数理解析研究所講究録
979 巻 1997 年 124-127

Putnam の不等式の拡張について

神奈川大学　長　宗雄　(Muneo Chō)

complex Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の hyponormal 作用素 T に対する Putnam の不等式

$$\|T^*T - TT^*\| \leq \frac{1}{\pi} m_2(\sigma(T))$$

(ここで m_2 は planar Lebesgue measure である) は現在のところ次のような拡張がある.

1. p-hyponormal 作用素への拡張.

作用素 T : p-hyponormal if $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$.

特に $p = \frac{1}{2}$ のとき T を semi-hyponormal と呼ぶ.

この作用素については次の不等式が成り立つ.

$$\|(T^*T)^p - (TT^*)^p\| \leq \frac{p}{\pi} \int\int_{\sigma(T)} r^{2p-1} dr d\theta$$

$p \geq \frac{1}{2}$ のときは D. Xia [10] で示されている.
$0 < p < \frac{1}{2}$ のときは M. Chō and M. Itoh [1] で示された.

2. 中路先生による拡張. 中路先生は論文 [6] で次の結果を示した.

T: hyponormal 作用素とし K は任意の有界線形作用素とし $TK = KT$ を満たすものとする. このとき

$$\|T^*K - KT^*\| \leq 2 \cdot (\frac{1}{\pi} m_2(\sigma(T)))^{\frac{1}{2}} \|K\|$$

3. n-tuple への拡張. $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n)$ を可換な作用素としたとき

$$\|\mathbf{T}, \mathbf{T}^* \text{の式}\| \leq \alpha \cdot meas(\sigma(\mathbf{T}))$$

のような形の不等式が望ましい, ただし α は定数で $\sigma(\mathbf{T})$ は $\mathbf{T}$ の Taylor spectrum である. D. Xia は [9] で非常に特殊な n-tuple 即ち $\mathbf{T} = (U_1A, ..., U_nA), A \geq 0$, でさらに $(U_1, ..., U_n)$ が可換なユニタリー作用素のときに拡張を得ているので, ここではそれについて解説する. 簡単のため $n = 2$ とする.

$\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ を可換なユニタリー作用素とする. 作用素 $\mathbf{Q}_j$ $(j = 1, 2)$ を次のように定義する

$$\mathbf{Q}_j T = T - U_j T U_j^* \quad (T \in B(\mathcal{H})).$$

そこで $A \in B(\mathcal{H})$ and $A \geq 0$ に対して. $(\mathbf{U}, A)$ は次のとき semi-hyponormal と呼ばれる

$$\mathbf{Q}_1 A, \mathbf{Q}_2 A \text{ and } \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 A \geq 0.$$

この定義からすぐに $(\mathbf{U}, A)$ が semi-hyponormal のとき各作用素 $U_j A$ は semi-hyponormal である. もし

$$\mathcal{S}_j^{\pm}(T) = s - \lim_{n \to \pm\infty} (U_j^{-n} T U_j^n)$$

が存在するとき $\mathcal{S}_j^{\pm}(T)$ は the polar symbols of T と呼ばれる. $U_j A$ が semi-hyponormal のときは $\mathcal{S}_j^{\pm}(A)$ は存在する. $0 \leq k \leq 1$ に対して,

$$(k\mathcal{S}_j^+ + (1-k)\mathcal{S}_j^-)T = k\mathcal{S}_j^+(T) + (1-k)\mathcal{S}_j^-(T).$$

とし $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in [0, 1]^2$ と $(\mathbf{U}, A)$: semi-hyponormal に対して the generalized polar symbols $A_{\mathbf{k}}$ of A は次のように定義する

$$A_{\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^{2} (k_j \mathcal{S}_j^+ + (1-k_j)\mathcal{S}_j^-)A.$$

このとき作用素 $(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}})$ は可換な作用素の 3-tuple になっている. そこで $(\mathbf{U}, A)$ の spectrum を次のように定義する.

$$\sigma(\mathbf{U}, A) = \bigcup_{\mathbf{k} \in [0,1]^2} \sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}}).$$

ここで $\sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}})$ は $(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}})$ の joint approximate point spectrum である. 即ち $(z_1, z_2, z_3) \in \sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_{\mathbf{k}})$ if and only if there exists a sequence $\{x_n\}$ of unit vectors such that

$$(U_1 - z_1)x_n \to 0, (U_2 - z_2)x_n \to 0 \text{ and } (A_{\mathbf{k}} - z_3)x_n \to 0.$$

また, m_j を normalized Haar measure in $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, 即ち

$$dm_j = \frac{1}{2\pi} d\theta_j \quad (e^{i\theta_j} \in \mathbf{T})$$

とし, さらに $m = m_1 \times m_2 \times dr$ とする. 以上の下で D. Xia さんは次の拡張を得た.

