数理解析研究所講究録
975 巻 1996 年 132-144

超準解析を用いたFourier変換

鳥取大 教育 栗林幸男 (Yukio Kuribayashi)

§1. はじめに

我々はAbelの総和法の概念と超準解析を用いて，擬Fourier変換(pseudofourier transform)を定義する。擬Fourier変換はFourier変換はFourier変換の拡張である。擬Fourier変換を用いることによってdistributionの理論で知られている次の各公式を直接的かつ簡単に証明することができる。

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta, \quad \mathcal{F}(\delta) = 1, \quad \mathcal{F}(H) = \pi\delta - i\,\mathrm{f.p.}\frac{1}{x},$$
$$\mathcal{F}(\mathrm{sgn}) = \frac{2}{i}\mathrm{f.p.}\frac{1}{x}, \quad \mathcal{F}(t) = 2\pi\frac{d}{dx}\delta.$$

更にこの方法によって形式的な公式 $\mathcal{F}(1*1) = \mathcal{F}(1)\mathcal{F}(1) = 4\pi^2\delta^2$，を正当化することができる。またdistributionの意味ではFourier変換できない関数 $f(x) = e^x$ の擬Fourier変換も可能である。

§2. 準備

まず最小限必要ないくつかの定義を与えておく。

2.1. 定義　集合R^+, Fをそれぞれ　$R^+=\{y\in R \mid y>0\}$, $F=\{(0,y) \mid y\in R^+\}$のように定める。$F$は有限交差性をもつ。$F$を含む超フィルターの一つを$\mathcal{F}_0$とする。$K$を$R$または$C$または$Map(R,C)$とする。ここで$Map(R,C)$は$R$上で定義された複素数値関数全体の集合である。

$a(y), b(y)\in \prod_{y\in R^+} K$, に対して　$\{y\in R^+ \mid a(y)=b(y)\}\in\mathcal{F}_0$が成立するとき　$a(y)\sim b(y)$とする。このとき関係～は同値関係である。　${}^*K=\prod_{y\in R^+}K/\sim$, によって${}^*K$を定義する。

$a(y)$の同値類を$[a(y)]$と書く。${}^*R$の元を超実数, ${}^*C$の元を超複素数という。

加法，減法，乗法および除法を通常の方法で定義することによって，${}^*R$, ${}^*C$は可換体となる。${}^*R$は${}^*C$の部分体と考えられる。

$[f_y]\in{}^*Map(R,C)$,　$[x(y)]\in{}^*R$　のとき

$${}^*f([x(y)]) = [f_y(x(y))]$$

によって関数${}^*f$を定義する。${}^*f$は${}^*R$上で定義された超複素数値関数である。${}^*f$を一般関数という。

本論文では変数$[x(y)]\in{}^*R$を　$x(y)=x$, 定数関数，の場合すなわち標準的な実数に制限し，記号は　$f_y(x)=f(x,y)$　のように用いる。そうすると

$${}^*f([x]) = [f(x,y)]$$

と表わされるが $[f(x,y)]$ の代りに代表元 $f(x,y)$ を用いて論ずることにする。また関数 $f(x,y)$ では x を変数とし y はパラメータと考え $\frac{d}{dx}f(x,y)=f'(x,y)$ のように表わす。

2.2. R^+ 上で定義された関数 $x(y)=y$ より定まる超実数 $[y]$ を考える。$[y]$ は正の無限小超実数である。このことから y は正の無限小である，というように述べることにする。

2.3. 二つの関数，Dirac のデルタ関数 $\delta(x,y)$ と $f(x)=\frac{1}{x}$ の有限部分 $Q(x,y)$ を次のように定義する。

$$\delta(x,y)=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+iy}-\frac{1}{x-iy}\right)=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)},$$

$$Q(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{x-iy}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

なお Fourier 解析では伝統的に $\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$ は Poisson 核，$\frac{x}{x^2+y^2}$ は共役 Poisson 核と呼ばれている。また関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ の有限部分は通常 $\mathrm{Pf.}\frac{1}{x}$ のように表わされるが本論文では $Q(x,y)$ を用いることにする。

2.4. 例 (1) $\frac{d}{dx}\delta(x,y)=-\frac{2xy}{\pi(x^2+y^2)^2}=-2\delta(x,y)Q(x,y)$.

