数理解析研究所講究録
973巻 1996年 81-95

Capillary problem for singular degenerate parabolic equations in a general domain

東京都立大・理 石井 仁司 (Hitoshi Ishii)
室蘭工大・工 佐藤 元彦 (Moto-Hiko Sato)

§.0 序

次の境界値問題を考える。

$$u_t + F(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{in} \quad Q \equiv (0,T)\times\Omega \qquad (0.1)$$

$$B(x, \nabla u) = 0 \quad \text{on} \quad S \equiv (0,T)\times\partial\Omega \qquad (0.2)$$

ここで、ΩをR^nの有界領域、Tを正値とする。(0.1)の方程式は平均曲率流方程式を含む退化放物型方程式である。また、境界条件(0.2)はcapillary boundary condition,

$$\langle \nu(x), \nabla u\rangle - k(x)|\nabla u| = 0 \qquad (0.3)$$

(ここで、νは$\partial\Omega$の外向き単位法ベクトル)

を含む境界条件である。本稿で示したいことは、境界値問題(0.1)-(0.2)に対する粘性解の比較定理を証明することである。

(0.3)において$k(x)=0$の場合はノイマン問題となり、[6]ですでに証明されている。またkが定数でΩが半空間の場合には、[8]で示されている。(0.1)の方程式において∇uに関して連

続性がある場合は、[1][7]などで、扱われている。Fが空間に依っている一般化された曲率流方程式の定常曲面の解の安定性の結果[5]に対して、本稿の比較定理の考えが用いられている。

§1，比較定理

まずΩ, B, Fに対する仮定を列挙する。

(Ω1)　$\Omega \subset \mathbb{R}^n$は有界な開集合

(Ω2)　$\partial\Omega$はC^1級の曲面

(B1)　$B \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$

(B2)　$B(x, \lambda p) = \lambda B(x, p)$, $\forall \lambda \geq 0$

(B3)　$\exists \theta > 0$ s.t. $\langle \nu(z), D_p B(z, p) \rangle \geq \theta$, $\forall z \in \partial\Omega$

($\nu(z)$は$\partial\Omega$上の点zでの外向き法ベクトル)

(F1)　$F \in C((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{S}^n)$

(F2)　$\exists K > 0$ s.t.

$$\begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} \leq \nu \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}, \quad \nu \geq 0, \ \mu \geq 0$$

を満すとき任意の$p, q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$に対して

$$F(p, X) - F(q, -Y) \geq -K(\nu|p - q|^2 + \mu + |p - q|)$$

が成り立つ。

Remark 1.1

(F2)の仮定は次の仮定(i)(ii)を含んでいる。

(i) F が退化楕円型

(ii) $-\infty < F_*(0,0) = F^*(0,0) < \infty$

ここで F_*, F^* は、それぞれ下半（上半）連続包を意味する。

F_*, F^* の定義は[2][4]を参照

我々の目標は次の定理を示すことである。

定理1.1

$(\Omega 1)$-$(\Omega 2)$, (B1)-(B3), (F1)-(F2)を仮定する。u, v をそれぞれ(0,1)-(0,2)の粘性劣(優)解とする。$u^*(0,x) \leq v_*(0,x)$ on $\overline{\Omega}$

$\Rightarrow u^* \leq v_*$ on $(0,T) \times \overline{\Omega}$

Remark 1.2 境界条件が(0,3)の場合には、ν が定義されるために $(\Omega 2)$ の仮定は $\partial\Omega \in C^{2,1}$ の Regularity が必要になる。

定理1.1の証明において、境界条件(0,2)を考慮したテスト関数を構成することがkeyになる。

補題1.1 $(\Omega 1)$-$(\Omega 2)$, (B1)-(B3)の仮定する。$\overline{\Omega}$ の近傍 U と次のような $v \in C(U \times \mathbb{R}^n)$ と $\delta > 0$ が存在する。

