数理解析研究所講究録
977 巻 1997 年 1-5

Asymptotic inclusion と Longo-Rehren の構成について

増田俊彦 (Toshihiko Masuda)
(東大数理)

1 序

Subfactor 理論における最近の話題の一つとして, asymptotic inclusion と呼ばれる物の研究が盛んに行われている. これは, Ocneanu によって考え出された物であるが, 与えられた subfactor から新しい subfactor を作るやり方であり, これは量子群における quantum double の subfactor 版とも思え, topological invariant との関係からも研究されている.

一方[LR]で Longo と Rehren は 全く別の方法で subfactor から新しい subfactor を作るやり方を考えた. さらに彼らは,

(1) 彼らの方法で asymptotic inclusion が全て作られる事を予想し,

(2) また asymptotic inclusion とならない様な例がある.

という事の 2 点を[LR]の中で言っている. しかし (1) については彼らは証明はできなかった. また (2) についても彼らは元の subfactor が既約な時しか考えておらず, 実際, 後で述べるように既約でない場合も含めると, 彼らの反例も asymptotic inclusion として得られる事がわかる.

今回の話の目的は, asymptotic inclusion と Longo-Rehren の構成法を比較して, 元の subfactor が既約でない時も含めて, この 2 つが同型な subfactor を与える事を示す事である.

2 Longo-Rehren の構成について

Longo-Rehren 流の構成で基本になるのは次の定理である. この定理はちょうど III 型 subfactor での Longo の canonical endomorphism の特徴付けに相当するものである.

定理 1 ([L, Theorem 5.1], [M, Theorem 2.3]) *Nを II_1 factor, ${}_NX_N$を index 有限な N-N bimodule とする. 次の様な coisometric な intertwiner があると仮定する.*

$$S(T^*\otimes 1)=S(1\otimes T^*)=\lambda^{-1/2},\quad \lambda>0,$$

$$S(S\otimes 1)=S(1\otimes S),$$

$$S^*S=(S\otimes 1)(1\otimes S^*).$$

さらに $\dim \mathrm{Hom}\,({}_N X_X, {}_N N_N) = 1$, $\dim {}_N X = \dim X_N$ も成り立つとする.

この時 Nを含む II_1factor Mで${}_N M_N \cong {}_N X_N$, $[M:N] = \lambda$となる物が存在する.

上の定理でMを構成するのには, $M_1 := \mathrm{End}\,({}_A X)^{\mathrm{opp}}$とおき、$x \in M_1$ に対して $E(x) := S(1 \otimes x)S^*$ と定義して, $M := E(M_1)$ とすれば, これが求める物である. この作り方からわかるように, 実際に Mを作るのには Tの方はあまり関係なく, 重要なのは Sという intertwiner である.

上の結果を使って, Longo-Rehren type の構成を行う. Longo-Rehren の構成は canonical endomorphism の特徴付けを使って行われたが, II_1型 subfactor の場合でも定理 1を使えば同様にできる.

$N \subset M$を index 有限, depth 有限な II_1型の subfactor とする. Δという集合を以下のように定める.

$$\Delta := \{{}_M Z_{iM} |\ \text{既約}, {}_M Z_{iM} \prec \underbrace{{}_M M \otimes_N M \otimes_M \cdots \otimes_N M_M}_{2n}, n\ \text{はある自然数}\}$$

とする. ${}_M Z_{0M} := {}_M M_M$とおく. ${}_M Z_{iM}$に対して自然に M^{opp}-M^{opp} bimodule ${}_{M^{\mathrm{opp}}} Z^{\circ}_{iM^{\mathrm{opp}}}$ が定まる. そこで $A := M \otimes M^{\mathrm{opp}}$, ${}_A B_{i,iA} := {}_A (Z_i \otimes Z_i^{\circ})_A$と定義し, ($\otimes$は通常の Hilbert 空間のテンソル積である) ${}_A X_A := \bigoplus_i {}_A B_{i,iA}$という A-A bimodule を考える. このとき[LR, Proposition 4.10]と同様の論法で次がわかる.

定理 2 A を含む II_1factor Bで, ${}_A B_A \cong {}_A X_A$となる物が存在する.

これを示すには, 定理 1の条件を満たす intertwiner を実際に構成すればよい. そのために $\{V^e_{ijk}\}_{e=1}^{N^k_{ij}}$を $\mathrm{Hom}\,({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$ の正規直交基底として,

$$\tilde{V}_{ijk} := \sqrt{\frac{d(i)d(j)}{d(k)}} \sum_e V^e_{ijk} \otimes J(V^e_{ijk})$$

とおく. ここで $N^k_{ij} := \dim \mathrm{Hom}\,({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$, すなわち既約分解に現れてくる ${}_M Z_{kM}$の個数であり, $d(i)$ は${}_M Z_{iM}$の index の平方根, Jは $\mathrm{Hom}\,({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$ と $\mathrm{Hom}\,({}_{M^{\mathrm{opp}}} Z^{\circ}_i \otimes_{M^{\mathrm{opp}}} Z^{\circ}_{jM^{\mathrm{opp}}}, {}_{M^{\mathrm{opp}}} Z^{\circ}_{kM^{\mathrm{opp}}})$ の間の自然な conjugate linear map である.