(2) $\frac{d}{dx}Q(x,y)=-Q^2(x,y)+\pi^2\delta^2(x,y)$.

(3) $\frac{d^2}{dx^2}\delta(x,y)=6\delta(x,y)Q^2(x,y)-2\pi^2\delta^3(x,y)$.

(4) $\frac{d^2}{dx^2}Q(x,y)=2Q^3(x,y)-6\pi^2Q(x,y)\delta^2(x,y)$.

3. 擬 Fourier 変換 (1)

関数 $f(x,y)$ は $R\times R^+$ 上で定義された複素数値関数とする。このとき $^*f([x(y)]) = [f(x(y),y)]$ によって一般関数 $^*f$ が定まる。すでに述べたように $^*f$ の代りに代表元 f を用い、変数は標準的な実数の集合 R に制限して考える。

Fourier 変換と擬 Fourier 変換の定義をするために次の条件(α) を用意する。

$A = \{y\in R^+ \mid f(x,y)$ は x の関数として $L^1(-\infty,\infty)$ に属する$\}$

とおくと　$A\in\mathcal{F}$ 　　　　　　　　(α)

3.1. 定義 (1) $f=f(x,y)$ は条件(α)をみたすものとする。Fourier 変換 $\mathcal{F}(f)$ および Fourier 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}(f)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{F}(f)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)e^{-ixt}\,dt \qquad \text{for } y\in A$$

$$= 0 \qquad \text{for } y\notin A.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)e^{ixt}\,dt \qquad \text{for } y\in A$$

$$= 0 \qquad \text{for } y\notin A.$$

(2) $E_1(x,y) = \exp(-y|x|)$ とし, $f(x,y)E_1(x,y)$ は条件(α) をみたすものとする。擬 Fourier 変換 (pseudofourier transform) $\mathcal{PF}(f)$ および擬 Fourier 逆変換 (inverse pseudofourier transform) $\mathcal{PF}^{-1}(f)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{PF}(f)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)E_1(t,y)e^{-ixt}\,dt \qquad \text{for } y\in A$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad \text{for } y \notin A.$$

$$\mathcal{PF}^{-1}(f)(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)E_1(t,y)e^{ixt}dt \quad \text{for } y \in A$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad \text{for } y \notin A.$$

定義よりただちに次の命題が得られる。

3.2. 命題　$\mathcal{PF}(f, E_1)(x,y) = \mathcal{F}(fE_1)(x,y)$.

$$\mathcal{PF}^{-1}(f, E_1)(x,y) = \mathcal{F}^{-1}(fE_1)(x,y).$$

3.3. 命題　$2\pi\mathcal{F}^{-1}(f)(-x,y) = \mathcal{F}(f)(x,y)$.

$$2\pi\mathcal{PF}^{-1}(f, E_1)(-x,y) = \mathcal{PF}(f, E_1)(x,y)$$

次の定理は標準的なFourier解析の理論でよく知られている。

3.4. 定理　$f(x)$ と $xf(x)$ は $L^1(-\infty,\infty)$ に属するものとする。$\mathcal{F}(f)(x)$ は微分可能であって次の式が成立する。

$$\frac{d}{dx}\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}(-itf)(x).$$

この定理よりただちに次の定理が得られる。

3.5. 定理　(1) $f(x,y)$ と $xf(x,y)$ は条件 (α) をみたすものとする。$\mathcal{F}(f)(x,y)$ は微分可能であって次の式が成立する。

$$\frac{d}{dx}\mathcal{F}(f)(x,y) = \mathcal{F}(-itf)(x,y) \quad \text{for } y \in A$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad \text{for } y \notin A.$$

(2) $f(x,y)E_1(x,y)$ および $xf(x,y)E_1(x,y)$ は条件 (α) をみたすものとする。$\mathcal{PF}(f, E_1)(x,y)$ は微分可能であって次の式