(1.1) $v(x, \lambda\xi) = \lambda^2 v(x,\xi) \quad {}^\forall \lambda \geq 0$

(1.2) $v \in C^{1,1}(U \times \mathbb{R}^n)$

(1.3) $v(x,\xi) > 0 \quad {}^\forall \xi \neq 0$

(1.4) $x \in \partial\Omega$, $\langle \nu(x), \xi \rangle \geqq -\delta|\xi|$

$\Rightarrow B(x, \nabla_\xi v(x,\xi)) \geqq 0$

(1.5) $x \in \partial\Omega,\ \langle \nu(x), \xi \rangle \leqq \delta|\xi|$

$\Rightarrow B(x, \nabla_\xi v(x,\xi)) \leqq 0$

Remark 1.3 (1.1)と(1.2)の仮定から次が成り立つ。

$\exists C_0$ s.t

$$\left.\begin{array}{l} v(x,\xi),\ |\nabla_x v(x,\xi)|,\ \|\nabla_x^2 v(x,\xi)\| \leqq C_0|\xi|^2 \\ |\nabla_\xi v(x,\xi)|,\ \|\nabla_x \nabla_\xi v(x,\xi)\| \leqq C_0|\xi| \\ \|\nabla_\xi^2 v(x,\xi)\| \leqq C_0 \end{array}\right\} \quad (1.6)$$

補題1.1をみたすvが存在するとして、定理を証明するためのテスト関数を構成する。

$$g(x,\xi) = v(x,\xi)^2 + 1 \quad (1.7)$$

とおく。

$A > 0,\ \varepsilon > 0$に対して、

$$w \equiv w_\varepsilon(x,y) = \varepsilon g\left(x, \frac{x-y}{\varepsilon}\right) e^{A(\psi(x)+\psi(y))},\quad x, y \in \overline{\Omega} \quad (1.8)$$

とおく。ここで $\psi \in C^2(\overline{U})$を

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqq \psi \leqq 1 \quad \text{in } U \\ \langle \nabla\psi(x), \nu(x) \rangle \geqq 1 \quad \forall x \in \partial\Omega \\ |\nabla\psi(x) - \langle \nabla\psi(x), \nu(x)\rangle \nu(x)| \leqq \theta/2M \quad \forall x \in \partial\Omega \\ \text{但し } M = \sup\{|\nabla_p B(x,p)| \ x \in \partial\Omega,\ p \in \mathbb{R}^n\} \end{array}\right\} \quad (1.9)$$

定数 $A>0$ をうまく選ぶと次の補題も示すことができる。

補題1.2　$x, y\in\overline{\Omega}$, $|x-y|\leq\sigma$ とする。ε に無関係な定数 C_1 が存在して、次の①②が成り立つ。

① $x\in\partial\Omega \Rightarrow B(x, \nabla_x W(x,y))\geq C_1\varepsilon$

② $y\in\partial\Omega \Rightarrow B(y, -\nabla_y W(x,y))\leq -C_1\varepsilon$　　(1,10)

また W の2階導関数を評価すると

補題1.3　ε に無関係な定数 C_2 に対して

$$\nabla^2 W(x,y)\leq C_2\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|^2\begin{pmatrix} I & -I\\ -I & I\end{pmatrix}+\varepsilon\left(\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|^4+1\right)\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\right\}e^{A(\psi(x)+\psi(y))}$$

$\forall x, y\in\overline{\Omega}$　　(1,11)

定理1.1を証明のためにいくつかの命題を述べる。

$\varepsilon, \delta>0$ に対して

$\Phi(t,x,y)=h(t,x,y)-\Psi(t,x,y)$　　(1.12)

$h(t,x,y)=u(t,x)-v(t,y)$　　(1.13)

$\Psi(t,x,y)=W_\varepsilon(x,y)+\dfrac{\delta}{T-t}$　　(1.14)

(W_ε は (1.8) で定義したもの)

命題1.1

u, v をそれぞれ上(下)半連続関数とする。

$\alpha=\max_{Q}(u-v)>0$ と仮定すると　　(1.15)

$\exists \gamma_0$ s.t. $0<\gamma<\gamma_0$, $\varepsilon>0$ に対して

$$\sup_{\overline{U}} \Phi(t,x,y) > \frac{\alpha}{2} \qquad (1.16)$$

ここで $U=(0,T)\times\Omega\times\Omega$

命題1.2 u, v, γ_0 を命題1.1と同じものとする。F_* が $\overline{U}$ 上、上半連続と仮定する。次の(i)〜(v)が成り立つ。

(i) Φ は $\overline{U}$ 上の点 $(\hat{t},\hat{x},\hat{y})\in U$ で最大値を実現し、かつ $\hat{t}<T$ をみたす。

