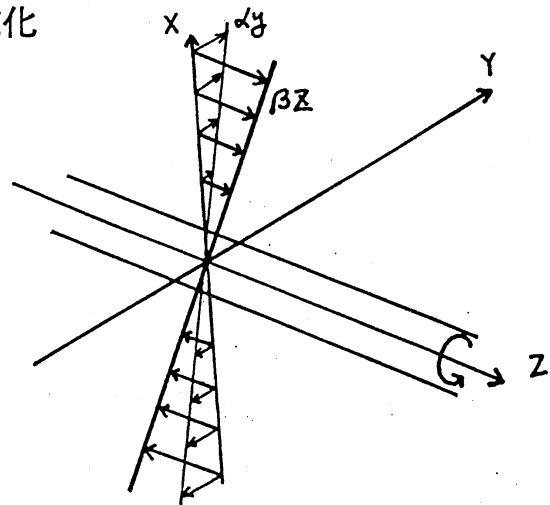


Fig. 2.1 Flow configuration and coordinate system

渦管に垂直な  $x$  および  $y$  方向の速度成分  $u$  および  $v$  を揺らぎとせん断流からの寄与に分解する。

$$u = u' + \alpha y, \quad v = v'. \quad (2.1)$$

渦度の各成分は

$$\omega_x = \partial_y w - \partial_z v' = \partial_y w, \quad (2.2)$$

$$\omega_y = \partial_z (u' + \alpha y) - \partial_x w = -\partial_x w, \quad (2.3)$$

$$\omega_z = \partial_x v' - \partial_y (u' + \alpha y) = \omega_z' - \alpha \quad (2.4)$$

与えられる。ここに、 $w$  は速度の  $z$  成分、 $\omega_z' = \partial_x v' - \partial_y u'$  は渦度揺らぎの  $z$  成分である。

流れの  $z$  方向の一様性から, Navier-Stokes 方程式と渦度方程式の  $z$  方向成分は

$$\partial_t \omega - \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} + \alpha y \partial_x \omega = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2) \omega \quad (2.5)$$

$$\partial_t w - \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(x, y)} + \alpha y \partial_x w = \nu(\partial_x^2 + \partial_y^2) w \quad (2.6)$$

と表せ,  $\omega$  (以下  $\omega'_z$  を  $\omega$  と表す) と  $w$  に対して閉じた方程式系となる. ここに,  $\nu$  は動粘度,  $\psi$  は渦管に垂直な揺らぎに関する流れ関数である.

$$u' = \partial_y \psi, \quad v' = -\partial_x \psi, \quad \nabla^2 \psi = -\omega. \quad (2.7)$$

代表時間として  $1/\beta$  をとり, 代表長さ  $\delta = \sqrt{\nu/\beta}$  を用いて,

$$t^* = \beta t, \quad x^* = x/\delta, \quad y^* = y/\delta, \quad \psi^* = \psi/\Gamma, \quad \omega^* = \omega/(\Gamma/\delta^2), \quad w^* = w/(\beta\delta) \quad (2.8)$$

のような無次元化された変数を導入する. ここに,  $\psi$  および  $\omega$  は渦管の循環  $\Gamma$  を陽に含まないように無次元化されている. 式 (2.5) および (2.6) に無次元化された変数を導入し, 無次元量に付した \* を省略すると

$$\partial_t \omega - R_\Gamma \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} + \lambda y \partial_x \omega = (\partial_x^2 + \partial_y^2) \omega \quad (2.9)$$

$$\partial_t w - R_\Gamma \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(x, y)} + \lambda y \partial_x w = (\partial_x^2 + \partial_y^2) w \quad (2.10)$$

を得る.

$$R_\Gamma = \frac{\Gamma}{\nu} \quad (2.11)$$

は Reynolds 数で,

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta} \quad (2.12)$$

はせん断流の渦管軸方向と垂直方向のせん断率の比である. 次の節において, 渦管の傾きが小さい ( $\lambda \ll 1$ ) 場合に対して式 (2.9) および (2.10) の漸近解を求める.

### 3 $\lambda \ll 1$ における漸近解析

さて, 極座標  $(r, \theta)$  ( $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ) を導入し, 渦管の傾きが小さい ( $\lambda \ll 1$ ) として解を

$$\omega = \omega^{(0)} + \lambda \omega^{(1)} + \lambda^2 \omega^{(2)} + \dots \quad (3.1)$$

$$w = w^{(0)} + \lambda w^{(1)} + \lambda^2 w^{(2)} + \dots \quad (3.2)$$

のように  $\lambda$  で展開して (2.9) および (2.10) に代入すると,  $\omega$  に対して

$$\lambda^0 : \partial_t \omega^{(0)} - R_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(0)}, \omega^{(0)})}{\partial(r, \theta)} = L_0 \omega^{(0)}, \quad (3.3)$$

$$\lambda^1 : \partial_t \omega^{(1)} - R_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(0)}, \omega^{(1)})}{\partial(r, \theta)} - R_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(1)}, \omega^{(0)})}{\partial(r, \theta)} + L_1 \omega^{(0)} = L_0 \omega^{(1)}, \quad (3.4)$$

