数理解析研究所講究録
975巻 1996年 106-115

FURUTA INEQUALITY UNIFIES CHAOTIC ORDER AND USUAL ORDER AMONG POSITIVE OPERATORS

大阪府立桃谷高等学校　亀井栄三郎

1．はじめに． 1987年に古田は、今日、フルタ不等式と呼ばれている不等式を発見した[10](cf. [11])。 A, B を Hilbert 空間上の positive operators としたとき、次の不等式が成り立つというものである。

Furuta inequality

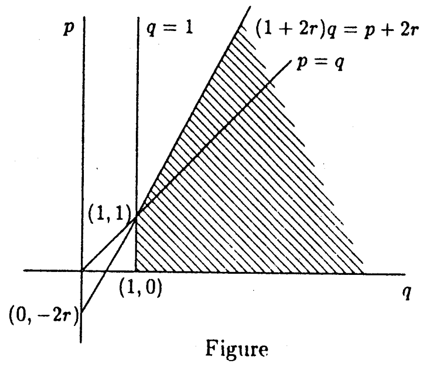
If $A \geqq B \geqq 0$, *then for each* $r \geqq 0$,

$$(B^rA^pB^r)^{1/q} \geqq (B^rB^pB^r)^{1/q}$$

and

$$(A^rA^pA^r)^{1/q} \geqq (A^rB^pA^r)^{1/q}$$

hold for p *and* q *such that* $p \geqq 0$ *and* $q \geqq 1$ *with* $(1+2r)q \geqq p+2r$.



Figure

この不等式は、r = 0 としたとき、次の Löwner-Heinz 不等式([16], [20])が得られる。

Löwner-Heinz inequality

If $A \geqq B \geqq 0$, *then* $A^\alpha \geqq B^\alpha$ *for* $1 \geqq \alpha \geqq 0$.

フルタ不等式の応用範囲は広く、その解釈まで含め数多くの著者による研究がなされている。([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [14], [17], [18], [21], etc.)
古田自身[13]は、このフルタ不等式を

$$f(\square) = (A^r\square^pA^r)^{1/q}$$

$$g(\square) = (B^r\square^pB^r)^{1/q}$$

という関数としてとらえ、これらが順序保存である、という解釈を与えている。

さて、我々のフルタ不等式についての解釈であるが、これを久保一安藤 [19] によって確立された作用素平均の立場から見直してみようというものである。

Operator mean

Let m be a binary operation among positive operators on a Hilbert space. Then m is called an operator mean if it satisfies the following conditions;

(1) $A \leqq C$ and $B \leqq D \Rightarrow A \, m \, B \leqq C \, m \, D$

(2) $A_n \downarrow A$ and $B_n \downarrow B \Rightarrow A_n \, m \, B_n \downarrow A \, m \, B$

(3) $T^*(A \, m \, B)T \leqq T^*AT \, m \, T^*BT$,

if T is invertible, $T^*(A \, m \, B)T = T^*AT \, m \, T^*BT$.

久保一安藤の示した最も重要な結果は、

$$1 \, m \, x = f(x), \qquad x > 0$$

としたとき、この対応で operator monotone function と 1 対 1 に対応するということの指摘である。作用素を使って表すと

$$A \, m \, B = A^{1/2} f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

となる。ここで我々の使う作用素平均は、α-power mean と呼ばれるもので、次のように与えられる平均である。

$$1 \, \#_\alpha \, x = x^\alpha, \qquad \alpha \in [0, 1]$$

すなわち、

$$A \, \#_\alpha \, B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\alpha A^{1/2}$$

これは、A, B が可換のときは、$A \, \#_\alpha \, B = A^{1-\alpha}B^\alpha$ となり、特に $\alpha = 1/2$ のとき相乗平均となる。

これを用いて、フルタ不等式を表すと、

$$A^{2r} \, \#_{(1+2r)/(p+2r)} B^p \leqq A^{2r} \, \#_{(1+2r)/(p+2r)} A^p$$

for $p \geqq 1$ and $r \geqq 0$

となる。

我々は、 α-power mean の議論を用いることで次の結果を得た[17](cf. [2], [12])。

Satellite theorem of the Furuta inequality

If $A \geqq B > 0$ and A, B are invertible, then

$$A^{-2r} \#_{(1+2r)/(p+2r)} B^p \leqq B \leqq A \leqq B^{-2r} \#_{(1+2r)/(p+2r)} A^p$$

for $p \geqq 1$ and $r \geqq 0$.