(ii) $\displaystyle\sup_{\substack{0<\varepsilon<1\\0<\gamma<\gamma_0}} |\hat{x}-\hat{y}| < +\infty$

(iii) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{0<\gamma<\gamma_0} |\hat{x}-\hat{y}| = 0$

(iv) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{0<\gamma<\gamma_0} |w_\varepsilon| = 0$

(v)
もし $u(0,x)\leq v(0,x)$ on $\overline{\Omega}$ なら $\exists\varepsilon_0$ s.t $0<{}^\forall\gamma<\gamma_0$, $0<{}^\forall\varepsilon<\varepsilon_0$ に対して $0<\hat{t}<T$.

<u>定理1.1の証明</u> $\alpha>0$ として矛盾を導く。このとき命題1.1, 1.2が成り立つ。$0<\gamma<\gamma_0$ をみたす γ をFixする。補題1.2より、w_ε は、Crandall-Ishii の lemma [3] [6] を用いることができることがわかる。従って次の不等式が成り立つ。

${}^\forall\lambda>0$, ${}^\exists X, Y\in S^n$ s.t

$$\hat{\Phi}_t + F_*(\hat{\Phi}_x, X) - F^*(-\hat{\Phi}_y, -Y) \leq 0 \qquad (1.17)$$

$A \geq \nabla^2\Psi(\hat{t},\hat{x},\hat{y})$ をみたす A に対して

$$-\left(\frac{1}{\lambda}+\|A\|\right) I_{2n} \leq \begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} \leq A+\lambda A^2 \qquad (1.18)$$

(ここで $\hat{\Phi}_t = \partial_t \hat{\Phi}(\hat{t},\hat{x},\hat{y})$, $\hat{\Phi}_x = \nabla_x \Phi(\hat{t},\hat{x},\hat{y})$ など)

補題1.3より

$$\nabla^2 w(x,y) \leq C_3 \left\{ \frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|^2 \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \varepsilon\left(\left|\frac{x-y}{\varepsilon}\right|^4+1\right)\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \right\} \qquad (1.19)$$

(ここでC_3はC_2, A, Ψのみによる定数)

Aとして(1.19)の右辺を選ぶとする。$\varepsilon \to 0$としたときの$\hat{\Phi}_x$, $-\hat{\Phi}_y$の挙動によって2つのケースに場合分けし、いずれの場合もパラメータ$\delta \leq 0$となり矛盾となることを示す。

Case I $\exists \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ s.t $\hat{\Phi}_x(\varepsilon)=0$, $0<{}^\forall\varepsilon<\varepsilon_1$

$\hat{\Phi}_x(\varepsilon)=0$ または $\hat{\Phi}_y(\varepsilon)=0$ のとき、$\hat{x}(\varepsilon)=\hat{y}(\varepsilon)$であることがわかる。したがって(1.18)の2つ目の不等式から

$$\begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}$$ という関係式が導かれる。

Remark 1.1より Fは退化楕円型かつ $-\infty < F_*(0,0)=F^*(0,0)<\infty$ なので $\delta T^{-2} + F_*(0,0) - F^*(0,0) \leq 0$

$\delta \leq 0$ となり矛盾。

Case II $\exists \varepsilon_j \downarrow 0$ s.t $\hat{\Phi}_x(\varepsilon_j) \neq 0$ $({}^\forall j \geq 1)$

(1.18)の $\lambda = |\hat{x}-\hat{y}|^4$ とおくと、

(1.18)の2つ目の不等式は、

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq C_4\left\{ \frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon}\right|^2 \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \varepsilon\left(\left|\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon}\right|^4 + 1\right)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right\} \qquad (1.20)$$

(ここで C_4は C_2, C_3, A, ψ のみによる定数)

$\nu = \frac{C_4}{\varepsilon}\left|\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon}\right|^2$, $\mu = C_4\varepsilon\left(\left|\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon}\right|^4 + 1\right)$ として仮定(F2)より

$$F(p, X) - F(q, -Y) \geq -K\left(\nu|\bar{p}-\bar{q}|^2 + \mu + |p-q|\right) \qquad (1.21)$$

