数理解析研究所講究録
976巻 1997年 77-85

2階算術の諸体系

— モデル論的手法による分析 その3 —

東北大学 大学院 理学研究科 数学専攻
田中 一之
(Kazuyuki Tanaka, Math. Inst., Tohoku Univ.)

文献[1],[2]に引き続き,モデル論の手法を用いて,2階算術の体系 RCA_0 と WKL_0 の関係を議論する.

§7. Harringtonの定理の一般化に関する予想

[1]の§2において,WKL_0 が RCA_0 の Π^1_1-保存的拡大になるというHarringtonの結果を証明した。我々は,この定理を一般化した次の主張が成立すると予想する。

予想T. 算術式 φ を使って,$\sigma = \forall X \exists ! Y \varphi(X,Y)$ と表される命題 σ に対して,

$$WKL_0 \vdash \sigma \quad \Rightarrow \quad RCA_0 \vdash \sigma .$$

ここで,$\exists ! Y$ は"唯一つの Y が存在すること"を意味し,この部分を省略した主張がHarringtonの定理である。"唯一つの存在"

を“n個の存在”や“有限個の存在”に置き換えても，予想の真偽は変わらない。　有限個であれば，それらを辞書式に並べて$\{Y_n\}$とし，唯一つの$Y=\{(m,n): m\in Y_n\}$として考えればよい。　しかし，$\exists! Y$を$\exists Y$に置き換えることはもちろんできない。(WKL)自体がΠ^1_2で表現される命題であるし，とくにΣ^1_1で表現できる(WKL)の具体例でRCA_0では証明できないものがある。

予想Tの応用例を示しておこう。　複素数体$\mathbb{C}$が代数的に閉じているという代数学の基本定理は，上の予想における命題σの形で表現できる。　代数学の基本定理の証明は数多く存在するが，大概どこかでコンパクト性の議論を用いており，そのまま２階算術の中で形式化すると，WKL_0における証明となる。　従って，もし予想Tが成り立てば，直ちにRCA_0でも証明できることになり，それは多項式の解を求めるアルゴリズムが存在することを意味する。　実際，そのようなアルゴリズムは具体的に作成されているが，特別な手間を要さず普通の証明からアルゴリズムの存在がいえるのはうれしい。

さて本節では，予想Tをサポートする１つの根拠を与える。そのために我々が証明する次の定理は，WKL_0のモデル全体の特徴付けとしても興味深い。

<u>定理7.1.</u>　(M,S)をRCA$_0$の可算モデルとし，Mの部分集合でSに属さないものを高々可算個集め$\{A_i\}$とおく。このとき，$S \subset S' \subset \mathcal{P}(M)$かつ$S' \cap \{A_i\} = \phi$となる集合$S'$が存在して，$(M,S') \models$ WKL$_0$となる。

$S' \cap \{A_i\} = \phi$という条件を除いた場合のS'の存在が，Harringtonの証明の核心（補題2.6，[1]）である。上の定理を証明する前に，その応用を見ておこう。

<u>系7.2.</u>　(M,S)をWKL$_0$の可算モデルとする。このとき，$S' \subset \mathcal{P}(M)$で$S \cap S' = \Delta^0_1(M)$（$M$上で$\Delta^0_1$ definableな集合全体）となる集合S'が存在して，$(M,S') \models$ WKL$_0$となる。

（証明）　RCA$_0$の可算モデル$(M, \Delta^0_1(M))$と$\{A_i\} = S - \Delta^0_1(M)$に対して，定理7.1を適用して，$S'$を得る。　☒

この系で，$M = \omega$とおいた場合の主張は，Kreiselのハードコア定理として知られる。

<u>系7.3.</u>　WKL$_0$で証明可能な算術的内包公理のinstance（実例）は，RCA$_0$でも証明可能である。

（証明）　φを算術式として，WKL$_0 \vdash \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$とする。$(M,S)$をRCA$_0$の任意の可算モデルとして，$A =$

$\{n\in M: M\models\varphi(n)\}$ とおく。 $A\notin S$ ならば，定理7.1によってAを含まないWKL$_0$のモデル(M,S')が存在するので，前提に反する。 従って，$(M,S)\models\exists X\forall n(n\in X\leftrightarrow\varphi(n))$. 完全性定理により，$RCA_0\vdash\exists X\forall n(n\in X\leftrightarrow\varphi(n))$. ⊠

上の系において，算術的内包公理をある種の超限再帰法で繰り返すことも可能であろう。 そこで，この公理を(Δ^1_1-CA)に置き換えた主張が成立すると予想されるが，その主張から我々の予想Tが導かれるのである。 理由は簡単である。 算術式$\varphi(Y)$を満たす唯一つのYは，次のようにΔ^1_1で定義されるからである：

$$
\begin{aligned}
n\in Y &\iff \exists Z\,(n\in Z\wedge\varphi(Z))\\
&\iff \forall Z\,(\varphi(Z)\to n\in Z).
\end{aligned}
$$