以下、この定理の結果をも含めてフルタ不等式と呼ぶこととする。ここで我々は、(1+2r)/(p+2r)≦□≦1 なる隙間の部分 □ ではどうなるか、ということについて次のような例を計算してみる。

2. Examples.

(1) $B^{-1} \geqq A^{-1} = A^{-1}\#_0 B^2 \geqq A^{-2}\#_{1/4} B^2 \geqq A^{-3}\#_{2/5} B^2 \geqq A^{-4}\#_{1/2} B^2 \geqq$

$\Leftrightarrow$

$$\underline{B \leqq A = B^{-2}\#_1 A \leqq B^{-2}\#_{3/4} A^2 \leqq B^{-2}\#_{3/5} A^3 \leqq B^{-2}\#_{1/2} A^4 \leqq}$$

(2) $B^{-1/2} \geqq A^{-1}\#_{1/6} B^2 \geqq A^{-2}\#_{3/8} B^2 \geqq A^{-3}\#_{1/2} B^2 \geqq A^{-4}\#_{7/12} B^2 \geqq$

$\Leftrightarrow$

$$B^{1/2} \leqq B^{-2}\#_{5/6} A \leqq B^{-2}\#_{5/8} A^2 \leqq B^{-2}\#_{1/2} A^3 \leqq B^{-2}\#_{5/12} A^4 \leqq$$

(3) $1 \geqq A^{-1}\#_{1/3} B^2 \geqq A^{-2}\#_{1/2} B^2 \geqq A^{-3}\#_{3/5} B^2 \geqq A^{-4}\#_{2/3} B^2 \geqq$

$\Leftrightarrow$

$$1 \leqq B^{-2}\#_{2/3} A \leqq B^{-2}\#_{1/2} A^2 \leqq B^{-2}\#_{2/5} A^3 \leqq B^{-2}\#_{1/3} A^4 \leqq$$

(4) $B^{1/2} \geqq A^{-1}\#_{1/2} B^2 \geqq A^{-2}\#_{5/8} B^2 \geqq A^{-3}\#_{7/10} B^2 \geqq A^{-4}\#_{3/4} B^2 \geqq$

$\Leftrightarrow$

$$B^{-1/2} \leqq B^{-2}\#_{1/2} A \leqq B^{-2}\#_{3/8} A^2 \leqq B^{-2}\#_{3/10} A^3 \leqq B^{-2}\#_{1/4} A^4 \leqq$$

(5) $\underline{B \geqq A^{-1}\#_{2/3} B^2 \geqq A^{-2}\#_{3/4} B^2 \geqq A^{-3}\#_{4/5} B^2 \geqq A^{-4}\#_{5/6} B^2 \geqq}$

$\Leftrightarrow$

$$B^{-1} \leqq B^{-2}\#_{1/3} A \leqq B^{-2}\#_{1/4} A^2 \leqq B^{-2}\#_{1/5} A^3 \leqq B^{-2}\#_{1/6} A^4 \leqq$$

(6) $B^{3/2} \geqq A^{-1}\#_{5/6} B^2 \geqq A^{-2}\#_{7/8} B^2 \geqq A^{-3}\#_{9/10} B^2 \geqq A^{-4}\#_{11/12} B^2 \geqq$

