数理解析研究所講究録
979 巻 1997 年 104-114

Subdiagonal 環の triangular form について

新潟大 自然科学 吉 国興 (Guoxing Ji)
新潟大 自然科学 大和田智義 (Tomoyoshi Ohwada)
新潟大 理学部 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

1 序論

自己共役でない作用素環の構造の研究は、不変部分空間の問題や正規でない作用素の構造の研究と関連して、今までに多くの研究者によってなされてきた。その中で、Helson-Lowdenslager [4] は 1958 年に行列値解析関数環の研究をし、また、1960 年に Kadison-Singer [7] は三角行列環の一般化として、triangular 環を導入し、von Neumann 環の中で自己共役でない部分環の系統的な研究をした。そしてこの二つの概念を結ぶものとして、1967 年に Arveson は $*$-弱 Dirichlet 環の非可換版として、subdiagonal 環の概念を導入した。[1] において Arveson は subdiagonal 環の多くの例を与え、分解定理、Jensen の不等式や Szegö の定理等について、注目すべき結果を示した。また、Loeble-Muhly [9]、河村-富山 [8] は von Neumann 環上の flow により定義されるスペクトル部分空間の理論から、系統的な subdiagonal 環の例を与えた。更に、subdiagonal の構造として不変部分空間の構造理論や極大性など今までに多くの結果が示されている (c.f., [1], [3], [5], [6], [10], [11], [13]-[17])。まず、subdiagonal 環の定義から始めよう。

$\mathcal{M}$ を可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環とする。Φ を $\mathcal{M}$ から von Neumann 部分環 $\mathfrak{D}$ の上への faithful normal expectation として、$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{M}$ の部分環とする。このとき、$\mathfrak{A}$ が Φ に関する $\mathcal{M}$ の subdiagonal 環であるとは、次の条件 (1)～(3) を満たすときをいう。

(1) $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^* = \mathfrak{D}$、($\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}$ の diagonal という)

(2) Φ は $\mathfrak{A}$ 上乗法的、

(3) $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^*$ は $\mathcal{M}$ において σ-弱稠密である。

更に、$\mathfrak{A}$ が maximal subdiagonal 環であるとは、$\mathcal{M}$ の Φ に関する subdiagonal 環の中で極大であるときをいう。

[1] における subdiagonal 環の定義で $\mathfrak{A}$ を σ-弱閉とは仮定していないが、$\mathfrak{A}$ の σ-弱閉包はまた、Φ に関する subdiagonal 環であるで、以後 subdiagonal 環は σ-弱閉と仮定することにする。

一方、nest 環は、作用素の triangular form の研究のため Ringrose [12] により導入された。Nest 環の構造についてはこれまでに多くの結果が得られているが、それらは Davidson の Nest algebras [2] によくまとめられているので、そちらを参考にしてもらいたい。

$\mathfrak{A}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の Φ に関する subdiagonal 環とし、

$$\mathfrak{A}_0=\{X\in\mathfrak{A}\mid\Phi(X)=0\}$$

とおく。このとき、明らかに $\mathfrak{A}_0$ は $\mathfrak{A}$ の σ-弱閉な two-sided イデアルであるので、$\mathcal{H}_n=[\mathfrak{A}_0^n\mathcal{H}]$ とおき、更に $\mathcal{H}_0=\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_\infty=\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n$ により $\mathcal{H}$ の閉部分空間を定義すれば $\mathfrak{A}$-不変な部分空間の減少列 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\supseteq\mathcal{H}_1\supseteq\cdots\supseteq\mathcal{H}_n\supseteq\cdots$ が得られる。よって、P_n を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_n$ の上への projection とすれば、明らかに$\{P_n\mid 0\leq n\leq\infty\}$ は $\mathcal{M}$ の projection からなる減少列で $P_n\downarrow P_\infty$ を満たす。そこで、次の定義を与える。

定義 1.1 *subdiagonal* 環 $\mathfrak{A}$ が *pure* であるとは、$P_\infty=0$ を満たすときをいう。また、$P_1=I$ のとき、*subdiagonal* 環 $\mathfrak{A}$ を *non-degenerate* と呼ぶ。