$w$  に対して

$$\lambda^0 : \partial_t w^{(0)} - R_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(0)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)} = L_0 w^{(0)}, \quad (3.5)$$

$$\lambda^1 : \partial_t w^{(1)} - R_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(0)}, w^{(1)})}{\partial(r, \theta)} - R_\Gamma \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(1)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)} + L_1 w^{(0)} = L_0 w^{(1)} \quad (3.6)$$

を得る. ここに

$$L_0 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2, \quad (3.7)$$

$$L_1 = \frac{1}{2} (r \sin 2\theta \partial_r + \cos 2\theta \partial_\theta - \partial_\theta). \quad (3.8)$$

$\lambda^0$  オーダーの方程式は Pearson & Abernathy および Moore (1985) が得たものに一致し,  $\lambda^1$  オーダーの解が渦管の流れに対する傾きの影響を表す. 以下, 初期時刻  $t = 0$  において一様せん断流中に  $z$  軸に沿って渦糸を配置し, その後の式 (3.3)-(3.6) の解について考える.

### 3.1 渦管

初期条件として渦糸を与えると, (3.3) の解は

$$\omega^{(0)} = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{r^2}{4t}}, \quad (3.9)$$

$$\psi^{(0)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^r (1 - e^{-\frac{r'^2}{4t}}) r'^{-1} dr' \quad (3.10)$$

のような拡散渦となる.

### 3.2 渦運動によるせん断流の変形

式 (3.5) の解として,

$$w^{(0)} = r \operatorname{Real} [ie^{-i\theta} F(\eta)] \quad (3.11)$$

のような変数分離系の相似解を仮定する. ここに,  $\eta = r/(2\sqrt{t})$  は相似変数である. (3.11) を (3.5) に代入すれば

$$F'' + \left(2\eta + \frac{3}{\eta}\right) F' + i \frac{R_\Gamma}{2\pi} \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} F = 0 \quad (3.12)$$

を得る. この式の境界条件は,  $\eta = 0$  で  $rF(\eta)$  が正則, および  $F(\infty) = 1$  である.

$R_\Gamma/(2\pi) = 1, 10, 50, 100$  における (3.12) の数値解を求めた. 式 (2.2) および (2.3) から渦管に垂直な渦度成分は

$$\omega_x^{(0)} = \operatorname{Real} [F(\eta) + \frac{\eta}{2} F'(\eta)(1 - e^{-i2\theta})] \quad (3.13)$$

$$\omega_y^{(0)} = \operatorname{Imag} [F(\eta) + \frac{\eta}{2} F'(\eta)(1 + e^{-i2\theta})] \quad (3.14)$$

で与えられる. 渦度の渦管に垂直な成分を図 4.1 のベクトル線図で示す. 座標系は横方向に  $x$  軸, 縦方向に  $y$  軸, 紙面から手前に  $z$  軸である.  $R_\Gamma/(2\pi) = 1$  の場合 ((a)), 渦管によるせん断流の変形はわずかであり, 渦管が存在しない場合のせん断流からの渦度の増減は 7% 程度である. Reynolds 数が大きくなるにつれ ((b), (c), (d)), 渦管が誘導する旋回流によってせん断流の渦度がより強く巻き付けられるため, 渦管の周辺部において渦度が伸張・強化されている.  $R_\Gamma$  が大きくなると ((c), (d)), 概ね  $(x, y)$  面の第 2, 4 象限において渦度の伸張が顕著となる. 一方, 渦管の中心付近では ((c), (d)), 垂直渦度が小さくなっており, 渦度の排除 (Moore 1985) が起こり始めていることが分かる.

### 3.3 せん断流による渦管の変形

式 (3.4) に (3.9) および (3.10) を代入し, (2.7) を用いると

$$-\partial_t \nabla^2 \psi^{(1)} + R_\Gamma \frac{1}{r} (\partial_r \psi^{(0)} \partial_\theta \nabla^2 \psi^{(1)} + \partial_\theta \psi^{(1)} \partial_r \omega^{(0)}) + \frac{1}{2} r \sin 2\theta \partial_r \omega^{(0)} = -\nabla^4 \psi^{(1)} \quad (3.15)$$

を得る. この式の解として

$$\psi^{(1)} = \frac{t}{\pi} \operatorname{Real} [g(\eta) e^{-i2\theta}] \quad (3.16)$$

のような形を仮定すると,

$$\begin{aligned} g^{iv} + \left(2\eta + \frac{2}{\eta}\right) g''' + \left(2 - \frac{9}{\eta^2}\right) g'' - \left(\frac{10}{\eta} - \frac{9}{\eta^3}\right) g' + \frac{16}{\eta^2} g \\ + i \frac{R_\Gamma}{\pi} \left[ \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} \left(g'' + \frac{1}{\eta} g' - \frac{4}{\eta^2} g\right) + 4e^{-\eta^2} g \right] = i4\eta^2 e^{-\eta^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