$\Leftrightarrow$

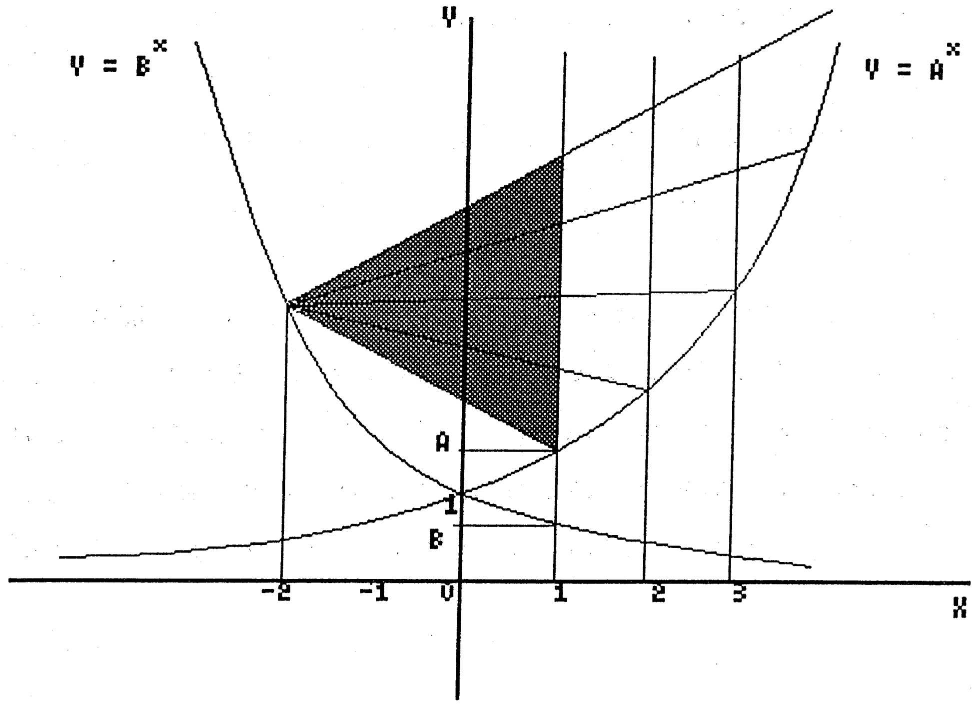
$$B^{-3/2} \leqq B^{-2}\#_{1/6} A \leqq B^{-2}\#_{1/8} A^2 \leqq B^{-2}\#_{1/10} A^3 \leqq B^{-2}\#_{1/12} A^4 \leqq$$

(7) $B^2 = A^{-1}\#_1 B^2 = A^{-2}\#_1 B^2 = A^{-3}\#_1 B^2 = A^{-4}\#_1 B^2 =$

$\Leftrightarrow$

$$B^2 = B^{-2}\#_0 A = B^{-2}\#_0 A^2 = B^{-2}\#_0 A^3 = B^{-2}\#_0 A^4 =$$

これらの examples において、アンダーラインのついている不等式の列が、それぞれフルタ不等式に対応しており、ここで揚げられている examples は全てフルタ不等式に支配されていることが解る。さて、ここで (1) のアンダーラインをつけた example を用いて、A と B が可換な場合について、図示してみる。



3. GINGKO LEAF. 上記の図のように、フルタ不等式に我々は 銀杏葉（ gingko leaf）の形を見ることができる。大雑把な解釈ではあるが、B^{-2r} と A^p とを繋ぐ path （葉脈）として $B^{-2r}\ \#_\alpha\ A^p$ があり、(1+2r)/(p+2r) という内分点における order を調べているのが、フルタ不等式である、といえよう。このことを我々は次のように一般化した([8], cf. [9])。

Therem A.

If $A \geqq B \geqq 0$ and A is invertible, then

$$A^{-s}\ \#_{((p+s-n)\alpha+n)/(p+s)}\ B^p \leqq B^{(p+s-n)\alpha-s+n}$$

for $\alpha \in [0,1]$, $p \geqq 1$ and $n+1 > s \geqq n$.