$p = \hat{\Phi}_x$, $q = -\hat{\Phi}_y$, $\bar{p} = \frac{p}{|p|}$

$|\bar{p}-\bar{q}| \leq \frac{2}{|p|}|p-q|$ に注意すると ε に無関係な定数 C_5, C_6 が存在して $|p-q| \leq C_5\left(\varepsilon\left|\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon}\right|^4 + \frac{|\hat{x}-\hat{y}|^3}{\varepsilon} + \varepsilon|\hat{x}-\hat{y}|\right)$

$|\bar{p}-\bar{q}| \leq C_6|\hat{x}-\hat{y}|$ となる。したがって (1.21)は、

$$\begin{aligned} F(p, X) - F(q, -Y) \geq -K\Big\{ & C_4 C_6^2\varepsilon\left|\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon}\right|^4 + C_4\varepsilon\left(\left|\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon}\right|^4 + 1\right) \\ & + C_5\varepsilon\left|\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon}\right|^4 + \frac{C_5}{\varepsilon}|\hat{x}-\hat{y}|^3 + C_5|\hat{x}-\hat{y}|\Big\} \qquad (1.22) \end{aligned}$$

命題1.2(iii)より $\varepsilon\left|\frac{\hat{x}-\hat{y}}{\varepsilon}\right|^4 \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ となるので (1.22)の右辺において $\varepsilon \to 0$ とすると

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\left(F(\hat{\Phi}_x, X) - F(-\hat{\Phi}_y, -Y)\right) \geq 0$$

故に(1.17)において $\varepsilon \to 0$ とすると $\delta T^{-2} \leq 0$ が導びかれ矛盾となる。従って Case I, II いずれの場合も $\delta > 0$ に矛盾することがわかる。 証明終り

残りは補題1.1をみたす関数 v の存在を示せばよい。

§2. 補題1.1の証明

次の補題が示せれば、補題1.1はすぐ導くことができる。

補題2.1　$U\subset\mathbb{R}^n$の有界な開集合とする。

$B=B(x,p)\in C(\overline{U}\times\mathbb{R}^n)\cap C^{1,1}(\overline{U}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}))$, $\nu\in C^{1,1}(\overline{U}, S^{N-1})$

$B(x,\lambda p)=\lambda B(x,p)$　$\forall\lambda\geq 0$, $\forall(x,p)\in\overline{U}\times\mathbb{R}^n$ とする。

ある$\theta>0$に対して、$\langle\nu(x),\nabla_p B(x,p)\rangle\geq\theta$　$\forall(x,p)\in\overline{U}\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$

が成り立つとする。このとき$\delta>0$と$v\in C^{1,1}(\overline{U}\times\mathbb{R}^n)$

が存在して次が成り立つ。

$$v(x,\lambda\xi)=\lambda^2 v(x,\xi)\qquad\forall\lambda\geq 0,\ \forall(x,\xi)\in U\times\mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,\xi)\in U\times\mathbb{R}^n,\ \langle\nu(x),\xi\rangle\geq-\delta|\xi|\\ \Rightarrow\ B(x,\nabla_\xi v(x,\xi))\geq 0\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,\xi)\in U\times\mathbb{R}^n\quad\langle\nu(x),\xi)\rangle\leq\delta|\xi|\\ \Rightarrow\ B(x,\nabla_\xi v(x,\xi))\leq 0\end{array}\right\} \tag{2.3}$$

$$v(x,\xi)>0\qquad\forall(x,\xi)\in U\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) \tag{2.4}$$

ここでδはθと次の量の上界の関数として取ることができる。

$$\sup_{U\times S^{n-1}}\left(|B|+|\nabla_p B|+\|D_p^2 B\|\right) \tag{2.5}$$

補題2.1の略証

step1：　$\delta>0$は後で固定する。

$W=\{(x,\xi)\in U\times\mathbb{R}^n\mid\langle\nu(x),\xi\rangle<\delta|\xi|\}$とおく。

$(x,\xi)\in W$として次の極値問題を考える。

$$I\equiv\sup\{\langle p,\xi\rangle-\frac{1}{2}|p-\langle p,\nu\rangle\nu|^2\mid p\in\mathbb{R}^n,\ B(x,p)=0\} \tag{2.6}$$

