数理解析研究所講究録
974巻 1996年 128-140

乱流の大規模直接シミュレーション

航技研　山本稀義（Kiyoshi Yamamoto）
電通大　細川　巌（Iwao Hosokawa）
生出伸一（Shin-ichi Oide）
佐藤　司（Tsukasa Sato）

1．はじめに

計算機の発達に伴ってCFDの役割は益々増大し、現在では理論及び実験と並ぶ第3の重要な研究ツールとなってきた。この様なCFD発展の源となっている計算機は、近年、並列計算機の開発によってその性能が飛躍的に向上した。航空宇宙技術研究所では1993年に新しい並列計算機である数値風洞（NWT）を開発したが[1]、その理論的ピーク速度は270ギガフロップスに到達している。この様な状況において、乱流研究についても高精度なスペクトル法による直接数値シミュレーション（DNS）が有効な成果を挙げるようになってきた[2]。

一様等方性乱流のDNSはこれまでその時代の最先端の計算機を用いて挑戦されてきた。近年の大規模DNSの例としては、ベクトル計算機によって空間格子点数128^3のDNSが、Kerr(1985)[3]によって強制乱流について、続いて、筆者等

(1988)[4] によって減衰乱流について行われた。また、並列計算機では、Vincent & Meneguzzi (1991)[5] によって強制乱流の格子点数256^3のＤＮＳが、続いて、Chen et al(1993)[6] 及びJimenez et al(1993)[7] 等によって512^3のＤＮＳが行われた。ここでは、筆者等(1994)がＮＷＴを使用して行った格子点数512^3の減衰乱流のＤＮＳについて、その並列計算法及び得られた最近の計算結果について述べる[8、9]。

２． 基礎方程式

流れの周期性を仮定し、速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$を

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{u}(\mathbf{k},t)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \tag{1}$$

とフーリェ級数展開すると（以下では必要の無い限り変数tは省略する）、$\mathbf{u}(\mathbf{k})$の基礎方程式はナビェ・ストークス方程式から

$$\frac{\partial\,\mathbf{u}(\mathbf{k})}{\partial\,t}=-i\sum_{\mathbf{k}'}\mathbf{u}(\mathbf{k}')\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')-ip(\mathbf{k})-\frac{k^2}{R}\mathbf{u}(\mathbf{k}) \tag{2}$$

と導かれる。ここで、$p(\mathbf{k})$は圧力、Rは初期乱流に基づいて定義されるレイノルズ数である。ここではさらに、受動的スカラーとして温度場$\theta(\mathbf{x})$を取り扱うとそのフーリェ成分の方程式は同様に

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{k})}{\partial t} = -i\sum_{\mathbf{k}'}\theta(\mathbf{k}')\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') - \frac{k^2}{RP_r}\theta(\mathbf{k}) \tag{3}$$

となる。ここで、P_rはプラントル数である。

また、非圧縮条件は

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{k}) = 0 \tag{4}$$

となる。これはフーリェ成分 $\mathbf{u}(\mathbf{k})$にたいする束縛条件と考えられるが、これを満たすため、$\mathbf{u}(\mathbf{k})$を $\mathbf{k}$に垂直な平面に射影しする。すなわち、$\mathbf{k}$に垂直な２つの単位ベクトルを $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$を

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) = \left[\frac{k_x k_z}{kl},\quad \frac{k_y k_z}{kl},\quad -\frac{l}{k}\right] \tag{5}$$

$$\mathbf{e}_2(\mathbf{k}) = \left[-\frac{k_y}{l},\quad \frac{k_x}{l},\quad 0\right] \tag{6}$$

と定義し（$l^2 = k_x^2 + k_y^2$）、

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_1\eta_1(\mathbf{k}) + \mathbf{e}_2\eta_2(\mathbf{k}) \tag{7}$$

と表せば良い。η_μの基礎方程式は

$$\frac{\partial \eta_\mu}{\partial t} = \mathbf{e}_\mu\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \qquad \mu = 1,2 \tag{8}$$

と与えられる。

これらの方程式の計算には差分法に比べて計算精度の良いフーリェ・スペクトル法が使用されるが、時間方向の積分にも精度の良い Runge-Kutta-Gill 法が使用される[2)]。乱流の初期条件はエネルギー及び温度変動の分散 $\frac{1}{2}\langle\theta(\mathbf{x})^2\rangle$のスペクトルを

$$E(k)=\frac{16}{3}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}k^{4}\exp(-2k^{2}) \tag{9}$$