ここで $\alpha=(1+s-n)/(p+s-n)$ と置けばフルタ不等式が得られる。さらに上で示した examples の order は連続性まで含めて一般化すると次のような関係になっている。

Theorem B.

If $A \geqq B \geqq 0$ and A and B are invertible, then

$$A^{-s}\ \#_\alpha\ B^p \geqq A^{-s-\varepsilon}\#_{((p+s)\alpha+\varepsilon)/(p+s+\varepsilon+\delta)}\ B^{p+\delta}$$

and

$$B^{-s}\ \#_\alpha\ A^p \leqq B^{-s-\varepsilon}\#_{((p+s)\alpha+\varepsilon)/(p+s+\varepsilon+\delta)}\ A^{p+\delta}$$

for $\alpha, \delta, \varepsilon \in [0,1]$, $p \geqq 1$ and $s \geqq n$.

これまで我々は、$A^{-s}\#_\alpha B^p$ を作用素平均と見て、その範囲に限って議論を進めてきた。そこで、$\alpha \geqq 1$ なる範囲にまで拡張し、path としてその振る舞いについて考察してみる。まず、次のような examples を与えることから始める。これらは、先に与えた examples と同値なものである。ここで、＃の拡張として新しい記号♮を次のように与えておく（cf. [15]）。これは、$\alpha \in [0,1]$ においては、＃と一致する。

$$A\ \natural_\alpha\ B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\alpha A^{1/2}, \quad \alpha \in R,$$

Examples.

(1) $\Leftrightarrow$

$$B^5 \leqq B^2AB^2 = A^{-1}\natural_{2} B^2 \leqq A^{-2}\natural_{7/4} B^2 \leqq A^{-3}\natural_{8/5} B^2 \leqq A^{-4}\natural_{3/2} B^2 \leqq$$

(2) $\Leftrightarrow$

$$B^{9/2} \leqq A^{-1}\natural_{11/6} B^2 \leqq A^{-2}\natural_{13/8} B^2 \leqq A^{-3}\natural_{3/2} B^2 \leqq A^{-4}\natural_{17/12} B^2 \leqq$$

(3) $\Leftrightarrow$

$$B^4 \leqq A^{-1}\natural_{5/3} B^2 \leqq A^{-2}\natural_{3/2} B^2 \leqq A^{-3}\natural_{7/5} B^2 \leqq A^{-4}\natural_{4/3} B^2 \leqq$$

(4) $\Leftrightarrow$

$$B^{7/2} \leqq A^{-1}\natural_{3/2} B^2 \leqq A^{-2}\natural_{11/8} B^2 \leqq A^{-3}\natural_{13/10} B^2 \leqq A^{-4}\natural_{5/4} B^2 \leqq$$

(5) $\Leftrightarrow$

$$B^3 \leqq A^{-1}\natural_{4/3} B^2 \leqq A^{-2}\natural_{5/4} B^2 \leqq A^{-3}\natural_{6/5} B^2 \leqq A^{-4}\natural_{7/6} B^2 \leqq$$

(6) $\Leftrightarrow$

$$B^{5/2} \leqq A^{-1}\natural_{7/6} B^2 \leqq A^{-2}\natural_{9/8} B^2 \leqq A^{-3}\natural_{11/10} B^2 \leqq A^{-4}\natural_{13/12} B^2 \leqq$$

4. フルタ型作用素不等式.

上で揚げた examples をもとにフルタ型の不等式を作ってみる。ここで使う道具はのは次の古田による Lemma であるが、計算の簡便さのために敢えて Lemma として起こしておく。

Lemma 1. (Furuta[15])

Let A be a positive invertible operator, and let B be an invertible operator. Then for any real number λ,

$$(BAB^*)^\lambda = BA^{1/2}(A^{1/2}B^*BA^{1/2})^{\lambda-1}A^{1/2}B^*.$$

Lemma 2.