ただし　$\nu=\nu(x)$とする。

$p \in \mathbb{R}^n$, $B(x,p)=0$ とする。ある $\hat{p} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$0 = B(x,p) = B(x,0) + \langle \nabla_p B(x,\hat{p}), p \rangle$$

$$= \langle \nabla_p B(x,\hat{p}), p - \langle p,\nu\rangle\nu + \langle p,\nu\rangle\nu \rangle$$

$$\geq \langle p,\nu\rangle \langle \nabla_p B(x,\hat{p}), \nu\rangle - A_1 |p - \langle p,\nu\rangle\nu|$$

$$\geq \theta |\langle p,\nu\rangle| - A_1 |p - \langle p,\nu\rangle\nu| \qquad (2.7)$$

ここで $A_1 = \sup_{\bar{U}\times S^{n-1}} |\nabla_p B|$

(2.7)式と $|p|^2 = \langle p,\nu\rangle + |p - \langle p,\nu\rangle\nu|^2$ より

$$|p| \leq A_2 |p - \langle p,\nu\rangle\nu| \qquad (2.8)$$

(A_2 は A_1 と θ のみによる定数)

$$\langle p,\xi\rangle - \frac{1}{2}|p-\langle p,\nu\rangle\nu|^2 \leq |\xi||p| - \frac{1}{2}|p-\langle p,\nu\rangle\nu|^2$$

$$\leq A_2|\xi||p-\langle p,\nu\rangle\nu| - \frac{1}{2}|p-\langle p,\nu\rangle\nu|^2$$

$$\leq A_2^2|\xi|^2 + \frac{1}{4}|p-\langle p,\nu\rangle\nu|^2 - \frac{1}{2}|p-\langle p,\nu\rangle\nu|^2$$

$$\leq -\frac{1}{4}|p-\langle p,\nu\rangle\nu|^2 + A_2^2|\xi|^2 \qquad (2.9)$$

(2.9)式より $\quad I \leq A_2^2|\xi|^2$

さらに $\quad B(x,p)=0$, $\langle p,\xi\rangle - \frac{1}{2}|p-\langle p,\nu\rangle\nu|^2 \geq 0$

$\Rightarrow \quad |p| \leq 2A_2^2|\xi|$

従って

$$I = \max\left\{\langle p,\xi\rangle - \frac{1}{2}|p-\langle p,\nu\rangle\nu|^2 \;\middle|\; p \in B(0, 2A_2^2|\xi|),\ B(x,p)=0\right\}$$

$u: W \to \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$u(x,\xi) = \max\left\{\langle p,\xi\rangle - \frac{1}{2}|p-\langle p,\nu(x)\rangle\nu(x)|^2 \;\middle|\; p\in\mathbb{R}^n,\ B(x,p)=0\right\}$$

$$(2.10)$$

Step 2: $z\in\overline{U}$ を固定する。$\eta>0$ とし η を十分小と仮定すると 次のような正規直交基底 $e_1(x),\cdots,e_n(x)$, $x\in\overline{U}\cap B(z,\eta)$ がとれる。

$$e_n(x)=\nu(x)$$

$$e_i\in C^{1,1}(\overline{U}\cap B(z,\eta))\quad i=1,\cdots,n-1$$

$$\tilde{B}(x,q)=B(x,q_1e_1(x)+\cdots+q_ne_n(x))\qquad(2.11)$$

とおく。このとき $\tilde{B}\in C((\overline{U}\cap B(z,\eta))\times\mathbb{R}^n)$
$\tilde{B}\in C^{1,1}((U\cap B(z,\eta))\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}))$ である。

(2.5) より $\sup_{U\times S^{n-1}}(|B|+|\nabla_pB|+\|D_p^2B\|)\leq A_3$ とると、このとき

$$\sup_{(U\cap B(z,\eta))\times S^{n-1}}(|\tilde{B}|+|\nabla_q\tilde{B}|+\|\nabla_q^2\tilde{B}\|)\leq A_3$$ となる。

$V=U\cap B(z,\eta)$ と書くことにする。

補題の仮定から

$$\frac{\partial}{\partial p_n}\tilde{B}(x,p)=\langle\nu(x),\nabla_pB(x,\textstyle\sum p_ie_i(x))\rangle\geq\theta\ 。$$