と与え、これを実現する流れのアンサンブルのフーリェ成分を正規乱数によって発生させる[4]。

3．並列計算法の説明

(2)，(3)式の右辺のコンボリューションを高速フーリェ変換（ＦＦＴ）で効率的に計算するのがフーリェ・スペクトル法の鍵である[2]。その結果、これらの式の計算時間はほとんど３次元データ**u(k)**、**θ(k)**等のＦＦＴの計算に費やされる。したがって、計算コードの並列化の中心はこの様なＦＦＴの並列化に帰着するので、これについて述べる。

ＮＷＴはベクトル型の要素計算機（PE）162台からなる並列計算機である。したがって、ＮＷＴの性能を最大限に発揮させるためには、計算の並列化と共にベクトル性能も最大に発揮させることが必要である。また、PE間のデータ転送速度はPE内の演算速度に比べて非常に遅いので、PE間に渡る演算は出来るだけ少なくすることも重要である。これらに留意して並列計算を効率的に行うために、ここでは**u(k)**の３次元的構造に着目し、ＦＦＴ演算、ベクトル演算及び並列化のための領域分割の３つの演算を３次元空間のｘ，ｙ，ｚ軸にそれぞれに割り当てる。例えば、今、ｚ軸で領域分割したとすると、

x および y 軸方向の F F T 計算に必要なデータは全て同一 PE 内にあるので、これらの方向の F F T は高速なベクトル計算が実現出来る。しかし、z 軸方向の F F T はこの通りにはいかない。この場合は、データの分割軸を例えば y 軸に切り替えることによって、同様な高速計算が可能になる。この並列計算法はアルゴリズムは全く簡単であるが、ベクトル計算と並列計算を全く独立に実行出来る利点がある[1)]。

図 1 は N W T による本 D N S の並列計算の実測性能を示す。横軸は使用されたPE台数を示し、縦軸は、本 D N S の計算が単位時間ステップ進むのに必要なCPU時間（秒）を示す。ま

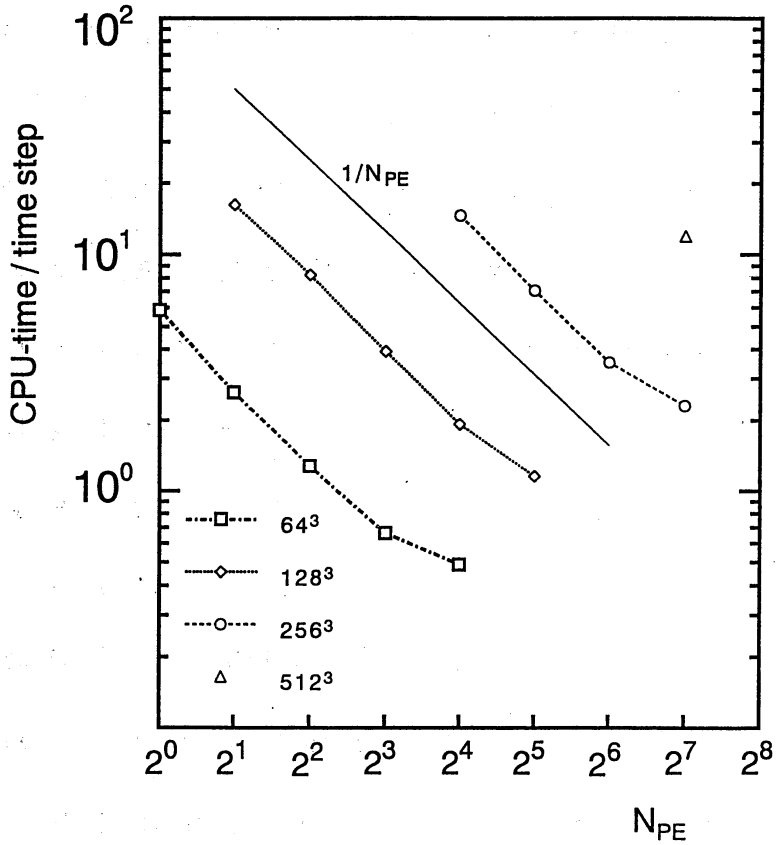

図 1　D N S プログラムの並列計算性能

縦軸は D N S が単位時間進むのに必要な C P U 時間をあらわし、N_{PE} は使用された PE 台数を表す。

た、○、△等の記号はDNSが実行される空間格子点数を示している。本研究では最大の512^3のDNSは128台のPEを使用して可能となったが、その実行計算速度は90ギガフロップスに到達し、これは理論的ピーク性能に対して約42%の効率である。この結果、1回のDNSに要する全計算時間は約24時間となった。