ここでは、subdiagonal 環 $\mathfrak{A}$ の purity について調べ、そこで得られた幾つかの結果を報告する事を目的とする。まず、§2 で subdiagonal 環の幾つかの例を挙げるが、それらの多くは pure でない。よって、どの様な subdiagonal 環が pure になるのかは興味深い問題である。そこで、まず §3 では、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が有限次元の場合を考え、その上の subdiagonal 環（実際には、より一般に $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^*=\mathcal{M}$ を満たす $\mathcal{M}$ の部分環でよい）はいつでも $\mathcal{M}$ の nest 環になる事を示し、有限次元 subdiagonal 環の purity を考察する。§4

では、一般の場合を考え、 subdiagonal 環が pure であることと、nest 環である事が同値である事を示す。最後に §5 で、subdiagonal 環の triangular decomposition を与える。

2 subdiagonal 環の例

ここでは、良く知られている subdiagonal 環の例を幾つか紹介することにする。

例 1 $\mathcal{M}$ を行列環 M_n とし、$\mathfrak{A}$ を上三角行列全体とすれば、*diagonal* $\mathfrak{D}$ は対角行列全体であるので、Φ を

$$\Phi((a_{ij})_{n\times n}) = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と定義すれば、Φ は $\mathfrak{D}$ への *expectation* となる。このとき、$\mathfrak{A}$ は Φ に関する $\mathcal{M}$ の *subdiagonal* 環である。

例 2 $\mathcal{M}$ を $L^\infty(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$ は 単位円) とし、$\mathfrak{A}$ を $H^\infty(\mathbb{T})$ とする。Φ を

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta$$

とすれば、$\mathfrak{A}$ は Φ に関する $\mathcal{M}$ の *subdiagonal* 環である。

例 3 (Lobel-Muhly [9], 河村-富山 [8], etc.) $\mathcal{M}$ を *von Neumann* 環とし、$\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を $\mathcal{M}$ の *flow* つまり σ-弱連続な一径数自己同型群とする。任意の $X\in\mathcal{M},\ f\in L^1(\mathbb{R})$ に対して、

$$\alpha(f)X = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\alpha_t(X)\,dt$$

とし、

$$Z(f) = \{t\in\mathbb{R} \mid \hat{f}(t) = 0\} \qquad (\text{ここで } \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} f(s)\,ds\ )$$

としたとき、*Arveson* スペクトルを

$$Sp_\alpha(X) = \bigcap\{Z(f) \mid f\in L^1(\mathbb{R}),\ \alpha(f)X = 0\}$$

で定義する。このとき

$$H^\infty(\alpha) = \{X \in \mathcal{M} : Sp_\alpha(X) \subseteq [0,\infty)\}$$

によりスペクトル部分空間を定義すれば、$H^\infty(\alpha)$ は $\mathcal{M}$ の σ-弱閉部分環でありその *diagonal* $\mathcal{D} = H^\infty(\alpha) = \{X \in \mathcal{M} : Sp_\alpha(X) = \{0\}\}$ は $\mathcal{M}$ の $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ に関する不動点環になっている。このとき、$\mathcal{M}$ が α-*finite* (i.e., $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}^\alpha$ の上への faithful normal expectation が存在する) なら、$H^\infty(\alpha)$ は *subdiagonal* 環である。

この結果の特別な場合として McAsey-Muhly-斎藤による解析的接合積の概念が導入されている。

例 4 (McAsey-Muhly-斎藤 [10]) $\mathfrak{D}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 環とし、α を $\mathfrak{D}$ の $*$-自己同型写像としたとき、任意の $X \in \mathfrak{D}$ に対して

$$(\pi_\alpha(X)\xi)(n) = \alpha^{-n}(X)\xi(n), \quad (S\xi)(n) = \xi(n-1), \quad \xi \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H}),\ n \in \mathbb{Z}.$$

により $\ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H})$ 上の作用素を定義し、$\pi_\alpha(\mathfrak{D}) = \{\pi_\alpha(x) \mid x \in \mathfrak{D}\}$ とおく。このとき、$\pi_\alpha(\mathfrak{D})$ と S により生成された *von Neumann* 環を、$\mathfrak{D}$ の α に関する接合積といい、$\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ とかく。また、$\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の σ-弱閉部分環 $\overline{alg\{\pi_\alpha(\mathfrak{D}), S\}}^{\sigma-w}$ を解析的接合積といい $\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_+$ とかく。$\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の双対作用、すなわち $(V_t\xi)(n) = e^{2\pi int}\xi(n)$, $(\xi \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathcal{H}))$ により与えられるユニタリ作用素 V_t に対して、$\beta_t(X) = V_tXV_t^*$, $(X \in \mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z})$ とすれば

$$\varepsilon(X) = \int_0^1 \beta_t(X)\,dt, \quad X \in \mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$$

