数理解析研究所講究録
973巻 1996年 1-11

On a conjecture of Arnold

お茶大・理　小野 薫
(Kaoru ONO)

本稿では、深谷賢治氏(京大・理)との共同研究[FO]の概説をする。
(Kenji FUKAYA)

多様体上の滑らかな関数についての Morse 理論、特に Morse の不等式の symplectic 版として、Arnold は次の予想をたてた。

(Arnold 予想)　閉 symplectic 多様体 (M, ω) の exact symplectomorphism φ に対し、次が成立する。

$$\# \mathrm{Fix}(\varphi) \geqq \min \{ \# \mathrm{Crit}(f) \mid f : M \to \mathbb{R} \quad C^\infty \}$$

更に 全ての不動点が非退化であるならば、

$$\# \mathrm{Fix}(\varphi) \geqq \min \{ \# \mathrm{Crit}(f) \mid f : M \to \mathbb{R} \quad \mathrm{Morse} \}$$

ここで、φ の不動点 p が非退化であるとは $d\varphi_p$ が 1 を固有値に持たない事である。また、φ が exact symplectomorphism であるとは、ある $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ があり、$H_t := H(\cdot, t)$ の定める Hamilton ベクトル場 X_{H_t} の生成する flow の time-one 写像として φ が表される事である。実は この H は $H(\cdot, t+1) = H(\cdot, t)$ を

満たす様にとる事ができる。 p が φ の不動点であるとすれば、 $t=0$ で p を出発する X_{H_t} の積分曲線が $t=1$ で p に戻って来る。逆もいえるので、φ の不動点は、次の方程式の 1-周期解と 1対1 に対応している。

$$\dot{x}(t) = X_{H_t}(x(t)) \qquad (1)$$

この方程式が、後出の $\mathcal{A}_H$ の Euler-Lagrange 方程式となる事は、良く知られている。そこで、$\mathcal{A}_H$ の臨界点を、有限次元の場合の Morse 理論の様にさがせる事を期待したい。実は、いくつかの困難があり、すぐにうまくはいかないが、Conley-Zehnder の仕事（$\mathcal{A}_H$ の有限次元近似）と、Gromov の pseudoholomorphic curve の理論に触発され、Floer は現在 Floer homology と呼ばれるものを創始した。Floer 自身は、(M, ω) が monotone と呼ばれる場合に理論を構成し、後に Hofer-Salamon により、weakly monotone という class にまで拡張された。深谷氏との共同研究では、この条件もはずし、一般の閉 symplectic 多様体上の周期 Hamilton 系の Floer homology を、（$\mathbb{Q}$ 係数で）構成し、それを計算する事で、（弱い形の）Arnold 予想を、不動点が非退化である場合に示した。退化した不動点をもつ場合には、いくつかの部分的解決が知られているが、現在一般には open である。尚、[FO] の後 G. Liu-Tian, Hofer-Salamon, Ruan が同様の結果を得たとの事である。我々の議論では、一般の symplectic 多様体の Gromov-Witten 不変量も構成できる。これについても Li-Tian, Hofer-Salamon, Ruan, Siebert が同様の結果を得たとの事である。

§1. Floer homology

詳しい事は原論文或いは[O]等を参照して戴くとして、後の為に最小限の事柄をまとめる。

M の null homotopic loop 全体の空間を $\mathcal{L}M$ と書き、その被覆空間 $\widetilde{\mathcal{L}M}$ を次で定める。

$$\widetilde{\mathcal{L}M} = \left\{ (x, u) \;\middle|\; \begin{array}{l} x : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M,\ u : D^2 \to M \\ u|_{\partial D^2} = x \quad (\text{但}\ \partial D^2 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

ここで、

$$(x, u) \sim (y, v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \int_{D^2} u^*\omega = \int_{D^2} v^*\omega \\ \int_{D^2} u^*c_1 = \int_{D^2} v^*c_1 \end{cases}$$