4. 減衰等方性乱流の性質

等方性乱流研究の主たる目的は乱流の微細変動における普遍的力学法則を明らかにすることである。以下では本DNSの計算データを数値解析して得られた乱流のいろいろな力学法則について述べる。

4.1 エネルギースペクトル

図2は流れのエネルギースペクトル$E_u(k)$の時間的発達の結果を示す。初期に低波数領域に与えられた乱れのエネルギーが時間と共に高波数領域に流れて、発達した乱流スペクトルが実現されることが分かる。そして、tが10でエネルギースペクトルの高波数領域の値は最大になり、その後は全領域でほぼ単調に減衰する。この$t=10$で得られたエネルギースペクトルには波数の中間領域（kが3～30の範囲）で巾乗則（～

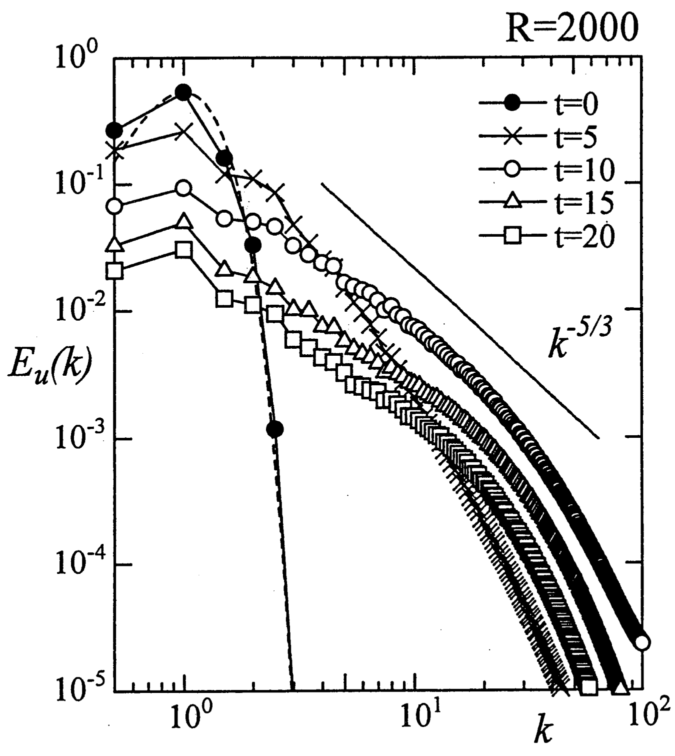

図 2　乱流エネルギースペクトルの時間的発達
点線は初期スペクトル (9) を示す。

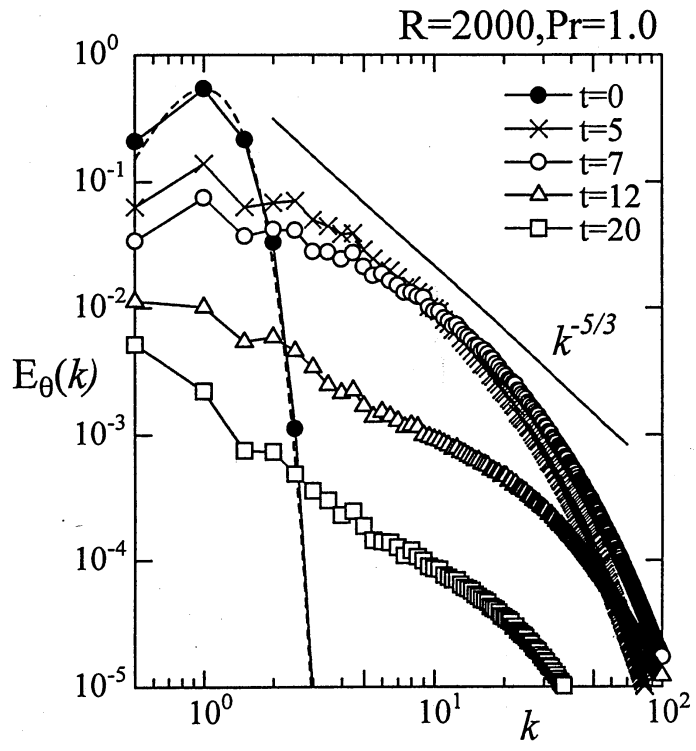

図 3　乱流温度場の分散スペクトルの時間的発達
点線は初期スペクトル (9) を示す。

$k^{-5/3}$：コルモゴロフ・スペクトル）が観測される。したがって、$t=10$の流れは本ＤＮＳで得られた流れの中で最も発達した乱流速度場と考えることが出来る。その時テイラーのマイクロスケール・レイノルズ数は159である。