が成立する。

$$\frac{d}{dx}\mathcal{PF}(f,E_1)(x,y)=\mathcal{PF}(-itf,E_1)(x,y) \quad \text{for } y\in A$$
$$= \quad 0 \qquad\qquad \text{for } y\notin A.$$

3.6. 注意　定理 3.4 (1), (2) において $A\in\mathfrak{F}$ であるから次のように表わすことがある。

$$\frac{d}{dx}\mathcal{F}(f)(x,y)=\mathcal{F}(-itf)(x,y) \qquad \text{a.e.}$$
$$\frac{d}{dx}\mathcal{PF}(f,E_1)(x,y)=\mathcal{PF}(-itf,E_1)(x,y) \qquad \text{a.e.}$$

すなわち $y\notin A$ の場合は無視するのである。

ここでいくつかの具体的な例をあげておく。

3.7. 例　(1) $f(x,y)=f(x)$ $(x,y)\in R\times R^+$, であり条件 (α) において $A=R$ とする。

$$\mathcal{PF}(f,E_1)(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-y|t|}e^{-ixt}dt$$

$$=\int_0^{\infty}f(t)e^{-i(x-iy)t}dt+\int_{-\infty}^{0}f(t)e^{-i(x+iy)t}dt,$$

ここで

$$F_+(z)=\int_{-\infty}^{0}e^{-izt}f(t)dt \qquad z=x+iy,$$

$$-F_-(z)=\int_0^{\infty}e^{-izt}f(t)dt \qquad z=x-iy$$

とおけば条件 (α) によって，これらの積分はいずれも収束する。従って

$$\mathcal{PF}(f, E_1)(x, y) = F_+(z) - F_-(z)$$

であるから $\mathcal{PF}(f, E_1)(x, y)$ は $f(x)$ の超関数 (hyperfunction) の意味での Fourier 変換と考えられる。我々の場合は y は正の無限小であるが超関数論では

$$\mathcal{F}(f)(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$$

のように表わされている。

(2)　$f(x, y) = 1 \quad (x, y) \in R \times R^+$, とする。

$$\mathcal{PF}(1, E_1)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|t|} e^{-ixt} dt = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$= 2\pi\delta(x, y).$$

この公式は distribution の理論では $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta$, 超関数の理論では

$$(\mathcal{F}1)(x) = -\frac{1}{i}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right) = 2\pi\delta(x)$$

のように表わされている。

(3)　$\mathcal{PF}(1, E_1)(x, y) = 2\pi\delta(x, y)$, であるから

$$\mathcal{PF}^{-1}(1, E_1)(x, y) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{PF}(1, E_1)(-x, y)$$

$$= \delta(x, y).$$

(4)　$H(x)$ を Heaviside function とする。すなわち

$$H(x) = 1 \quad x \geq 0, \quad H(x) = 0 \quad x < 0.$$

$$\mathcal{PF}(H, E_1)(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-yt} e^{-ixt} dt = \frac{1}{i(x-iy)}$$

$$= \pi\delta(x,y) - iQ(x,y).$$

(5) $\mathcal{P}\mathcal{F}(1, E_1)(x,y) = \mathcal{F}(E_1)(x,y) = 2\pi\delta(x,y)$

であるから

$$\mathcal{F}(\delta)(x,y) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(\delta)(x,y) = e^{-y|x|}.$$

この公式は distribution の理論では $\mathcal{F}(\delta) = 1$ のように表わされている。

(6) $sgn(x) = 1 \quad x > 0, \quad sgn(x) = -1 \quad x < 0$, とする。

$$\mathcal{P}\mathcal{F}(sgn, E_1)(x,y) = \frac{2}{i}Q(x,y).$$

(7) $Q(x,y)$ は任意の $y \in R^+$ に対して $L^2(-\infty,\infty)$ に属する。そこで $L^2(-\infty,\infty)$ 上での Fourier 変換を考える。