は $\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ から $\mathfrak{D}$ への $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$-不変な *faithful normal expectation* になる。このとき、$\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_+$ は $\mathfrak{D}$ を *diagonal* に持つ、$\mathfrak{D} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ の ε に関する *subdiagonal* 環になる。

3 有限次元ヒルベルト空間上の subdiagonal 環の構造

この節では、ヒルベルト空間を有限次元と仮定する。有限次元ヒルベルト空間上で subdiagonal 環を考えた場合、定義 1.1 の条件 (3) は、(3)' $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^* = \mathcal{M}$ となる。そこで、こ

こではこの条件 (3)' を満たす、より一般的な部分環の構造を nest 環の理論と関係付け考察する。まず、nest 環の定義から始めよう。

$\mathcal{N}$ が nest であるとは $\mathcal{N}$ が $\mathcal{H}$ 上の prejection からなる全順序な閉束であるときをいう。また、nest $\mathcal{N}$ に対して、nest 環 alg$\mathcal{N}$ を

$$\mathrm{alg}\mathcal{N} = \{T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \mid (I-P)TP = 0 \ (\forall P \in \mathcal{N})\}$$

により定義して、$\mathfrak{D} = \mathrm{alg}\mathcal{N} \bigcap (\mathrm{alg}\mathcal{N})^*$ を nest 環 alg$\mathcal{N}$ の diagonal と呼ぶ。

このとき、まず次の定理を得た。

定理 3.1 $\mathfrak{A}$ を単位元を含む $\mathcal{M}$ の部分環で、$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^* = \mathcal{M}$ を満たすものとする。このとき、$\mathfrak{A}$ は *von Neumann* 環 $\mathcal{M}$ の *nest* 環になる。

この定理の証明には、幾つかの補題が必要である。

補題 3.2 定理 *3.1* の仮定のもとで、$\mathfrak{A} \subsetneqq \mathcal{M}$ が成り立つとき、自明でない $\mathcal{M}$ の *projection* P が存在して $P \in lat\mathfrak{A}$ を満たす。ここで、$lat\mathfrak{A}$ は $\mathcal{H}$ の $\mathfrak{A}$-不変な部分空間全体の閉束である。

証明 $\mathcal{M}$ が factor でなければ、$\mathcal{M}$ の自明でない中心 projection P が存在するので、$\mathcal{M}$ が factor の場合だけを考えればよい。仮定より、$\mathcal{H}$ は有限次元であるから、ある k に対して、$\mathcal{M}$ は I_k factor である。[5] の Theorem 6.6.1 より $\mathcal{M}$ から $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の上への $*$-同型写像 Θ が存在する。(ここで $\mathcal{K}$ は $dim\mathcal{K} = k$ をみたすヒルベルト空間とする。) $\Theta(\mathfrak{A})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の真部分環であるので、[2] の Proposition 2.12 より自明でない $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ の projection Q が存在して $Q \in \mathrm{lat}\Theta(\mathfrak{A})$ を満たす。そこで $P = \Theta^{-1}(Q)$ と置けば P が求める projection である。よって示された。

■

補題 3.3 定理 *3.1* の仮定のもとで、$P \in \mathcal{M} \bigcap Lat\mathfrak{A}$ とすれば P は $\mathfrak{A}$ の元である。

証明 $P \in \mathcal{M}$ かつ $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^* = \mathcal{M}$ より $\mathfrak{A}$ の元 C が存在して $P = C + C^*$ を満たす。そこで $\mathcal{H} = P\mathcal{H} \oplus P^{\perp}\mathcal{H}$ を考えれば C の行列表現

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}$$

が得られる。いま $P = P^*$ であったので $C_{12} = 0$, $C_{11} + C_{11}^* = I_{P\mathcal{H}}$, $C_{22} + C_{22}^* = 0$ より、ある自己共役作用素 $K_1 \in \mathcal{B}(P\mathcal{H})$, $\mathcal{K}_{\in} \in \mathcal{B}(P^{\perp}\mathcal{H})$ が存在して、

$$C_{11} = \frac{1}{2}I_{P\mathcal{H}} + iK_1, \qquad C_{22} = iK_2$$

と表すことができる。よって C はスペクトルが $\sigma(C) = \sigma(C_{11}) \cup \sigma(C_{22})$ を満たす $\mathfrak{A}$ の正規作用素であり $\sigma(C_{11}) \subset \{\frac{1}{2} + i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ かつ $\sigma(C_{22}) \subset \{i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ であるので $\sigma(C_{11}) \cap \sigma(C_{22}) = \emptyset$ となる。よって $\mathbb{C}$ のある有界な開部分集合 Ω_1, Ω_2 が存在して次の条件をみたす。