他方、図３は温度の分散$\frac{1}{2}\langle\theta(\mathbf{x})^2\rangle$のスペクトル$E_\theta(k)$の時間的発達を示す。この場合高波数領域の値が最大のスペクトルは$t=7$で得られる。また、エネルギースペクトルと同様に慣性領域の$k^{-5/3}$則がＢａｔｃｈｌｏｒによって予測されているが、$t=7$のスペクトルでは必ずしも明確ではない。

４．２　速度場の確率分布

ＤＮＳによって得られた発達した乱流速度場のデータより、速度場のいろいろな確率分布が計算出来る。まず、速度の確率分布ついては従来の理論や実験からガウス分布になることが知られているが、図４に示す様に、ＤＮＳの結果もこれと良く一致する。一方、渦度やエネルギー散逸等速度の微分に関する確率分布については指数関数となることが報告されている[10]。図５は本ＤＮＳによって得られた速度の縦微分$\partial u/\partial x$の確率分布が指数分布となることを示す。

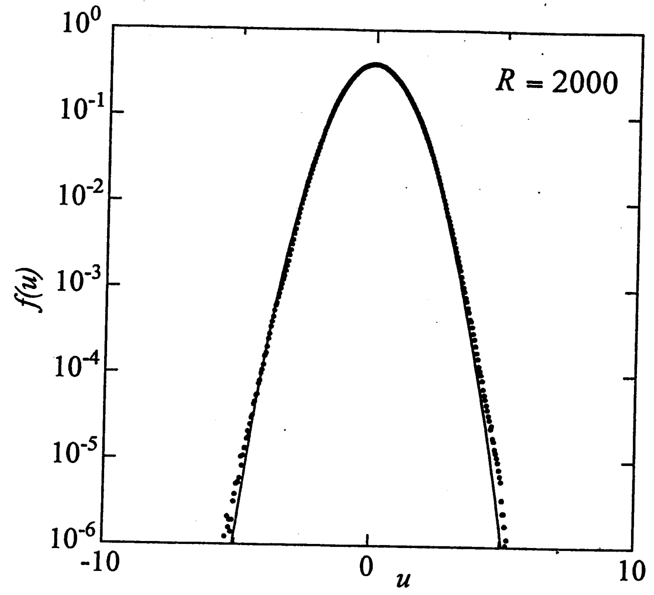

図 4　速度 $\boldsymbol{u}$ の確率分布
実線はガウス分布を示す。

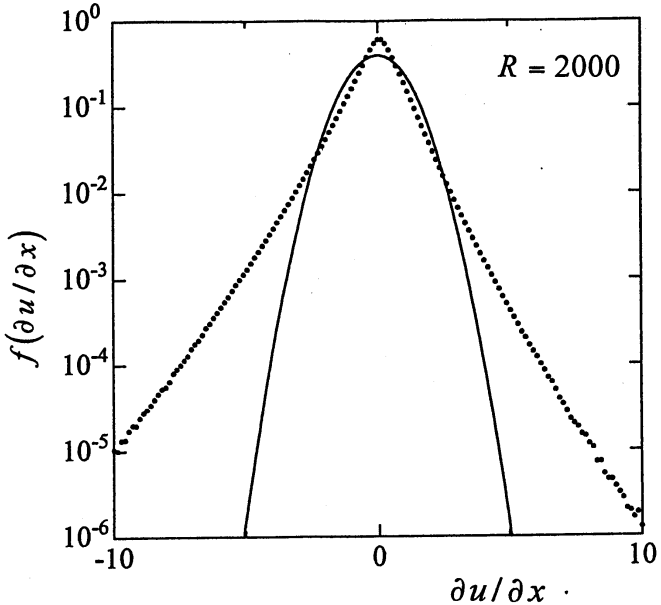

図 5　速度の縦微分 $\partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{x}$ の確率分布
実線はガウス分布を示す。

4.3 乱流の空間的微細構造

流れの瞬間データを時空間で得られるのがＤＮＳの大きな利点であるので、ＤＮＳのデータから流のいろいろな時空間微細構造が調べられてきた。その結果、乱流渦度は空間的に短い渦管領域に集中することが明らかになってきた[3－5、7－9)]。しかし、この様な渦管生成の力学機構はまだ明確には分かっていない。