を得る。境界条件は、 $\eta = 0$  において  $tg(\eta)$  が正則、および  $tg(\infty) = 0$  である。

$\psi^{(1)}$  に伴う  $x$  方向および  $y$  方向の速度揺らぎは (2.7) から

$$u^{(1)} = \frac{t}{\pi} \text{Imag} \left[ \left( \frac{1}{r} g(\eta) - \frac{1}{4\sqrt{t}} g'(\eta) \right) e^{-i3\theta} + \left( \frac{1}{r} g(\eta) + \frac{1}{4\sqrt{t}} g'(\eta) \right) e^{-i\theta} \right], \quad (3.18)$$

$$v^{(1)} = \frac{t}{\pi} \text{Real} \left[ \left( \frac{1}{r} g(\eta) - \frac{1}{4\sqrt{t}} g'(\eta) \right) e^{-i3\theta} - \left( \frac{1}{r} g(\eta) + \frac{1}{4\sqrt{t}} g'(\eta) \right) e^{-i\theta} \right] \quad (3.19)$$

で与えられる。図 4.2 に (3.17) の数値解に基づいて (3.18) および (3.19) で得られる  $R_F/(2\pi) = 1, 10, 50, 100$  の速度場を示す (図 4.2 (c), (d) の縦横スケールは図 4.1 および 図 4.3 の (c), (d) のそれとは異なることに注意)。これに展開パラメータ  $\lambda$  および 時間  $t$  をかけたものが実際の高次の速度で、 $\lambda$  が負となる cyclonic の場合には、速度の向きが反転した流れ場になる。速度場は 4 重極渦度分布に伴うもので、Reynolds 数が大きくなると 4 重極の軸が徐々に反時計方向に傾くような流れ場になっている。4 重極の軸は  $R_F = 0$  から  $\infty$  の間で  $\frac{1}{4}\pi$  だけ傾く (Moffatt, Kida & Ohkitani 1994)。 $R_F$  が大きくなると ((c), (d)), 概ね  $(x, y)$  面の第 1, 3 象限において原点から遠ざかる流れ, 第 2, 4 象限において原点に近づく流れとなる。この速度場による渦度の渦管垂直成分の対流, 傾き (tilting) および伸張 (stretching) が, 次節で示すように渦管周りの渦度の伸張と排除に重要な影響を及ぼす。

### 3.4 渦度の伸張と排除への渦管の傾きの影響

式 (3.6) の解として

$$w^{(1)} = rt \text{Real} [G_3(\eta)e^{-i3\theta} + G_1(\eta)e^{-i\theta}] \quad (3.20)$$

のような形を仮定し, (3.6) に代入すると

$$G_3'' + \left( 2\eta + \frac{3}{\eta} \right) G_3' - 4 \left( 1 + \frac{2}{\eta^2} \right) G_3 + i3 \frac{R_F}{2\pi} \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} G_3 = -\frac{2}{\eta} \xi(\eta), \quad (3.21)$$

$$G_1'' + \left( 2\eta + \frac{3}{\eta} \right) G_1' - 4G_1 + i \frac{R_F}{2\pi} \frac{1 - e^{-\eta^2}}{\eta^2} G_1 = -\frac{2}{\eta} \zeta(\eta) \quad (3.22)$$

を得る。ここに

$$\xi(\eta) = \left[ \frac{R_F}{2\pi} A(\eta) + P(\eta) + i \left( \frac{R_F}{2\pi} B(\eta) + Q(\eta) \right) \right], \quad (3.23)$$

$$\zeta(\eta) = \left[ \frac{R_F}{2\pi} C(\eta) + R(\eta) + i \left( \frac{R_F}{2\pi} D(\eta) + S(\eta) \right) \right] \quad (3.24)$$

で,  $A(\eta), B(\eta), C(\eta), D(\eta)$  および  $P(\eta), Q(\eta), R(\eta), S(\eta)$  は

$$A(\eta) = \frac{1}{2}(F_R g'_R - F_I g'_I) + (F'_I g_I - F'_R g_R) + \frac{1}{\eta}(F_I g_I - F_R g_R), \quad (3.25)$$

$$B(\eta) = \frac{1}{2}(F_R g'_I + F_I g'_R) - (F'_I g_R + F'_R g_I) - \frac{1}{\eta}(F_I g_R + F_R g_I), \quad (3.26)$$

$$C(\eta) = \frac{1}{2}(F_R g'_R + F_I g'_I) + (F'_I g_I + F'_R g_R) + \frac{1}{\eta}(F_R g_R + F_I g_I), \quad (3.27)$$