(1) $\sigma(C_{11}) \subset \Omega_1, \quad \sigma(C_{22}) \subset \Omega_2$

(2) $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \emptyset$

(3) $(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)^c$ は連結である。

よって $f = \chi_{\Omega_1}$ を Ω_1 の特性関数とすれば functional calculus と [9] の Theorem 13.7 から $f(C) = P \in \mathfrak{A}$ を得る。よって示された。

■

定理 3.1 の証明 $\mathfrak{A} \neq \mathcal{M}$ と仮定してよいので Lemma 3.2 より、ある $\mathcal{M} \cap \mathrm{lat}\mathfrak{A}$ の maximal nest $\mathcal{N}$ が存在する。そこで $\mathcal{N} = \{Q_k\}_{k=0}^n$ を

$$0 = Q_0 < Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n = I$$

をみたす projection の列とする。このとき補題 3.3 より $\mathcal{N} \subset \mathfrak{A}$ であるので、$\mathfrak{A} = \mathcal{M} \cap \mathrm{alg}\mathcal{N}$ を示せばよい。明らかに $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{M} \cap \mathrm{alg}\mathcal{N}$ であるので逆向きを示す。$E_k = Q_k - Q_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ とおくと $\mathcal{N}$ の極大性と補題 3.2 から $E_k \in \mathfrak{A}$, $E_k\mathfrak{A}E_k = E_k\mathcal{M}E_k$ を得る。$T \in \mathcal{M} \cap \mathrm{alg}\mathcal{N}$ をとれば任意の $k > j$ に対して $E_kTE_j = 0$ となる。いま、$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^* = \mathcal{M}$

であったので $\mathfrak{A}$ の元 A, B が存在して $A+B^*=T$ と表せる。よって、簡単な計算より $E_kTE_j \in \mathfrak{A}$ $(k,j=1,2,\ldots,n)$ となり $T\in\mathfrak{A}$ を得る。よって示された。

■

$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{M}$ の Φ に関する subdiagonal 環とする。このとき定理 3.1 の証明からある finite nest $\mathcal{N}=\{Q_k\}_{k=1}^n$ が $\mathcal{M}$ の中に存在して $\mathfrak{A}=\mathcal{M}\cap\mathrm{alg}\mathcal{N}$ を満たす。更に、任意の $X\in\mathcal{M}$ に対して$\Phi(X)=\sum_{k=1}^n E_kXE_k$ かつ $\mathfrak{A}_0^n=0$ が簡単に示されるので、定理の系として次の結果をえる。

系 3.4 $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{M}$ の Φ に関する *subdiagonal* 環とすれば、$\mathfrak{A}$ は $\mathcal{M}$ の *finite nest* を持つ *nest* 環である。特に、このとき $\mathfrak{A}$ は定義 *1.1* の意味で *pure* である。

斎藤-綿谷は [10] において有限次元 factor $\mathcal{M}$ の subfactor $\mathfrak{D}$ を diagonal にもつ $\mathcal{M}$ の極大 subdiagonal 環は $\mathfrak{D}=\mathcal{M}$ の場合を除いて存在しないことを示した。ここではより一般に次の系を得ることができた。

系 3.5 $\mathcal{M}$ を有限次元 *von Neumann* 環とし $\mathfrak{D}$ をその *subfactor* とする。このとき $\mathfrak{D}$ を *diagonal* にもつ $\mathcal{M}$ の *subdiagonal* 環は $\mathfrak{D}=\mathcal{M}$ を除いて存在しない。

証明 $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{D}$ を diagonal にもつ $\mathcal{M}$ のsubdiagonal 環とすれば、定理 3.1 より $\mathfrak{A}$ は$\mathfrak{D}$ の center の元からなる nest $\mathcal{N}$ をもつ $\mathcal{M}$ の nest 環である。いま $\mathfrak{D}$ は $\mathcal{M}$ の subfactor であるので$\mathcal{N}=\{0,I\}$ となり $\mathfrak{D}=\mathfrak{A}=\mathcal{M}$ を得る。よって示された。