図６は乱流高渦度領域が空間的に集中する様子を乱流の発達途中（ｔ＝５）で可視化した結果である。渦度場はまずシート状の渦層に引き伸ばされ、その渦層の不安定性により渦管に巻きあがることを示している。

図７は $t=10$ で計算された発達した乱流の高渦度領域を可視化した結果で、平均エンストフィの５倍の等値面を示す。ほとんど細い渦管領域に集中している。この様な渦管はしばしばｗｏｒｍｓと呼ばれている[4、7－9、11)]。

図８に乱流温度場 θ の高温度領域を可視化した結果を示す。温度場については、その勾配 $H=|\nabla\theta|$ の高い領域が空間的にシート状に集中することが知られているが[8、9、11)]、図の結果もこれを示している。

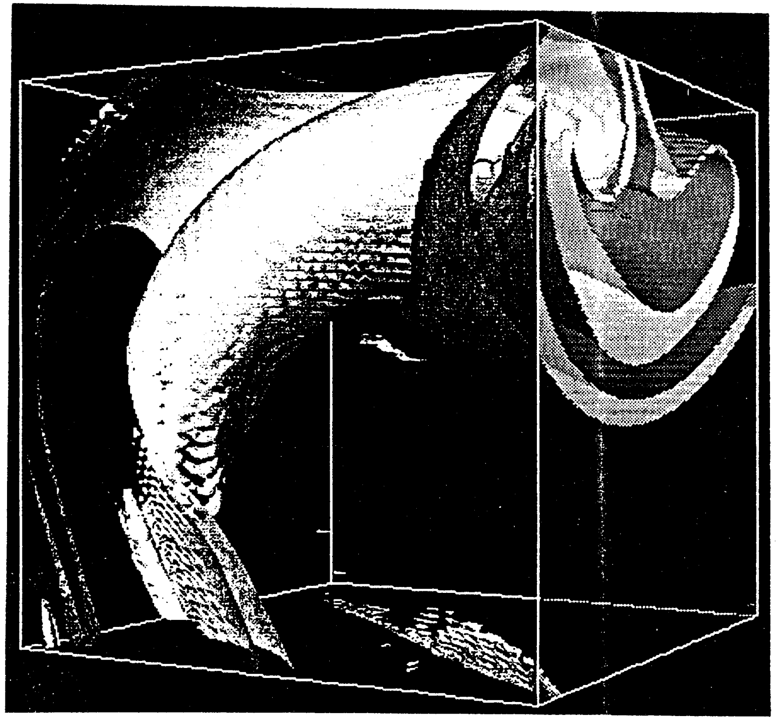

図6　発達途中の乱流高渦度領域の可視化（$t=5$）
白線は全計算領域の$1/8^3$領域を示す。

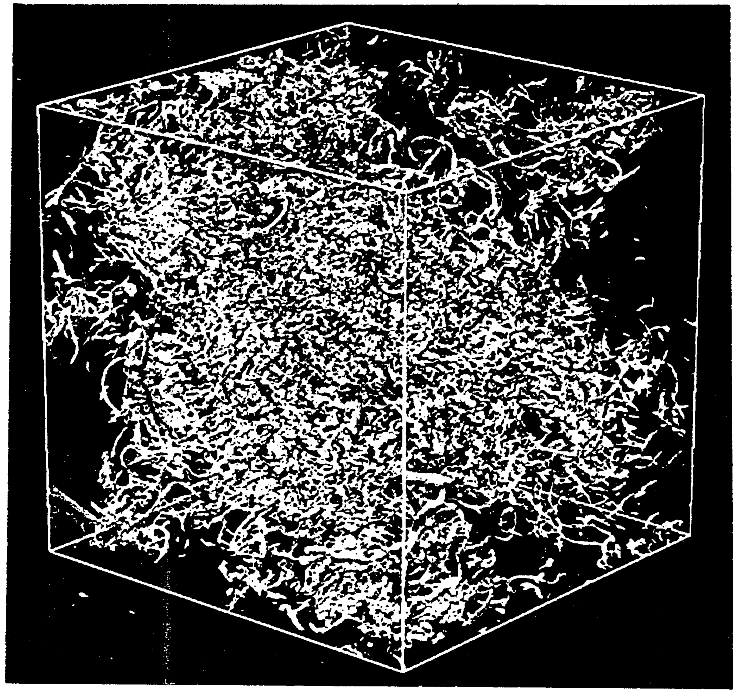

図7　発達した乱流中の高渦度集中領域の可視化（$t=10$）
白線は全計算領域の$1/2^3$領域を示す。

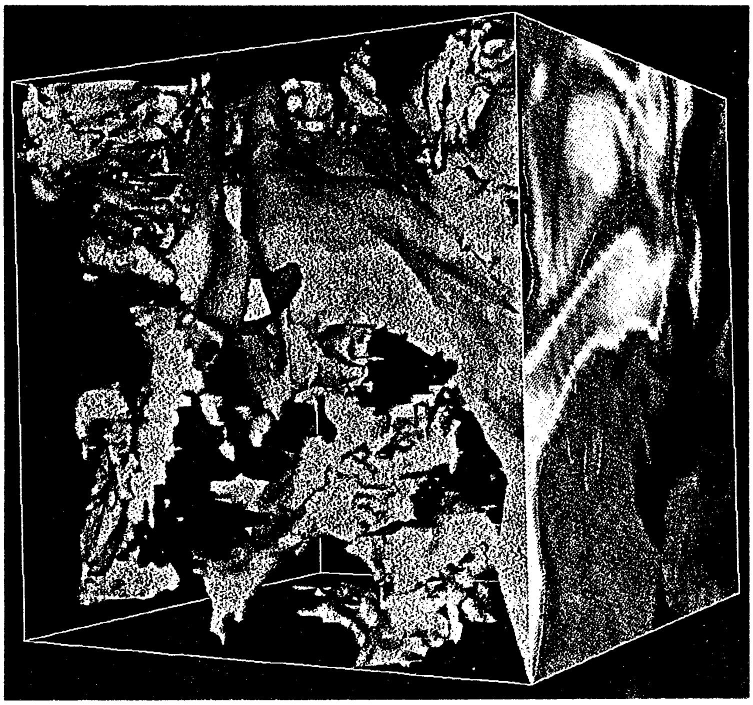

図８　発達した乱流中の高温度領域の可視化（$t=10$）

白線は全計算領域の$1/8^3$領域を示す。

5　むすび

並列計算機数値風洞によって減衰等方性乱流の大規模ＤＮＳを行った。ナビエ・ストークス方程式の計算にはフーリェ・スペクトル法が使用されたが、計算の並列化の方法について述べた。ＤＮＳによって得られた計算データを数値解析して、乱流のエネルギースペクトルや速度場の確率分布を明らかにした。また、乱流高渦度場が空間的に微細な渦管領域に、温度勾配の強い領域がシート状領域に集中する結果を得た。

参考文献

1）山本稀義：航技研数値風洞と乱流の数値シミュレーショ

ン、ながれ、14 (1995) 353.

2)Canuto, C. et al : *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer-Verlag, New York, 1988).

3)Kerr, R. M. : Higher Order derivative correlation and the alignment of small-scale structures in isotropic numerical turbulence, J. Fluid Mech., 153 (1985) 31.