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(sgn\cdot E_1) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{i}Q\right) = \frac{2}{i}\mathcal{F}^{-1}(Q)$$

$$= sgn(x)\,E_1(x,y).$$

従って

$$\mathcal{F}^{-1}(Q)(x,y) = \frac{i}{2}\,sgn(x)\,e^{-y|x|}.$$

(8) 例(5)および(7)を用いて次の結果が得られる。

$$\mathcal{F}^{-1}(\pi\delta - iQ)(x,y) = \pi\mathcal{F}^{-1}(\delta)(x,y) - i\mathcal{F}^{-1}(Q)(x,y)$$

$$= H(x)e^{-y|x|}.$$

(9) $f(x) = e^{i\omega x}$ とする。

$$\mathcal{P}\mathcal{F}(f, E_1)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{-y|t|} e^{-ixt}\,dt = \frac{2y}{(x-\omega)^2 + y^2}$$

$$= 2\pi\delta(x-\omega, y).$$

(10) $\cos\omega x = \frac{1}{2}(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x})$ であるから

$$\mathcal{PF}(\cos\omega t, E_1)(x,y) = \pi\{\delta(x-\omega,y) + \delta(x+\omega,y)\}.$$

同様にして

$$\mathcal{PF}(\sin\omega t, E_1)(x,y) = -i\pi\{\delta(x-\omega,y) - \delta(x+\omega,y)\}.$$

(11) $H(x)$ を Heaviside function とする。

$$\mathcal{PF}(H(t)\cos\omega t, E_1)(x,y) = \frac{\pi}{2}\delta(x-\omega,y) + \frac{\pi}{2}\delta(x+\omega,y) + \\ + \frac{i}{2}\{Q(x-\omega,y) - Q(x+\omega,y)\}.$$

(12) 例(2)において次の結果を得た。

$$\mathcal{PF}(1, E_1)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|t|} e^{-ixt}\,dt = 2\pi\delta(x,y).$$

定理 3.5 を用いて

$$2\pi\frac{d^n}{dx^n}\delta(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}(-it)^n e^{-y|t|} e^{-ixt}\,dt$$

$$= \mathcal{F}((-it)^n E_1)(x,y).$$

従って次の結果が得られる。

$$\mathcal{F}(t^n E_1)(x,y) = i^n 2\pi\frac{d^n}{dx^n}\delta(x,y).$$

(13) 例(4)において次の公式を示した。

$$\mathcal{PF}(H, E_1)(x,y) = \int_0^{\infty} e^{-yt} e^{-ixt}\,dt = \frac{1}{y+ix}.$$

定理 3.5 を用いて $n-1$ 回 x で微分すると

$$\int_0^{\infty}(-it)^{n-1} e^{-yt} e^{-ixt}\,dt = \frac{(-i)^{n-1}(n-1)!}{(y+ix)^n}.$$

$$\frac{1}{y+ix} = \pi\delta(x,y) - iQ(x,y)$$

であるから次の等式が得られる。

$$\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-yt} e^{-ixt} dt = \{\pi\delta(x,y) - iQ(x,y)\}^n.$$

ここで $n=2$ の場合を考えよう。 上で示した公式

$$\frac{d}{dx}\delta(x,y) = -2\delta(x,y)Q(x,y),$$

$$\frac{d}{dx}Q(x,y) = -Q^2(x,y) + \pi^2\delta^2(x,y)$$

を用いると次のような計算が可能である。

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t e^{-yt} e^{-ixt} dt &= \{\pi\delta(x,y) - iQ(x,y)\}^2 \\
&= \pi^2\delta^2(x,y) - i2\pi\delta(x,y)Q(x,y) - Q^2(x,y) \\
&= i\pi\frac{d}{dx}\delta(x,y) - Q^2(x,y) + \pi^2\delta^2(x,y) \\
&= i\pi\frac{d}{dx}\delta(x,y) + \frac{d}{dx}Q(x,y).
\end{aligned}$$

§4. 二つの関数の合成積の Fourier 変換

関数 $f=f(x,y)$, $g=g(x,y)$ はいずれも条件(α) をみたすものとする。このとき f は集合 A_1 において, g は集合 A_2 において条件(α) をみたすものとする。 f と g の合成積 $f*g$ を次のように定義する。

4.1. 定義

$$f*g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u,y)g(u)du \quad \text{for } y \in A_1 \cap A_2$$

$$= 0 \qquad \text{for } y \notin A_1 \cap A_2.$$

定義よりただちに次の命題が得られる.