と定める。（ c_1 は (M, ω) の第1 Chern 型式 ）

被覆変換群は $\pi_2(M)/\operatorname{Ker} I_\omega \cap \operatorname{Ker} I_{c_1}$

（但 $I_\omega, I_{c_1} : \pi_2(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ は ω, c_1 の evaluation）

となる。以下の構成はこの群作用と両立することに注意されたい。

$\mathcal{A}_H : \widetilde{\mathcal{L}M} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{A}_H(x, u) := -\int_{D^2} u^*\omega - \int_0^1 H(x(t), t)\, dt$$

と定める。M に ω と両立する概複素構造 J を入れる

と、$g_J(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ で定まる g_J は Riemann計量となる。$\widetilde{\mathcal{L}M}$ の接空間は、x に沿う M のベクトル場のなす空間なので、g_J を用いて L^2-内積が入る。この計量について、形式的に負の gradient flow line の方程式を書くと、

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + J(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla H_t(u(t)) = 0 \qquad (2)$$

となる。ここで $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}M$ を $u : \mathbb{R}\times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow M$ とみなしている。又 (τ, t) は $\mathbb{R}\times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の座標である。特に $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ となる時、即 $\mathcal{A}_H$ の臨界点は (1) の解 x とそれを張る disk u の組となる。有限次元の場合の Morse index (Hessian の負の固有値の数) に対応するものとして、Conley-Zehnder index というものが知られている。これを $\mu_{CZ} : Crit(\mathcal{A}_H) \longrightarrow \mathbb{Z}$ と書こう。

$(x^-, u^-), (x^+, u^+) \in Crit(\mathcal{A}_H)$ をつなぐ(負)gradient flow line は、(2) の解で、u^-, u, u^+ をはりあわせて得られる $S^2 \cong D^2 \cup (\mathbb{R}\times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cup D^2 \longrightarrow M$ による ω, c_1 の evaluation が 0 となるものと考え、grad flow line を用いて、Morse-Smale-Thom-Witten 複体の真似をして Floer homology $HF_*(H, J)$ は定義される。即 $Crit(\mathcal{A}_H)$ を生成元とする自由加群(の完備化)に critical points をつなぐ grad flow line の数を符号つきで数える事で境界作用素 ∂ を決める。

(完備化が必要となるのは、1つの(x^-, u^-)から出る、$\mu_{CZ}(x^-, u^-) - \mu_{CZ}(x^+, u^+) = 1$となる$(x^+, u^+)$へのgrad. flow lineが無限個の$(x^+, u^+)$に対して存在するかもしれないからである。) さて、この定義が意味をもつ為には、$\mu_{CZ}(x^-, u^-) - \mu_{CZ}(x^+, u^+) = 1$なる組$(x^-, u^-)$, (x^+, u^+)を止めると、この2つをつなぐgrad. flow lineは(τ方向の平行移動による$\mathbb{R}$作用を除き)有限個であること、及び$\partial^2 = 0$となる事を示さなくてはならない。前出のFloer, Hofer-Salamonの仕事は然るべき条件の下でこれらを示した。計算するには

① (H, J)のとり方に依らない事

② 特に$H(\cdot, t)$がtに依らない"小さな"Morse関数の時、(1)の解は全て有限次元Morse関数のgradient flow lineと対応する事

の2点を示せばよい。①については$\partial^2 = 0$の証明と同様に進めればよい。②は、monotoneの時にはFloer、$c_1 = 0$又は最小Maslov数が$\frac{1}{2}\dim M$以上の時Hofer-Salamon、weakly monotoneの時(少し定義を修正して)筆者により示されていた。

weakly monotoneでない時に生ずる困難は、(2)の解空間($/\mathbb{R}$)がcompactでない時に、bubbleとして生ずる有理正則曲線の中にc_1のevaluationが負と

なるものが現れる可能性を排除できない事である。実は この様な有理曲線で多重になるものが現れる場合が問題であり、*) 我々は これを *negative multiple bubble* の問題と呼んでいる。以下 これを乗り越える方法のアイデアを紹介する。