If A and B are positive invertible operators, then

(1) $A \natural_{\alpha} B = B \natural_{1-\alpha} A$

(2) $A \natural_{\alpha\beta} B = A \natural_{\alpha} (A \natural_{\beta} B)$

(3) $A \natural_{\alpha} B = B(B^{-1} \natural_{\alpha-1} A^{-1})B$

(4) $A \natural_{\alpha} B = A(A^{-1} \natural_{-\alpha} B^{-1})A$

Lemma 2 (3) より次のことが解る。

フルタ不等式

$\Leftrightarrow$

$$A^{-s} \natural_{(2p+s-1)/(p+s)} B^{p} \geqq B^{2p-1} \quad \text{for } p \geqq 1,\ s \geqq 0.$$

そこでこれを Theorem A , Theorm B に対応する形で一般化すると次のようになる。

Therem 3.

If $A \geqq B \geqq 0$ and A is invertible, then for each $\beta \in [1, 2]$

$$A^{-s} \natural_{((p+s-n)\beta+n)/(p+s)} B^{p} \geqq B^{(p+s-n)\beta-s+n}$$

holds for $p \geqq 1$ and $n+1 > s \geqq n$ for some nonnegative integer n.

ここで $\beta = (2p+s-n-1)/(p+s-n)$ と置けば上記のフルタ不等式と同値な式が得られる。

Theorem 4.

If $A \geqq B \geqq 0$ and A and B are invertible, then for each $\beta \in [1, 2]$ and δ, $\varepsilon \in [0, 1]$,

$$A^{-p} \natural_{\beta} B^{s} \leqq B^{-\varepsilon}(A^{-p-\delta} \natural_{((p+s)\beta+2\varepsilon+\delta)/(p+s+\varepsilon+\delta)} B^{s+\varepsilon})B^{-\varepsilon}$$

holds for $p \geqq 1$ and $s \geqq 0$.

Proof of Theorem 4. Let $\alpha = \beta - 1$, then we can use Lemma 2. (3),

$$
\begin{aligned}
& A^{-p} \natural_{\beta} B^{s} \\
&= B^{s}(B^{-s} \#_{\alpha} A^{p})B^{s} \\
&\leqq B^{s}(B^{-s-\varepsilon} \#_{\{(p+s)\alpha+\varepsilon\}/(p+s+\varepsilon+\delta)} A^{p+\delta})B^{s} \qquad \text{by Theorem B} \\
&= B^{s}B^{s+\varepsilon}(B^{-s-\varepsilon} \#_{\{(p+s)\alpha+\varepsilon\}/(p+s+\varepsilon+\delta)} A^{p+\delta})B^{s+\varepsilon}B^{-\varepsilon} \\
&= B^{-\varepsilon}(A^{-p-\delta} \natural_{1+\{(p+s)\alpha+\varepsilon\}/(p+s+\varepsilon+\delta)} B^{s+\varepsilon})B^{-\varepsilon} \\
&= B^{-\varepsilon}(A^{-p-\delta} \natural_{\{(p+s)\beta+2\varepsilon+\delta\}/(p+s+\varepsilon+\delta)} B^{s+\varepsilon})B^{-\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

5. Applications.

上で与えた Theorem 3 及び 4 は、先の Theorem A 及び B と同値なものであるが、フルタ不等式に、より多様な見方を与えることができる。例えば, Theorem 3 において、$\beta = (2p+s-n-\delta)/(p+s-n)$, $\delta \in [0, 1]$ と置くことで

$$A^{-s} \natural_{(2p+s-\delta)/(p+s-n)} B^{p} \geqq B^{2p-\delta}, \quad \text{for } p \geqq 1 \text{ and } s \geqq 0$$

を得ることができる。これに Lemma 2 を用いることで、次のような結果を得る。

Corollary.