したがって次をみたす $H:V\times\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ が一意に定まる。

$$\tilde{B}(x,p)=0\iff p_n+H(x,p_1,\cdots,p_{n-1})=0$$

また、$\tilde{B}(x,p)>0\iff p_n+H(x,p_1,\cdots,p_{n-1})>0$

$$\tilde{B}(x,p)<0\iff p_n+H(x,p_1,\cdots,p_{n-1})<0$$

B の斉次性と H の一意性から

$$H(x,\lambda q)=\lambda H(x,q)\quad\lambda\geq0,\ q\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

陰関数定理より $q\neq0$ として、

$B \in C^2(\overline{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ なら

$$\nabla H(x,q) = \tilde{B}_t(x,q,t)^{-1} \nabla_{x,q} \tilde{B}(x,q,t), \quad t = -H(x,q)$$

$$\nabla^2 H(x,q) = \tilde{B}_t^{-1} (\nabla^2_{x,q} \tilde{B} - \nabla_{x,q} \tilde{B}_t \otimes \nabla H - \nabla H \otimes \nabla_{x,q} \tilde{B}_t + B_{tt} \nabla H \otimes \nabla H)$$

がわかる。また、A_3とθだけから定まる定数A_4が存在して

$$\sup_{V \times S^{n-2}} (|H| + |\nabla_q H| + \|\nabla_q^2 H\|) \leq A_4$$

さらに $H \in C^{1,1}(V \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}))$ も分かる。

(2,10)のuの定義から

$$u(x,\xi) = \max \{ \langle \sum_{i=1}^{n-1} q_i e_i(x) - H(x,q) e_n(x), \xi_i \rangle - \frac{1}{2}|q|^2 \mid q \in \mathbb{R}^{n-1} \}$$

$$= \max_{q \in \mathbb{R}^{n-1}} \{ \sum_{i=1}^{n-1} q_i \langle e_i(x), \xi_i \rangle - H(x,q) \langle e_n(x), \xi \rangle - \frac{1}{2}|q|^2 \}$$

$\xi = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i e_i(x)$ とすると

$(x,\xi) \in W,\ x \in V \Leftrightarrow |\eta| < \delta |\eta_n|,\ x \in V$ となる。

$\tilde{W} = \{ (x,\eta) \in V \times \mathbb{R}^{n-1} \mid |\eta| < \delta |\eta_n| \}$ とおく。

$\tilde{u} : \tilde{W} \to \mathbb{R}$ を

$$\tilde{u}(x,y,t) = \max_{q \in \mathbb{R}^{n-1}} \{ \langle q, y \rangle - t H(x,q) - \frac{1}{2}|q|^2 \} \qquad (2,12)$$

と定義する。[7]と同様の議論から(2,12)における最大値は、ただ1点 $q = p(x,y,t)$ において実現することがわかる。また

$$\begin{cases} \tilde{u} \in C^{1,1}(\tilde{W}) \\ \tilde{u}_t(x,y,t) + H(x, \nabla_y \tilde{u}(x,y,t)) = 0 \end{cases}$$

となることも確めることができる。

$\tilde{B}$とHの定義から、$0<\delta\leq\frac{1}{3(A_4+1)}$ に固定すると次の(i)-(iv) がいえる。

(i) $u\in C^{1,1}(W)$

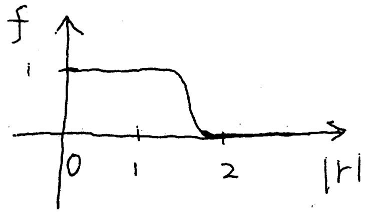
(ii) $B(x,\nabla_\xi u(x,\xi))=0 \quad \forall(x,\xi)\in W$

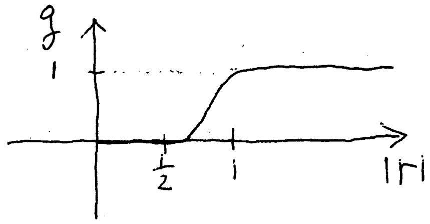
(iii) $u(x,\xi)\geqq\frac{1}{9}|\xi|^2 \quad \forall(x,\xi)\in W$