これが，予想Tが成り立つと考える一つの根拠である。

この節の主題からは少し離れるが，定理の別の応用も示しておこう。

<u>系7.4.</u> Mを$I\Sigma_1$の可算モデルとすると，$(M,S)\models WKL_0$となる可算集合$S\subseteq\wp(M)$は非可算個存在する。

(証明) もしもそのようなSが可算個しかなければ，RCA$_0$

のモデル$(M, \Delta^0_1(M))$と$\{A_i\} = \bigcup\{$すべてのS$\}$に対して，定理を適用すると，新しいモデル(M, S')が作られ，矛盾である．☒

<u>系7.5.</u>　$I\Sigma_1$の可算モデルは，自らと同型な接頭部を非可算無限個もつ。

(証明)　$I\Sigma_1$の可算モデルMの上には，WKL_0の可算モデル(M, S)が非可算無限存在し，それぞれが自分自身と同型な接頭部$(I, S \lceil I)$をもつ(定理4.7, [2])．　各IはMと同型だが，相異なる接頭部である。　☒

それでは，定理7.1の証明に入るが，§2の補題2.4に対応する次の補題を示せば，残りは§2と同様である。

<u>補題7.6.</u>　(M, S)をRCA_0の可算モデルとし，$A \in \mathcal{P}(M) - S$とする．　このとき，任意の無限2分木$T \in S$は，以下の条件を満たす無限path Gをもつ：

①　Aは$(M, S \cup \{G\})$上でΔ^0_1-definableでない，

②　$(M, S \cup \{G\}) \models \Sigma^0_1$-ind.

(証明)　Sのtreeの列$T = T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots$を作り，共通path $G \subseteq \bigcap T_n$が求めるものになる．　奇数番目のT_{2k+1}はGが①を満たすように，偶数番目の木T_{2k+2}は②を満たすように作

られる。

まず，(M,S)の要素をパラメータとして許し，自由変数をxとXのみとするΣ^0_1式を並べ上げて$\{\varphi_e(x,X)\}$とする。以下，T_{2k+1}とT_{2k+2}の構成を別々に示すが，kはペア$(e,d)=(e+d)(e+d+1)/2+e$のコードとしておく。

<u>T_{2k+1}の作り方</u>. T_{2k}まではすでに作られているとする。最初に，次の事実を示しておこう.

主張： $m\in M$, $Z\subseteq M$が存在し，以下が$(M,S\cup\{Z\})$で成立.

(i) ZはT_{2k}の path である，

(ii) $\varphi_e(m,Z)\wedge m\notin A$ または $\neg\varphi_e(m,Z)\wedge m\in A$ または$\neg\varphi_d(m,Z)\wedge m\notin A$ または $\varphi_d(m,Z)\wedge m\in A$.

証明： 上の主張を否定する。 すると，T_{2k}の任意の path Zに対して，

$$\forall m(\varphi_e(m,Z)\longleftrightarrow m\in A)\wedge\ \forall m(\neg\varphi_d(m,Z)\longleftrightarrow m\in A),$$

つまりAは$(M,S\cup\{Z\})$においてΔ^0_1で定義される。 さらにこれから，

$$\begin{aligned} m\in A &\longleftrightarrow \exists Z(Z\text{は}T_{2k}\text{の path}\wedge\neg\varphi_d(m,Z))\\ &\longleftrightarrow \forall Z(Z\text{は}T_{2k}\text{の path}\rightarrow\varphi_e(m,Z))\end{aligned}$$

を得る。 上式において$\exists Z$に続く部分を$\psi(m,Z)$とおくと，ψはΠ^0_1式であり，右辺の正確な表現は$\exists Z\,(M,S\cup\{Z\})\models\psi(m,Z)$

である。いま，θ を Σ^0_0 式として，$\psi(m,Z)=\forall n\,\theta(m,Z\lceil n)$ と表し，さらに $T(m,\sigma)\longleftrightarrow\forall\tau\subseteq\sigma\,\theta(m,\tau)$ とおく。すると，

$$\exists Z\,(M,S\cup\{Z\})\models\psi(m,Z)$$
$$\Longleftrightarrow\ \exists Z\,(M,S\cup\{Z\})\models Z\text{ は木}\{\sigma:T(m,\sigma)\}\text{の path}$$
$$\Longleftrightarrow\ (M,S)\models\{\sigma:T(m,\sigma)\}\text{ は無限集合}$$
$$\Longleftrightarrow\ (M,S)\models\forall n\,\exists\sigma\in\{0,1\}^n\,T(m,\sigma).$$

よって，集合Aは (M,S) 上で Π^0_1 で定義できる。同様な議論により，Aは (M,S) 上で Σ^0_1 でも定義できるから，Aは (M,S) 上で Δ^0_1 となる。(M,S) は RCA_0 のモデルだから，$A\in S$ となり，補題の仮定に反する。以上によって，我々の主張が証明された。