■

4 pure subdiagonal 環

この節では無限次元ヒルベルト空間上の subdiagonal 環の purity について考える。一節で定義したように、P_n を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_n$ の上への projection としたとき、まず、次の結果を得た。

命題 4.1　任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ に対して P_n は $\mathfrak{D}$ の *central projection* である。

証明　明らかに$\{P_n : 0 \leq n \leq \infty\} \subseteq$ lat$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}'$ であるので $\{P_n : 0 \leq n \leq \infty\} \subseteq \mathfrak{D}$ を示せば証明は終る。そのためには $\Phi(P_n) = P_n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$ を示せばよい。そこで $E_n = P_n \ominus P_{n+1}$ $(n \geq 0)$ とおくと、

$$I = (\sum_{n=0}^{\infty} \oplus E_n) \oplus P_\infty$$

が成り立つ。$\mathfrak{A}_0 \mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_{n+1}$ より $E_n \mathfrak{A}_0 E_n = 0$ であり、$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^*$ は $\mathcal{M}$ で σ-弱稠密より、

$$\begin{aligned}\Phi(E_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \Phi(E_k) + P_\infty \Phi(E_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \Phi(E_k) E_n + P_\infty \Phi(E_k) P_\infty \\ &= E_k + P_\infty \Phi(E_k) P_\infty.\end{aligned}$$

である。よって $\Phi(E_k) \geq E_k (k \geq 0)$ となりΦ は faithful かつ idempotent(i.e., $\Phi^2 = \Phi$) より$\Phi(E_k) = E_k (k \geq 0)$ となり$\Phi(P_k) = P_k (k \geq 0)$ を得る。よって示された。

■

定理 4.2 $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{M}$ の *subdiagonal* 環すれば、$\mathfrak{A}$ が *pure* であるための必要十分条件は、ある有限または無限個の $\mathcal{M}$ の *projection* の減少列からなる *nest* $\mathcal{N} = \{Q_n : 0 \leq n \leq \infty\}$ が存在して $\mathfrak{A} = \mathcal{M} \cap alg\mathcal{N}$ をみたすことである。

証明　$(\Longrightarrow)$ $\mathfrak{A}$ を pure と仮定する。このとき $Q_n = P_n$ $(n \geq 0)$ とおけば、$P_\infty = 0$ であるので命題 4.1 の証明から任意の $n \geq 0$ に対して $E_n \mathcal{M} E_n \in \mathfrak{D}$ 、更に

$$\Phi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n X E_n \quad (X \in \mathcal{M})$$

を得る。故に $\mathfrak{A} = \mathcal{M} \cap \mathrm{alg}\mathcal{N}$ となり示された。

$(\Longleftarrow)$ $\mathcal{M}$ の prejection の減少列からなる nest $\mathcal{N} = \{Q_n : 0 \leq n \leq \infty\}$ に対して $\mathfrak{A} = \mathcal{M} \cap \mathrm{alg}\mathcal{N}$ とする。このとき $\mathfrak{D} = \mathcal{N}' \cap \mathcal{M}$ かつ $F_n = Q_n \ominus Q_{n+1} (n \geq 0)$ に対して

$\Phi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n X F_n$ を得る。今、$\mathfrak{A}_0$ は $\mathcal{M}$ の元から成る strictly 下三角行列環とみなせるので $\mathfrak{A}$ は pure である。よって示された。

■

5 subdiagonal 環の分解

この節では subdiagonal 環の分解について考えて行くことにする。いま、projection $E \in \mathfrak{D}$ をとれば、$\Phi_E(EXE) = E\Phi(X)E$ により $E\mathcal{M}E$ から $E\mathfrak{D}E$ の上への faithful normal expectation Φ_E が得られる。よって $E\mathfrak{A}E$ は $E\mathcal{M}E$ の Φ_E に関する subdiagonal 環である。もし、$P_\infty \neq 0$ であれば $[\mathfrak{A}_0 P_\infty \mathcal{H}] = \mathcal{P}_\infty \mathcal{H}$ であり、$P_\infty \in \mathfrak{D}$ より $P_\infty \mathfrak{A} P_\infty$ は $P_\infty \mathcal{M} P_\infty$ の Φ_{P_∞} に関する non-degenerate subdiagonal 環である。一方、$P_\infty^\perp \mathfrak{A} P_\infty^\perp$ は $P_\infty^\perp \mathcal{M} P_\infty^\perp$ の $\Phi_{P_\infty^\perp}$ に関する pure subdiagonal 環である。よって、次の結果を得る。