$$D(\eta) = \frac{1}{2}(F_R g'_I - F_I g'_R) - (F'_I g_R - F'_R g_I) - \frac{1}{\eta}(F_I g_R - F_R g_I), \quad (3.28)$$

$$P(\eta) = \frac{\eta^2}{2} F'_R, \quad (3.29)$$

$$Q(\eta) = \frac{\eta^2}{2} F'_I, \quad (3.30)$$

$$R(\eta) = -\frac{\eta^2}{2} F'_R, \quad (3.31)$$

$$S(\eta) = \frac{\eta}{2}(4F_I + \eta F'_I) \quad (3.32)$$

で与えられる。ただし、

$$F_R = \text{Real}[F(\eta)], \quad F_I = \text{Imag}[F(\eta)], \quad (3.33)$$

$$g_R = \text{Real}[g(\eta)], \quad g_I = \text{Imag}[g(\eta)] \quad (3.34)$$

である。式 (3.21) および (3.22) の右辺の中、

$$-2[RA(\eta) + iRB(\eta)]/\eta, \quad -2[RC(\eta) + iRD(\eta)]/\eta \quad (3.35)$$

は前節の 4 重極による対流に、

$$-2[P(\eta) + iQ(\eta)]/\eta, \quad -2[R(\eta) + iS(\eta)]/\eta \quad (3.36)$$

はせん断流による対流に由来している。  $R_F$  が大きくなると、前者の寄与が支配的となる。式 (3.21) および (3.22) の境界条件は、  $\eta = 0$  で  $rtG_3(\eta)$ ,  $rtG_1(\eta)$  が正則、および  $rtG_3(\infty) = 0$ ,  $rtG_1(\infty) = 0$  である。

高次の垂直渦度成分は (2.2) および (2.3) から

$$\omega_x^{(1)} = t \text{Imag} \left[ G_1 + \frac{1}{2}\eta G_1 + (2G_3 + \frac{1}{2}\eta) (G'_3 - G'_1) e^{-i2\theta} + (G_3 - \frac{1}{2}\eta G'_3) e^{-i4\theta} \right], \quad (3.37)$$

$$\omega_y^{(1)} = -t \text{Real} \left[ G_1 + \frac{1}{2}\eta G_1 + (2G_3 + \frac{1}{2}\eta) (G'_3 - G'_1) e^{-i2\theta} + (G_3 - \frac{1}{2}\eta G'_3) e^{-i4\theta} \right] \quad (3.38)$$

によって得られる。  $R_F/(2\pi) = 1, 10, 50, 100$  における (3.21), (3.22) の数値解に基づき、上式から得られた垂直渦度のベクトル線図を図 4.3 に示す。この図においても図 4.2 と同様、展開パラメータ  $\lambda$  および時間  $t$  をかけたものが実際の高次の渦度で、  $\lambda$  が負となる cyclonic の場合には、渦度の向きが反転した場になる。  $R_F/(2\pi) = 1, 10$  では ((a), (b)), 渦管の中心付近において渦度が強く、その向きはおおよそ leading-order の渦度 (図 4.1 (a), (b)) の向きに近い。この高次の渦度は、leading-order の渦度が 4 重極による流れ (図 4.2 (a), (b)) によって伸張されるために生ずる。渦管の中心付近では、anti-cyclonic の場合に leading-order の渦度が強められ、一方 cyclonic の場合には弱められる。  $R_F$  が大きくなると ((c), (d)), 中心付近の渦度は小さくなり、渦管の周辺部、特に  $(x, y)$  面の第 2, 4 象限において強くなる。そこでの渦度の向きは leading-order の渦度 (図 4.1 (c), (d)) の向きに近い。  $R_F/(2\pi) = 50, 100$  では、  $R_F/(2\pi) = 1, 10$  とは異なり、4 重極自身は渦度の排除領域内にある。第 2, 4 象限において leading-order の渦度とほぼ同じ向きの強い渦度が生成されるのは、主にこれらの象限では 4 重極が誘導する流れによって leading-order の渦度が原点に向かって移流されるためである。渦管の周辺部でも、anti-cyclonic の場合に leading-order の渦度が強められ、一方 cyclonic の場合には弱められる。

最後に、anti-cyclonic と cyclonic の場合の渦度の大きさの相違について検討する。ここでは、円周上  $\eta = \text{const.}$  での垂直渦度の大きさ  $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$  の最大値  $\omega_{max}$  を考える。図 4.4 に  $t = 1$  における anti-cyclonic ( $\lambda = 0.1$ ), neutral ( $\lambda = 0$ ) および cyclonic ( $\lambda = -0.1$ ) の各場合に対する  $\omega_{max}$  を示す。渦度の最大値はどの Reynolds 数でも anti-cyclonic は neutral よりも強められ、cyclonic は弱められている。なお、原点での anti-cyclonic および cyclonic の場合の渦度の大きさを neutral の渦度の大きさを正規化して比較すると (図 4.5), neutral に比べ anti-cyclonic では渦度の排除が抑制され、cyclonic では促進されることが分かる。ただし、本研究では  $R_F/(2\pi) = 100$  までの解析しか行っていないので、より高い Reynolds 数において渦管の傾きが渦度の伸張と排除に及ぼす影響については今後の研究課題である。