Theorem 1 (Th. 5 of [9]). *Let* $(\mathbf{U}, A)$ *be semi-hyponormal. Then*

$$\| \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 A \| \leq m(\sigma(\mathbf{U}, A)).$$

これは p-hyponormal tuples にもすぐに次のように拡張できる. まず $A \in B(\mathcal{H})$ and $A \geqq 0$ とし. $(\mathbf{U}, A)$ は次のとき p-hyponormal と呼ぶ

$$\mathbf{Q}_1 A^{2p}, \mathbf{Q}_2 A^{2p} \text{ and } \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 A^{2p} \geq 0.$$

そして $(\mathbf{U}, A)$: p-hyponormal と $0 \leq k \leq 1$ に対して

$$\{k\mathcal{S}_j^+ + (1-k)\mathcal{S}_j^-\}A = \{k\mathcal{S}_j^+(A^{2p}) + (1-k)\mathcal{S}_j^-(A^{2p})\}^{\frac{1}{2p}}$$

とし, さらに $\mathbf{k} = (k_1, k_2) \in [0,1]^2$, に対して the generalized polar symbols $A_{(\mathbf{k})}$ of A を次のように定義する.

$$A_{(\mathbf{k})} = \prod_{j=1}^{2}\{k_j\mathcal{S}_j^+ + (1-k_j)\mathcal{S}_j^-\}A.$$

そして joint spectrum $\sigma(\mathbf{U}, A)$ は

$$\sigma(\mathbf{U}, A) = \bigcup_{\mathbf{k}\in[0,1]^2} \sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_{(\mathbf{k})}).$$

と定義すると, 次の結果を得る.

Theorem 2. *Let* $(\mathbf{U}, A)$ *be* p*-hyponormal. Then*

$$\| \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 A^{2p} \| \leq \frac{2p}{(2\pi)^2}\int\int_{\sigma(\mathbf{U},A)} r^{2p-1}\, d\theta_1 d\theta_2\, dr.$$

最後に semi-hyponormal 作用素 T が $T = UA$ と polar 分解され, さらに U がユニタリ一作用素となっているときは $0 \leq k \leq 1$ に対して

$$A_k = k\mathcal{S}_U^+(A) + (1-k)\mathcal{S}_U^-(A)$$

とし

$$\sigma(U, A) = \bigcup_{0\leq k\leq 1} \sigma_{ja}(U, A_k)$$

とするとき

$$re^{i\theta} \in \sigma(T) \iff (e^{i\theta}, r) \in \sigma(U, A)$$

が成り立つ. 従って極座標に変換しただけのことになる. もちろん, この結果は p-hyponormal 作用素に対しても同様に成立する. 詳しくは [3] の論文を参照下さい.

References

[1] M. Chō and M. Itoh, Putnam's inequality for p-hyponormal operators, Proc. Amer. Math. J. 123(1995), 2435-2440.

[2] M. Chō and M. Itoh, On spectra of p-hyponormal operators, Integral Equations and Operator Theory 23(1995), 287-293.

[3] M. Chō and T. Huruya, Putnam's inequality for p-hyponormal n-tuples, preprint.

[4] R. Curto, On the connectedness of invertible n-tuples, Indiana Univ. Math. J. 29(1980), 393-406.

[5] R. Curto, P. Muhly and D. Xia, A trace estimate for p-hyponormal operators, Integral Equations and Operator Theory 6(1983), 507-514.

[6] T. Nakazi, Complete spectral area estimates and self-commutators, Michigan Math. J. 35 (1988), 435-441.

[7] C. R. Putnam, Commutation properties of Hilbert space operators, Springer-Verlag, 1967.

[8] J. L. Taylor, A joint spectrum for several commuting operators, J. Funct. Anal. 6(1970), 172-191.

[9] D. Xia, On the semi-hyponormal n-tuple of operators, Integral Equations and Operator Theory 6(1983), 879-898.

[10] D. Xia, Spectral Theory of Hyponormal Operators, Birkhäuser 1983.