§2. 倉西構造とその摂動

$(x^\pm, u^\pm)$ をつなぐ (2) の解空間を $\widetilde{\mathcal{M}}(x^+,u^+;x^-,u^-)$ と書き、$\mathbb{R}$ で割った空間を $\mathcal{M}(x^+,u^+;x^-,u^-)$ と書くことにする。(2) は Fredholm 写像の零点を表す方程式であるから、Fredholm 写像についての倉西の方法が適用できる。即、局所的には Fredholm 写像は 全射 Fredholm (無限次元)線型写像と、有限次元の像をもつ写像の"和"に分解する。従って零点集合としては、有限次元空間の間の写像の零点集合として記述される。$\mathbb{R}^n$ の任意の閉部分集合は滑らかな関数の零点として書かれる事を思い出すと(横断性が成立していない状況では)単に零点集合のみをみても有効な情報は得られない事がお判りであろう。そこで 上に述べた有限次元空間の間の写像(倉西写像)を"定義方程式"として情報に加味する事を考える。(Seiberg-Witten 理論での古田氏の仕事も参照されたい。) アイデアの1つは この倉西写像

*) 横断性が一般には保障されない事が問題である。

を0と横断的になる様に摂動し、その零点集合として"きれいな"空間を得ようというものである。ここでの問題は、倉西の方法は局所的なものなので、解空間全体の上でうまく両立する摂動をとることができるかという事である。我々の場合は更に次の2つの困難がある。

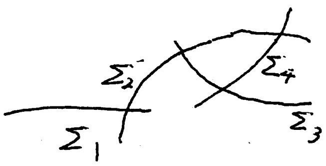
① bubbleが起こる時、その極限として現れる対象は、もとの写像空間からはみ出している。

② (bubbleとして現れる有理曲線もあるので)定義域の自己同型の部分群が、極限の対象の固定化群となるが、これが自明でない場合もあり得る。

これらの問題に対処する為に、Kontsevichによるstable mapの概念を引用しよう。リーマン面のモデュライ空間をコンパクト化する時に、非特異なもの以外に、stable curveというものもつけ加える。stable curveとは、いくつかの非特異リーマン面が、高々二重点で交わっているもので、その正則自己同型群が有限群となるものの事である。我々は、正則写像或いは(2)の解(connecting orbit)のモデュライ空間を扱っているので、その定義域のみを考えても不充分である。stable mapとは、高々二重点のみを特異点としてもつ複素曲線からの正則写像で、かつ、定義域の複素曲線の正則自己同型で、

その写像との合成がその写像自身となるものたちの成す群が有限となるものの事である。はじめて耳にされる方も多いと思うので、少し説明をつけ加えることにする。

$\Sigma = \bigcup \Sigma_j$　　Σ_j たちは下図の様に高々二重点を持っているとする。



Σ_j は非特異曲線(即リーマン面)

Σ 上の正則写像 $f : \Sigma \to M$ とは各 Σ_j への制限が J に関して正則写像となる事である。Σ の正則自己同型とは Σ の同相写像 $\varphi : \Sigma \to \Sigma$ で、各 Σ_j への制限は正則となるもののこと。このとき $f \circ \varphi = f$ となる φ が有限個しかない時、$f : \Sigma \to M$ を stable map と呼ぶ。(より一般には、marked point 付きで考える事ができ、それによって stable map のモデュライ空間の位相(及び位相的性質)を論ずることができる[FO]。) この有限性の条件は具体的に言い換えると、Σ_j の genus が 2 以上であれば、その成分については条件なし。Σ_j の genus が 1 の成分では $f|_{\Sigma_j}$ が定値写像でないか、又は二重点(「一般の場合」は marked point でもよい)を少なくとも 1 つ含む事, Σ_j の genus が 0 の成分では $f|_{\Sigma_j}$ が定値写像でないか又は二重点(「一般の場合」は二重点と marked points が合せて) 3 つ以上含む事が成立することと stability は同値である。