## 4 結 言

一様せん断流中の渦管が流れに対してスパン方向に傾いた場合に、渦管の傾きがそれに垂直な渦度の伸張と排除に及ぼす影響を調べるため、渦管の傾きが小さいとして漸近解析を行った。渦管の周辺部における垂直渦度は、渦管がせん断流の渦度の向きに傾く場合 (cyclonic) に弱められ、反対向きに傾く場合 (anti-cyclonic) には強められる。また、渦管の中心付近では cyclonic の場合に渦度の排除が促進され、anti-cyclonic の場合には抑制される。

## 文献

BERNARD, P. S., THOMAS, J. M. & HANDLER, R. A. 1993 Vortex dynamics and the production of Reynolds stress. *J. Fluid Mech.* **253**, 385–419.

MOFFATT, H. K., KIDA, S. & OHKITANI, K. 1994 Stretched vortices – the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics. *J. Fluid Mech.* **259**, 241–264.

MOORE, D. W. 1985 The interaction of a diffusing line vortex and aligned shear flow. *Proc. R. Soc. Lond. A* **399**, 367–375.

PEARSON, C. F. & ABERNATHY, F. H. 1984 Evolution of the flow field associated with a streamwise diffusing vortex. *J. Fluid Mech.* **146**, 271–283.