すると$\tilde{V}_{ijk} \in \mathrm{Hom}\,({}_A B_{i,i} \otimes_A B_{j,jA}, {}_A B_{k,kA})$ である. ここで $T_i \in \mathrm{Hom}\,({}_A X_A, {}_A B_{i,iA})$, coisometry を取ってきて,

$$S := \lambda^{-1/2} \sum_{i,j,k} T_k^* \tilde{V}_{ijk} (T_i \otimes 1)(1 \otimes T_j)$$

とおけば, T_0と Sが定理 1の条件を満たす intertwiner となる事が[LR, Proposition 4.10]の証明と同様の方法で示される. 但し, $\lambda := \sum_i d(i)^2$である.

3 Asymptotic inclusion との関係

次の定理が今回の話の主要定理である.

定理 3 ([M, Theorem 3.4]) $N \subset M$を index 有限, depth 有限な AFD II_1 subfactor とする. この時, 定理 2で構成した subfactor と asymptotic inclusion は同型である.

序でも述べたように[LR]で, Longo と Rehren は, 彼らの方法で asymptotic inclusion が全て作られる事を予想し, また asymptotic inclusion とならない様な例があるという事を主張したが, 彼らは元の subfactor が既約な時しか考えていなかった. しかし asymptotic inclusion や Longo-Rehren の構成を考えるにあたっては, 元の subfactor の既約性は全く仮定する必要はないのである. よって既約でない場合を含めれば, 彼らの反例も実際に asymptotic inclusion を与え, これは Longo-Rehren の予想への肯定的解答となる.

これを証明するのには, [O], [EK]における bimodule の graphic expression を使う. つまり $A \subset B$を定理 2で構成した物, $A \subset M_\infty$を asymptotic inclusion とした時, bimodule としての同型${}_AB_A \cong {}_AM_{\infty A}$ は明らかであるが, asymptotic inclusion から決まる定理 1の条件を満たすような$\tilde{S} \in \mathrm{Hom}\,({}_AM_\infty \otimes_A M_{\infty A}, {}_AM_{\infty A})$ が上の同型で移りあう事を示せばよいのだが, $\tilde{S}$を具体的に graphic expression で書き表す事により証明をする.

まず, $\tilde{S} \in \mathrm{Hom}\,({}_AM_\infty \otimes_A M_{\infty A}, {}_AM_{\infty A})$ についてだが, これは $\langle M_\infty, e_A\rangle$ から M_∞への conditional expectation からきているので,

$$S : x \otimes_A y \to \lambda^{-1/2} xy$$

とあらわされる. ここでλは global index である.

そこで, 上の対応を図形で表わすと図 1 の様になる.

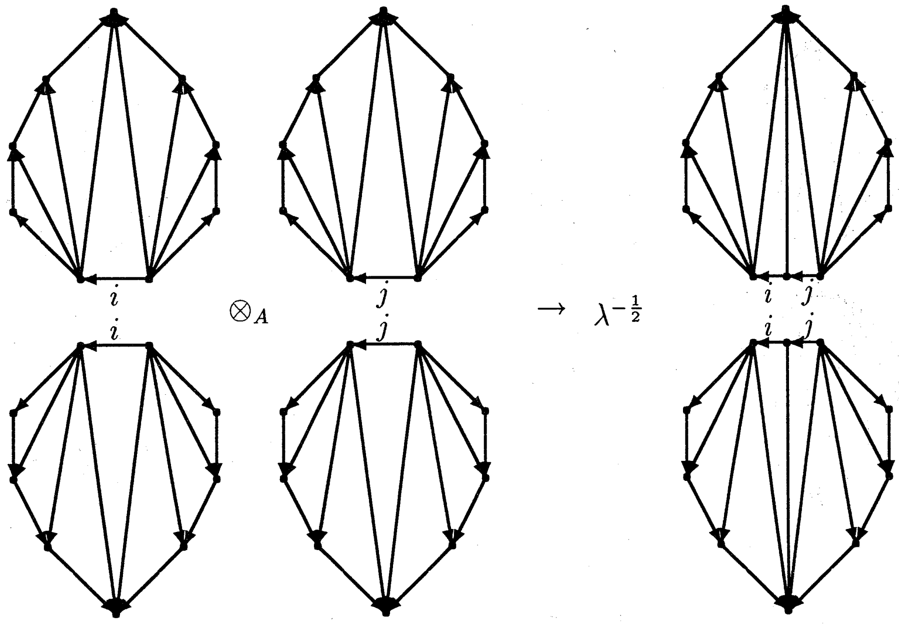

図 1

ここで, 図 1 の右辺の図については, 図 2 の様な式が成り立つ.