If $A \geqq B \geqq 0$ and A is invertible, then for each $\delta \in [0, 1]$,

$$A^{-s} \#_{(\delta+s)/(p+s)} B^{p} \leqq B^{\delta} \leqq A^{\delta}$$

holds for $p \geqq 1$ and $s \geqq 0$.

これは、$\delta = 1$ でフルタ不等式となり、更に、$\delta = 0$ の時は

$$A^{-s} \#_{s/(p+s)} B^{p} \leqq 1, \quad \text{for } p \geqq 1 \text{ and } s \geqq 0$$

を得る。これは、chaotic order $A \gg B$, i.e., $\log A \geqq \log B$, (cf. [3], [5], [6], [7]) と同値であり、このことから usual order $A \geqq B$ と chaotic oredr $A \gg B$ とを繋ぐ、characterization を次のように与えることができる。

Theorem 5.

Let A and B be positive invertible and $\delta \in [0, 1]$. Then $A^{\delta} \geqq B^{\delta}$ if and only if

$$A^{-s} \#_{(\delta+s)/(p+s)} B^{p} \leqq A^{\delta}, \quad \text{for } p \geqq \delta \text{ and } s \geqq 0.$$

Remark.

我々は、[6]において、strictly chaotic order ($\log A > \log B$)について、次のような characterization を得た。

Let A and B be positive invertible. Then

$$\log A > \log B \text{ if and only if } A^{\alpha} > B^{\alpha} \text{ for some } \alpha > 0.$$

しかしながら、chaotic order $\log A \geqq \log B$ については、一般にこのような特徴付けは、与えられないことが棚橋によって指摘された。

REFERENCES

1. T. Ando and F. Hiai, Log-majorization and Complementary Golden-Thompson type inequalitis, Linear Alg. and its Appl. 197/198(1994), 113-131.
2. M. Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, J. Operator theory 23(1990), 67-72.
3. M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's Theorem, Linear Alg. and its Appl. 149(1991), 91-96.
4. M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, Operator functions associated with Furuta's inequality, Linear Alg. and its Appl. 179(1993), 161-169.
5. M. Fujii, T. Furuta and D. Wang, An application of the Furuta inequality to operator inequalities on chaotic orders, Math. Japon., 40(1994), 317-321.
6. M. Fujii, J. F. Jiang and E. Kamei, Characterization of chaotic order and its application to Furuta inequality, Preprint.
7. M. Fujii and E. Kamei, Furuta's inequality and ageneralization of Ando's Theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 115(1992), 409-413.
8. M. Fujii and E. Kamei, A geometrical structure in the Furuta inequality, Math. Japon., 43(1996), 83-90.
9. M. Fujii and E. Kamei, Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.
10. T. Furuta, $A \geqq B \geqq 0$ assures $(B^rA^pB^r)^{1/q} \geqq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geqq 0, p \geqq 0, q \geqq 1$ with $(1+2r)q \geqq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., 101(1987), 85-88.
11. T. Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, Proc. Japan Acad. 65(1989), 126.
12. T. Furuta, A proof via operator means of an order preserving inequality, Linear Alg. and its Appl., 113(1989), 129-130.

13. T. Furuta, Two operator functions with monotone property, Proc. Amer. Math. Soc., 111(1991), 511-516.

14. T. Furuta, Application of an order preserving inequality, Operator theory: Advances and Apllications, Birkhouser Verlag Basel 59(1992), 180-190.

15. T. Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Alg. and its Appl., 219(1995), 139-155.

16. E. Heinz, Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, Math. Ann. 123(1951), 415-438.

17. E. Kamei, A satellite to Furuta's inequality, Math. Japon., 33(1988), 883-886.

18. E. Kamei, Complements to the Furuta inequality, II, Math. Japon., to appear.

19. F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann. 246(1980), 205-224.

20. K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, Math. Z. 38(1934), 177-216.

21. K. Tanahashi, Best possibility of the Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996), 141-146.