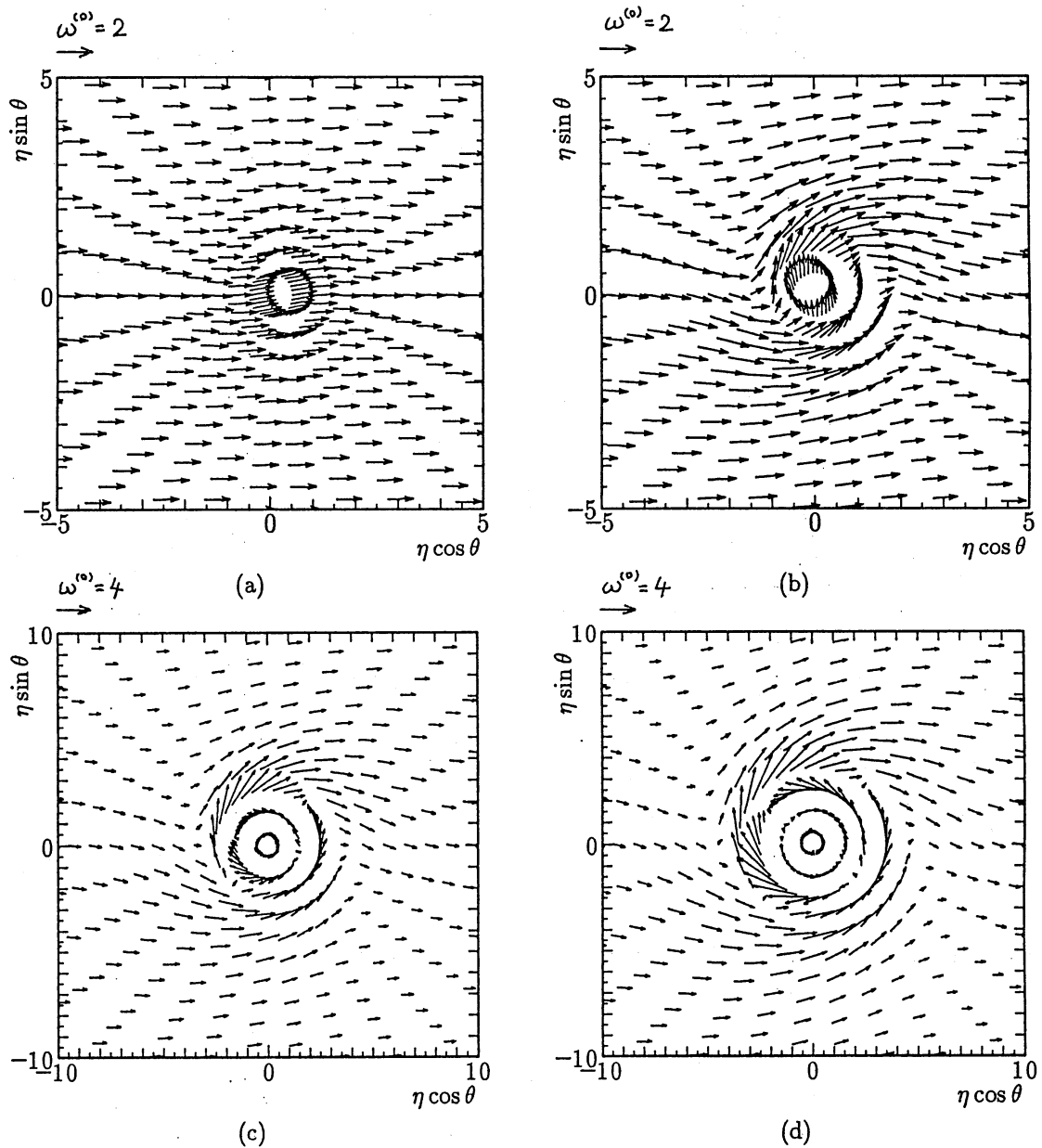


Fig.4.1 Leading-order normal vorticity  $(\omega_x^{(0)}, \omega_y^{(0)})$  to the vortex tube at (a)  $R/(2\pi) = 1$ , (b) 10, (c) 50, and (d) 100.

$$u^{(1)}/t = 0.2 R_p / (2\pi)$$

→

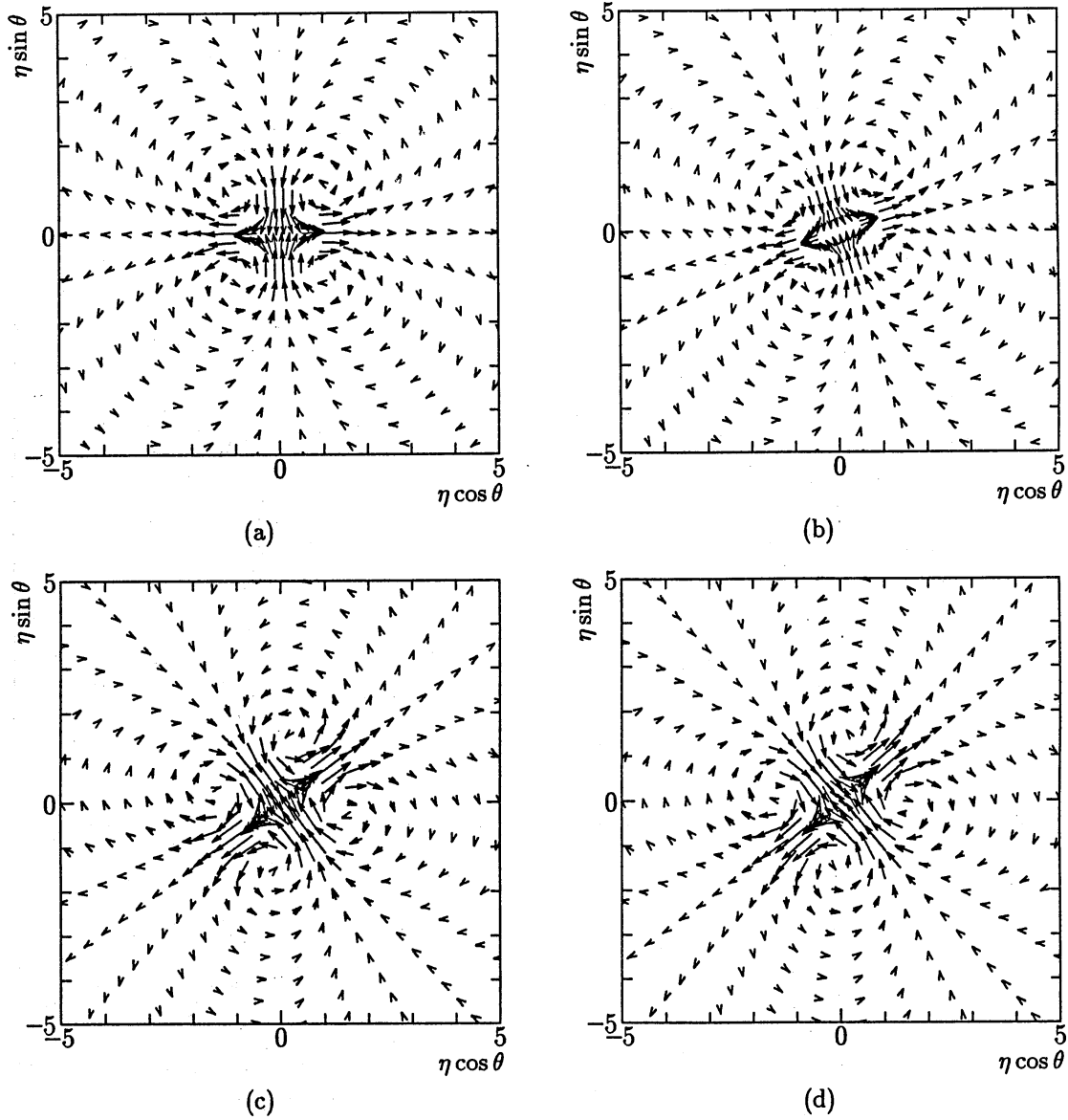


Fig.4.2 First-order normal velocity fluctuation  $(u^{(1)}/t, v^{(1)}/t)$  at (a)  $R/(2\pi) = 1$ , (b) 10, (c) 50, and (d) 100.