前出の2つの困難①,②への対応策は次の通りである。bubble が起こる時、その極限は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow M$ ((2)の解)に、いくつかの有理曲線がついているものである。(この時「図形的」には三重点以上の特異点が現れる可能性を危惧されるかもしれないが、実は定値有理曲線を考慮すると、高々二重点のみという範囲でおさまる。これには、如何に stable map のモデュライ空間に位相を入れるかという事が関わる。残念ながら省略させて戴く。[FO] 参照) 逆に極限に現れ得る対象*)((2)の解と有理曲線から成る連結集合)が与えられた時、その「近傍」をうまく記述できないかを考えなければならない。典型的な問題は交わる2つの複素曲線に対し、これに収束する(既約)複素曲線があるかである。大変都合よく、様々な横断性が満たされている場合の、解析的証明は [M-S] の付録に述べられている。(これは量子コホモロジーの結合律の為に用いられる。) 我々の場合は横断性の仮定が保障されないので、そのまま用いる訳にはいかないのであるが、多少の修正をすることで、stable map 或いは stable connecting orbit のモデュライ空間の近傍を倉西写像で記述する事ができる。(「障害束」付きのはりあわせの議論と標語的には言える。) これで①の困難は OK である。②については stability が stable

*) stable connecting orbit と呼ぶ。

map, stable connecting orbit の自己同型群が有限となる事を意味している事が重要な点である。一般的設定で考えると．(有限次元での) ベクトル束 $E \to B$ とその切断 s (倉西写像) が与えられ、更に有限群 Γ がこれらを保って作用しているとする。s の Γ-同変な摂動で、0 と横断的なものがあるかと問えば、一般には No である。そこで、一価ではなく多価の摂動を考える事で、この点を乗り越える。(そこで Γ が有限群である事が本質的である) この零点集合は、枝ごとに有理数の重みをつけて考えるのが自然である事はお判り戴けると思う。あとは、この局所的構成をうまく大域化でき、(コンパクト性は別に示すので) $\mathbb{Q}$係数の cycle が得られるというのが筋である。ここで重要なのは、局所的倉西モデル $E \overset{s}{\leftrightarrows} B$ に対し、その「仮想次元」 $\dim B - \dim E$ がモヂュライ空間の全ての点で一定であるという条件である。*) (これは Atiyah-Singer の指数定理と、考えている写像空間は、実2次元の定義域の写像空間であるという事実により保障される。) 詳しくは述べないが、倉西モデルをはりあわせて記述される構造を倉西構造と呼ぶ。局所的倉西写像を多価同変切断として"順々に"摂動する事で、倉西構造から $\mathbb{Q}$-cycle を得る事ができる。特に仮想次元が 0 であ

*) 書き忘れたのだが、「向き」の概念も欠かせない。[FO] 参照

れば、有理数を得る。特に ∂ の定義が $\mathbb{Q}$ 上ではできた事になる。

§3. 結論

我々の定理を述べて、終りにする。

<u>定理</u> φ を 閉 symplectic 多様体 (M, ω) 上の exact symplectomorphism とする。φ の不動点は全て非退化であるとすると、次が成立する。

$$\# \mathit{Fix}(\varphi) \geq \sum_i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(M; \mathbb{Q}).$$

<u>参考文献</u>

[Floer] A. Floer, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, Comm. Math. Phys. 120 (1989) 575-611

[FO] K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant, preprint

[H-S] H. Hofer and D. Salamon, Floer homology and Novikov rings, Floer Memorial Volume, Birkhäuser 1995, 483-525

[Kontsevich] M. Kontsevich, Enumeration of rational curves by torus action, "Moduli space of surfaces" Birkhäuser 1995, 335-368

[O] K. Ono, Symplectic Floer homology, Surveys in Geom 「Symplectic 幾何」 1995

——, On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds, Invent. math. 119 (1995) 519-537

[M-S] D. McDuff and D. Salamon, J holomorphic curves and quantum cohomology, AMS 1995