さて，主張を満たす $m\in M$ を一つ選んで固定する。以下，$m\in A$ と仮定する。($m\notin A$ の場合もほぼ同様に扱える。) このとき，T_{2k} の path Z で $\neg\varphi_e(m,Z)$ または $\varphi_d(m,Z)$ を成り立たせるものが存在する。もし $\neg\varphi_e(m,Z)$ が成り立つなら，これを $\forall n\,\theta(Z\lceil n)$ $(\theta\in\Sigma^0_0)$ と表し，$T_{2k+1}=T_{2k}\cap\{\sigma:\forall\tau\subset\sigma\,\theta(\tau)\}$ とおく。もし $\varphi_d(m,Z)$ が成り立つなら，十分大きな有限列 $\sigma\subset Z$ が存在し，任意の $Z'\supset\sigma$ に対して $\varphi_d(m,Z')$ となるから，$T_{2k+1}=T_{2k}\cap\{\tau:\sigma\subset\tau\}$ とおく。すると，T_{2k+1} のどの path Z を用いても，Aが $\varphi_e(m,Z)$ と $\neg\varphi_d(m,Z)$ の両方で定義されることはない。

T_{2k+2} の作り方．　T_{2k+1} はすでに作られているとする．
M は可算集合だから，$d\in\omega$ で d 番目の M の元を表す。また，
$\varphi_e(x,X) = \exists n\,\theta(x, X\restriction n)$　$(\theta\in\Sigma^0_0)$ とする．　$T=T_{2k+2}$ は，
次を満たすように作られる：

$$(M,S)\models \forall m\le d\ \ \text{(i)}\ \forall t\in T\ \ \neg\theta(m,t)\quad \text{または}$$
$$\text{(ii)}\ \exists k\ \forall t\in T\cap\{0,1\}^k\ \exists s\subset t\ \ \theta(m,s).$$

そのような T があるとして，その任意の path を G とおく。
すると，各 $m\le d$ について，

$$(M,S)\models \text{(i)} \quad\Rightarrow\quad (M,S\cup\{G\})\models\neg\varphi_e(m,G),$$
$$(M,S)\models \text{(ii)} \quad\Rightarrow\quad (M,S\cup\{G\})\models\varphi_e(m,G).$$

$(M,S)\models\forall m\le d\,\text{(i)}\vee\text{(ii)}$ だから，$m\le d$ について，

$$(M,S)\models \text{(ii)} \quad\Leftrightarrow\quad (M,S\cup\{G\})\models\varphi_e(m,G).$$

$(M,S)\models$(finite Σ^0_1-CA) より，

$$\{m\le d : (M,S\cup\{G\})\models\varphi_e(m,G)\}\in S.$$

これが任意の e，d について成り立てば，$(M,S\cup\{G\})\models$(finite Σ^0_1-CA)，すなわち，$(M,S\cup\{G\})\models\Sigma^0_1$-ind.

T を作るため，まず各 $\sigma\in\{0,1\}^{\le d+1}$ に対して，T_σ を定義する：

$$T_{\langle\rangle} = T_{2k+1},$$
$$T_{\sigma^\frown\langle 0\rangle} = \{t\in T_\sigma : \forall s\subset t\ \neg\theta(\mathrm{leng}(\sigma), s)\},$$
$$T_{\sigma^\frown\langle 1\rangle} = T_\sigma.$$

いま，$S_d=\{\sigma\in\{0,1\}^{d+1}: T_\sigma$ は無限$\}$ とおく。(finite Σ^0_1-CA) より，$S_d\in S$．また，$\overbrace{\langle 1,1,\cdots,1\rangle}^{d+1}\in S_d$ より，$S_d\neq\phi$．そこで，辞書式順序で最小の元を S_d から選んで，σ_d とする。このとき，$T=T_{\sigma_d}$ が求める木であることを示そう。

任意の $m\leq d$ をとる。$\sigma_d(m)=0$ のとき，

$$T_{\sigma_d}\subseteq T_{\sigma_d\restriction m+1}\subseteq\{t:\neg\theta(m,t)\}$$

だから，(i) が成り立つ。$\sigma_d(m)=1$ のとき，$T_{\sigma_d\restriction m^\frown\langle 0\rangle}$ は有限だから，$T\subset T_{\sigma_d\restriction m}$ に対して (ii) が成り立つ。

以上のように構成された tree の列 $T_0\supset T_1\supset\cdots$ に対し，共通な path $G\subseteq\bigcap T_n$ が補題の 2 条件を満たすことは明らかである．$\boxtimes$

以上によって，定理 7.1 が証明された。

参考文献

[1] 田中一之，2 階算術の諸体系 ―モデル論的手法による分析―，京大数解研講究録 771 (1991年12月) pp. 118-156.

[2] 同，その 2，講究録 847 (1993年 8月) pp. 94-106.