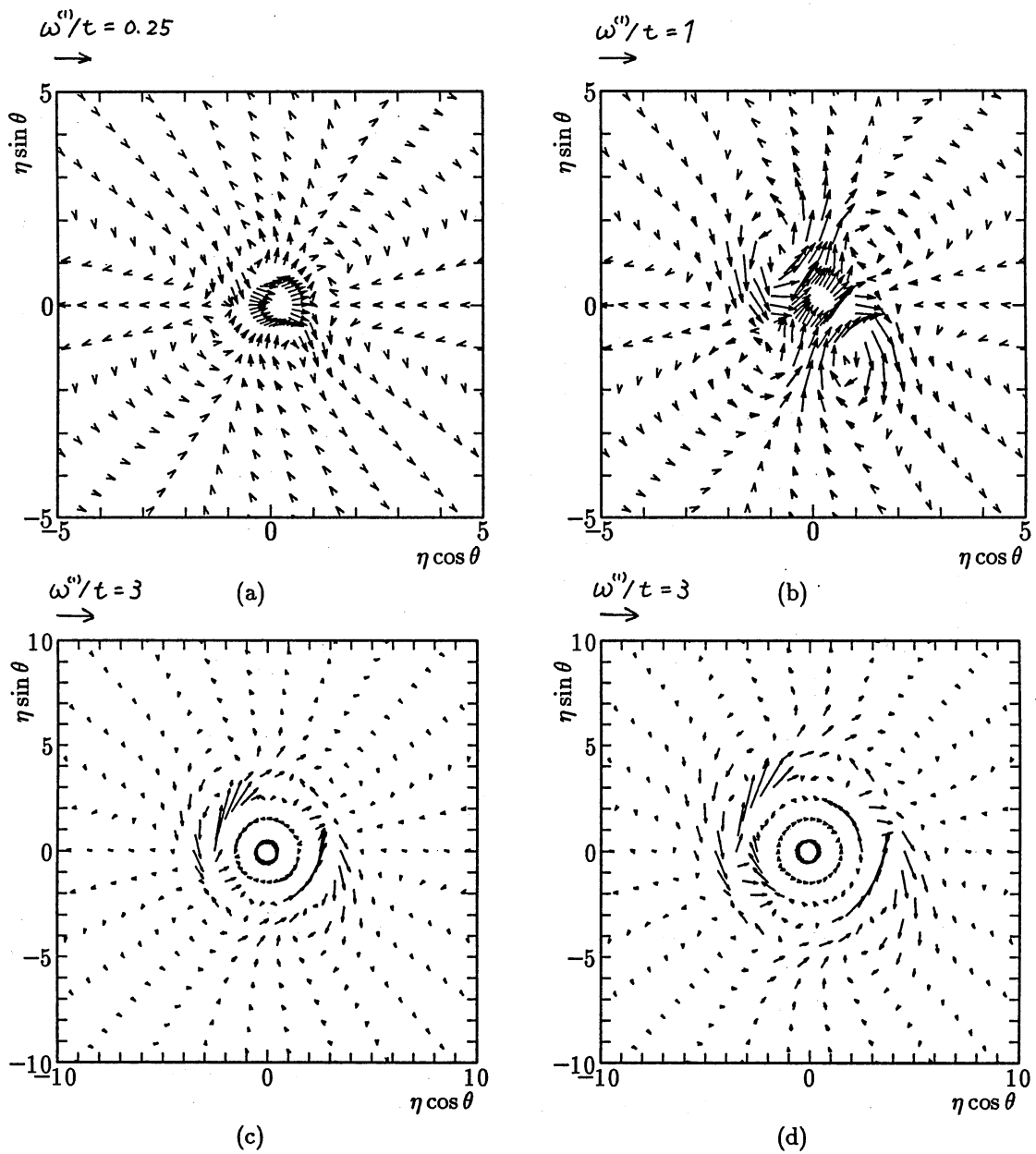


Fig.4.3 First-order normal vorticity ( $\omega_x^{(1)}/t, \omega_y^{(1)}/t$ ) to the vortex tube at (a)  $R/(2\pi) = 1$ , (b) 10, (c) 50, and (d) 100.