4.2. 命題 $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

ここで二つの例をあげておく。これらの例はいずれも delta 関数の累乗の必要性を示すものといえよう。

4.3. 例 (1) $\mathcal{F}(E_1)(x,y) = 2\pi\delta(x,y)$, であるから

$$\mathcal{F}(E_1*E_1)(x,y) = \mathcal{F}(E_1)\mathcal{F}(E_1)(x,y) = 4\pi^2\delta^2(x,y).$$

これは形式的な公式 $\mathcal{F}(1*1) = \mathcal{F}(1)\mathcal{F}(1) = 4\pi^2\delta^2$ の一つの正当化といえよう。

(2) $H_1(x,y) = H(x)E_1(x,y)$ とする。

$$\mathcal{F}(H_1*H_1)(x,y) = \mathcal{F}(H_1)\mathcal{F}(H_1)(x,y) = (y+ix)^{-2}$$
$$= \pi^2\delta^2(x,y) - i2\pi\delta(x,y) - \mathcal{Q}^2(x,y).$$

§5. 擬 Fourier 変換 (2)

我々はここで新しい擬Fourier 変換と擬Fourier逆変換を定義する. この定義によって関数 $f(x)=e^x$ の擬 Fourier 変換を計算することができる.

5.1. 定義 $E_2(x,y)=\exp(-yx^2)$ とし, $f(x,y)E_2(x,y)$ は条件 (α) をみたすものとする。 $f(x,y)$ の擬 Fourier 変換 $\mathcal{PF}(f,E_2)$ と擬 Fourier逆変換 $\mathcal{PF}^{-1}(f,E_2)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{PF}(f,E_2)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\,E_2(t,y)\,e^{-ixt}\,dt \quad \text{for } y\in A$$

$$= \quad 0 \qquad \text{for } y \notin A.$$

$$\mathcal{PF}^{-1}(f, E_2)(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\,E_2(t,y)\,e^{ixt}\,dt \quad \text{for } y \in A$$

$$= \quad 0 \qquad \text{for } y \notin A.$$

例として関数 $f(x)=e^x$ の擬Fourier変換を計算しよう。この関数のFourier 変換は，distribution の意味でも超関数の意味でも不可能であることが知られている。

5.2. 例 次の公式はよく知られている。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yu^2} e^{-ixu}\,du = (\pi/y)^{\frac{1}{2}} \exp(-x^2/(4y))$$

この公式をを用いて擬Fourier 変換 $\mathcal{PF}(f,E_2)(x,y)$ は次のように計算できる。

$$\mathcal{PF}(f,E_2)(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^t\,E_2(t,y)\,e^{-ixt}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-y\left(t-\frac{1}{2y}\right)^2+\frac{1}{4y}\right\}\exp(-ixt)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-yu^2+\frac{1}{4y}\right)\exp\left(-ix\left(u+\frac{1}{2y}\right)\right)du$$

$$= \exp\left(\frac{1}{4y}-\frac{ix}{2y}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-yu^2)\exp(-ixu)\,du$$

$$= \left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}-\frac{ix}{2y}+\frac{1}{4y}\right).$$

なお上記の計算の途中で変数変換 $u = t - \frac{1}{24}$ を実行した。

参 考 文 献

[1] A. E. Hurd and P. A. Loeb, An Introduction to Nonstandard Real Analysis, Academic, Orland, 1985.

[2] 猪狩 惺, フーリエ級数, 岩波書店, 東京, 1975.

[3] A. Kaneko, Introduction to Hyperfunctions, TKT Scientific, Tokyo, 1988.

[4] 河田龍夫, FOURIER解析, 産業図書, 東京, 1975.

[5] A.G. Kursraev and S.S. Kutateladze, Nonstandard Methods of Analysis, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[6] Y. Kuribayashi, On Sets of Hyperreal Numbers, Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fis. Nat., Buenos Aires 45 (1993), 251-255.