補題 5.1 *$\mathfrak{D} \cap lat\mathfrak{A}$ の projection E に対して次の (i),(ii) が成立する。*

(i) $E\mathfrak{A}E$ が *non-degenerate* であれば、$E \leq P_\infty$ である。

(ii) $E^\perp \mathfrak{A} E^\perp$ が *pure* であれば $E \geq P_\infty$ である。

この補題より次の結果を得る。

命題 5.2 *$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{M}$ の Φ に関する subdiagonal 環とする。このとき次の条件を満たす $\mathfrak{D} \cap lat\mathfrak{A}$ の projection E が一意に存在する。*

(i) $E\mathfrak{A}E$ は non-degenerate subdiagonal 環である。

(ii) $E^\perp \mathfrak{A} E^\perp$ は pure subdiagonal 環である。

(iii) $E\mathfrak{A}E^\perp = E\mathcal{M}E^\perp$

$P_\infty \mathfrak{A}^* P_\infty$ はまた $P_\infty \mathcal{M} P_\infty$ の subdiagonal 環であるので、命題 4.2 をふたたび $P_\infty \mathfrak{A}^* P_\infty$ に適応することで次の分解定理を得る。

定理 5.3 $\mathfrak{A}$ を $\mathcal{M}$ の Φ に関する *subdiagonal* 環とする。このとき、$\mathfrak{D}$ の互いに直交する射影作用素 E_1, E_2, E_3 $(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = I)$ が存在して、$\mathfrak{A}$ は次の *matrix decomposition* を持つ。

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{13} \\ 0 & \mathfrak{A}_{22} & \mathfrak{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathfrak{A}_{33} \end{pmatrix}$$

ここで、$\mathfrak{A}_{11}^*$ $(resp.\mathfrak{A}_{33})$ は $E_1\mathcal{M}E_1$ $(resp.E_3\mathcal{M}E_3)$ の *pure subdiagonal* 環、$\mathfrak{A}_{22}$、$\mathfrak{A}_{22}^*$ は $E_2\mathcal{M}E_2$ の *non-degenerate subdiagonal* 環、そして $\mathfrak{A}_{jk} = E_j\mathcal{M}E_k$ $(j < k)$ である。

参考文献

[1] W. B. Arveson, *Analyticity in operator algebras*, Amer. J. Math., 89(1967), 587-642.

[2] K. R. Davidson, *Nest algebras*, Pitman Reasearch Notes in Math., (191)1988.

[3] R. Exel, *Maximal subdiagonal algebras* , Amer. J. Math., 110(1988), 775-785.

[4] H. Helson and D. Lowdenslager, *Predicion theory and Fourier series in several variables*, Acta Math., 99(1958),165-202.

[5] G. Ji, T. Ohwada and K-S. Saito, *Triangular forms of subdiagonal algebras* , preprint.

[6] G. Ji, T. Ohwada and K-S. Saito, *Certain structure of subdiagonal algebras* , preprint.

[7] R. V. Kadison and I. M. Singer, *Triangular operator algebras*, Amer. J. Math., 82(1969), 227-259.

[8] S. Kawamura and J. Tomiyama, *On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras* , J. Math. Soc. Japan, 29(1977), 73-90.

[9] R. Loebl and P. S. Muhly, *Analyticity and flows in von Neumann algebras* , J. Funct. Anal., 29(1978), 214-252.

[10] M. McAsey, P. S. Muhly, K-S. Saito, *Non-self adjoint crossed products* (*Invariant subspaces and maximality*), Trans. Amer. Math. Soc., 248(1979), 381-409.

[11]T. Nakazi and Y. Watatani, *Invariant subspace theorems for subdiagonal algebras*, preprint.

[12] J. Ringrose, *On some algebras of operators*, Proc. London Math., 15 (1965),61-83.

[13] K-S. Saito, *A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 77(1979), 348-352.

[14] K-S. Saito, *Invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras*, Pac. J. Math., 93(1981), 431-434.

[15] K-S. Saito, *Generalized interpolation in finite maximal subdiagonal algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 117(1995), 11-20.

[16] K-S. Saito and Y. Watatani, *Subdiagonal algebras for subfactors* , J. Operator Theory, 31(1994), 311-317.

[17] K-S. Saito and Y. Watatani, *Subdiagonal algebras for subfactors II* , Canad. Math. Bull., to appear.