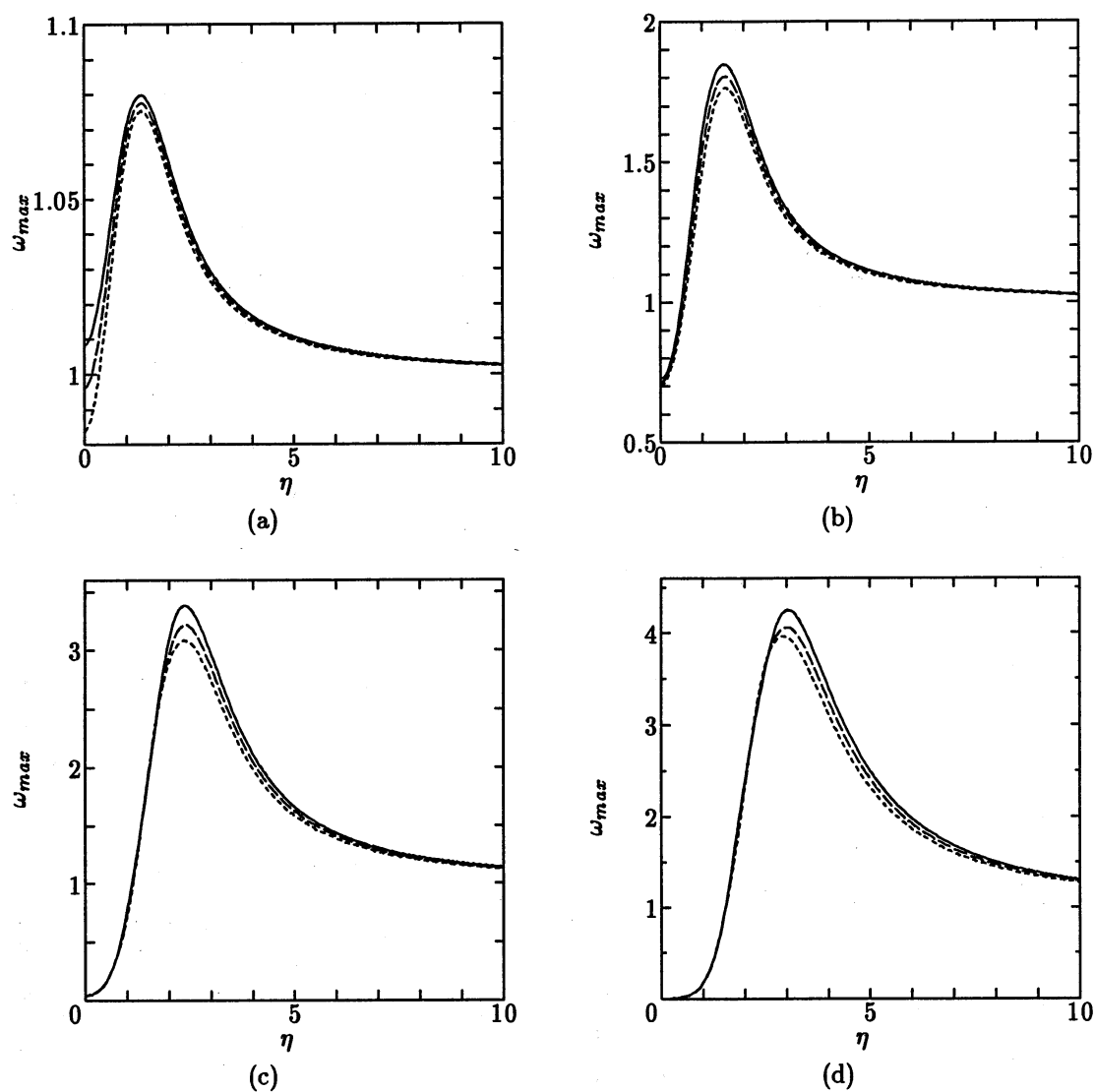


Fig.4.4 maximum absolute vorticity  $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$  for  $\eta$  at (a)  $R/(2\pi) = 1$ , (b) 10, (c) 50, and (d) 100. solid line denotes 'anti-cyclonic', dotted line 'cyclonic', and dashed line 'neutral'.

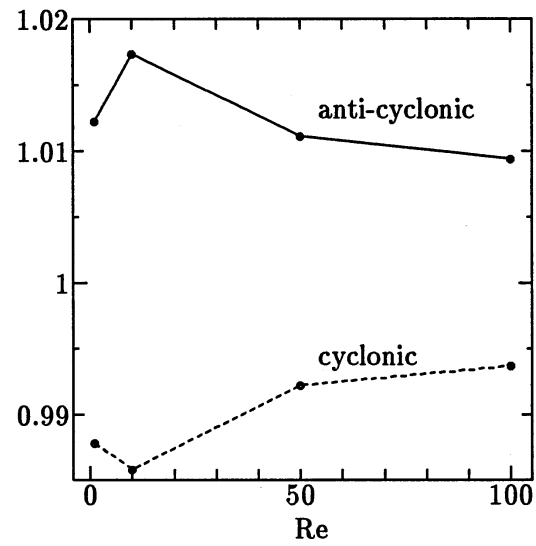


Fig.4.5 Ratio of vorticity magnitude in cyclonic ( $\lambda = -0.1$ ) and anti-cyclonic ( $\lambda = 0.1$ ) cases to that in a neutral case ( $\lambda = 0$ ) at the origin  $\eta = 0$  and at time  $t = 1$