4)Yamamoto, K. and Hosokawa, I.: A Decaying Isotropic turbulence Pursued by the Spectral Method, J. Phys. Soc. Japan, 57 (1988) 1532.

5)Vincent, A. and Meneguzzi, M. : The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence, J. Fluid Mech., 225 (1991) 1.

6)Chen, S. et al : On statistical correlations between velocity increments and locally averaged dissipation inhomogeneous turbulence, Phys. Fluids A 5 (1993) 458.

7)Jimenez, J. et al:The structure of intense vorticity in isotropic turbulence, J. Fluid Mech. 255 (1993)65.

8)Yamamoto, K. : Direct Numerical Simulation of Isotropic Turbulence Using NAL Numerical Wind Tunnel, in *Parallel Computational Fluid Dynamics : New Algorithms and Applications* (Eds. Satofuka ,N. et al, Elsevier Science, 1995) 13.

9)山口博他：等方性乱流の微細構造の可視化、 第9回数値流体力学シンポジュウム講演論文集 (1995) 167.

10)Yamamoto, K. and Kambe, T :Gaussian and near-exponential probability distributions of turbulence obtained from a numerical simulation, Fluid Dynam. Research. Vol. 8 (1991) 65.

11)Ruetsch, G. R. and Maxey, M. R. :Small-scale features of vorticity and passive scalar fields inhomogeneous isotropic turbulence, Phys. Fluids A 3 (1991) 1578.