(iv) $u(x,\xi)\leq 2|\xi|^2 \quad \forall(x,\xi)\in W$

step3: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を次のように定める。

(i) $f, g\in C^\infty$





(ii) $f(-r)=f(r) \quad g(-r)=g(r) \quad \forall r\in\mathbb{R}$

(iii) $f(r)=1 \quad (r\geqq 1)$, $f(r)=0 \quad (r\geqq 2)$

$g(r)=1 \quad (r\geqq 1)$, $g(r)=0 \quad (0\leq r\leq\frac{1}{2})$

(iv) $f'(r)\leq 0 \quad (r\geqq 0) \qquad g'(r)\geqq 0 \quad (r\geqq 0)$

$0<\alpha\leq\frac{\delta}{3}$ とし

$$f_\alpha(x,\xi)=\begin{cases} f\left(\frac{\langle\xi,\nu(x)\rangle}{\alpha|\xi|}\right) & (\xi\neq 0)\\ 0 & (\xi=0)\end{cases}$$

$$g_\alpha(x,\xi)=\begin{cases} g\left(\frac{\langle\xi,\nu(x)\rangle}{\alpha|\xi|}\right) & (\xi\neq 0)\\ 0 & (\xi=0)\end{cases}$$

と $f_\alpha:U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $g_\alpha:U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を定義する。

$$\tilde{v}(x,\xi) = f_\alpha(x,\xi)\,u(x,\xi) + g_\alpha(x,\xi)\frac{\langle \xi, \nu(x)\rangle^2}{\beta}$$

と定義すると

$$\tilde{v}(x,\lambda\xi) = \lambda^2 \tilde{v}(x,\xi) \quad \forall\lambda \geq 0 \quad \forall(x,\xi) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$$

$\tilde{v} \in C^{1,1}(\tilde{U} \times \mathbb{R}^n)$ が分かる。

また、$\sup(|f_\alpha'| + |g_\alpha'|) \leq A_5$ に対して

$$\alpha = \frac{\theta^{\mathbb{R}}}{2A_4}, \quad \beta = \frac{\theta^3}{16A_4^3A_5}$$ と固定すると

$\langle \nu(x), \xi\rangle \geq 0 \Rightarrow B(x, \nabla_\xi \tilde{v}(x,\xi)) \geq 0 \quad {}^\forall(x,\xi) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$

$\langle \nu(x), \xi\rangle \leq 0 \Rightarrow B(x, \nabla_\xi \tilde{v}(x,\xi)) \leq 0 \quad {}^\forall(x,\xi) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$

また $|\langle \nu(x), \xi\rangle| \leq \frac{\alpha}{2}|\xi|$ のとき $B(x, \nabla_\xi \tilde{v}(x,\xi)) = 0 \quad {}^\forall(x,\xi) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$

さらに $\tilde{v}(x,\xi) \geq \min\left(\frac{1}{9}|\xi|^2, \frac{\alpha^2}{\beta}|\xi|^2\right)$ が示せる。これらは式(2.1)-(2.4)を示している。

略証終り

References

1. G. Barles, *Fully nonlinear Neumann type boundary conditions for second oder elliptic and parabolic equations*, J. Diff. Equations **106** (1993), 90-106.
2. Y.-G. Chen, Y. Giga, and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Diff. Geometry **33** (1991), 749-786.
3. M. G. Crandall and H. Ishii, *The maximum principle for semicontinuous functions*, Differential and Integral Equations **3** (1990), 1001-1014.
4. M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1-67.
5. S.-I. Ei, M.-H. Sato and E.Yanagida, *Stability of stationary interfaces with contact angle in a generalized mean curvature flow*, American Journal of Mathematics **118** (1996), 653-687.
6. Y. Giga and M.-H. Sato, *Neumann problem for singular degenerate parabolic equations*, Differential and Integral Equations **6** (1993), 1217-1230.
7. H. Ishii, *Fully nonlinear oblique derivative problems for nonlinear second-order elliptic pde's*, Duke Mathematical Journal **62** (1991), 633-661.
8. M.-H. Sato, *Capillary problem for singular degenerate parabolic equations on a half space,* Differential and Integral Equations(to appear)