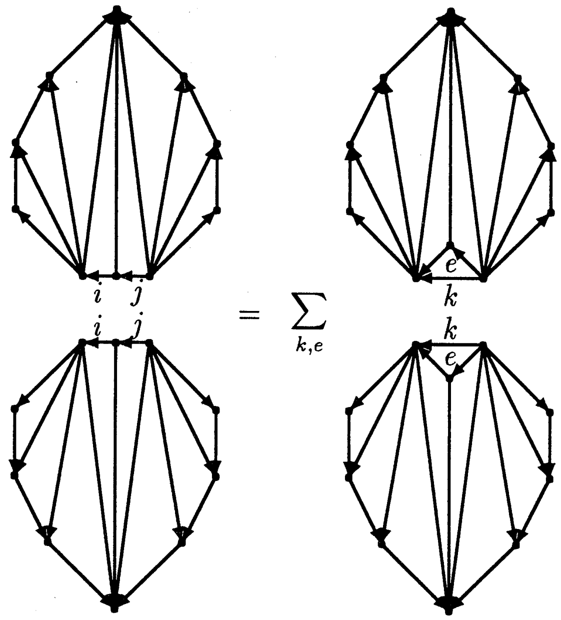

図 2

これらの図と, $\tilde{V}_{ijk}$の式を比べてみると係数を除いては, 形が似ている. 図の下側が大体 V^e_{ijk}を表し, 上側が $J(V^e_{ijk})$ を表しているのだが, きちんと計算をしてみると片側は, 本当に coisometry となっているのだが, もう片方は, coisometry となってはおらず, $\sqrt{\frac{d(k)}{d(i)d(j)}}$ 倍する事によって coisometry となる事が分かる. 図で書くと図 3 の様にになる.

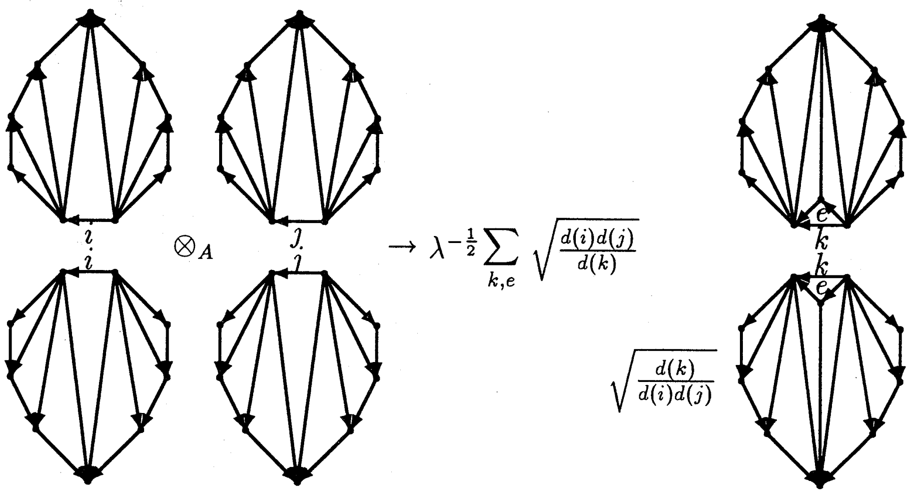

図 3

ここで係数$\sqrt{\frac{d(k)}{d(i)d(j)}}$が現れる理由を簡単に述べておく.
Hom $({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM}, {}_M Z_{kM})$ の元 T, T'について, 通常内積は

$$\langle T, T' \rangle = TT'^*$$

として入れるが，もう一つ内積を入れるやり方があるのである．それは End $({}_M Z_i \otimes_M Z_{jM})$ 上に自然に定まる trace trを用いて

$$\langle T, T' \rangle' = tr(T'^* T)$$

とするやり方である．この時2つの内積には

$$tr(T'^* T) = \frac{d(k)}{d(i)d(j)} TT'^*$$

という関係がある．この違いが，図3で係数の調整が必要な原因となるのである．

図3で，上側と下側が coisometry となっており，それぞれ V^e_{ijk}, $J(V^e_{ijk})$ に対応していて，これは$\tilde{V}_{ijk}$の式と同じである．よって S, $\tilde{S}$が同じ形をもち，これによって Longo-Rehren の構成が asymptotic inclusion と同型な subfactor を与える事が分かる． □

参考文献

[EK] Evans, D. E., and Kawahigashi, Y., *On Ocneanu's theory of asymptotic inclusions for subfactors, topological quantum field theories and quantum doubles*, Internat. J. Math. 6 (1995), 205–228.

[L] Longo, R., *Duality for Hopf algebras and for subfactors*, Comm. Math. Phys. 159 (1994), 133–150.

[LR] Longo, R., and Rehren, K.-H., *Nets for subfactors*, Rev. Math. Phys. **7** (1995), 567–597.

[M] Masuda, T., *An analogue of Longo's canonical endomorphism for bimodule theory and its application to asymptotic inclusions*, to appear in Internat. J. Math.

[O] Ocneanu, A. Seminar talk at University of California, Berkeley, June 1993.

[Y] Yamagami, S., *A note on Ocneanu's approach to Jones index theory*, Internat. J. Math. 4 (1993), 859–871.