数理解析研究所講究録
979 巻 1997 年 1-14



# grand 古田不等式の best possibility について

東北薬科大学　棚橋　浩太郎

[ 概要 ] grand 古田不等式の best possibility の問題と log-majorization に関する問題を考える。

ヒルベルト空間上の可逆な有界線形作用素 $A, B$ と実数 $p, r, s, t$ が $O \leq B \leq A, 1 < s, 0 < t < 1, t \leq r, 1 \leq p$ を満たすとする。このとき

$$0 < \alpha \leq \frac{1-t+r}{(p-t)s+r} \tag{1}$$

ならば

$$\left\{A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^sA^{\frac{r}{2}}\right\}^{\alpha} \leq A^{\{(p-t)s+r\}\alpha} \tag{2}$$

が成り立つというのが grand 古田不等式 ([4]) であった。ここでは 2 行 2 列の行列を用いて grand 古田不等式を満たす $\alpha$ の範囲 (1) は次の意味で best possible であること、つまり

$$\frac{1-t+r}{(p-t)s+r} < \alpha$$

ならば (2) を満たさない 2 行 2 列の行列 $A, B$ が存在することを示す。

次に $O \leq A - B$ で $A - B$ が可逆のとき $B < A$ とかくことにする。最近藤井氏 ([2]) が可逆な正作用素 $A, B$ に対して

$$\log B < \log A \Longleftrightarrow \exists\alpha \in (0,1) : B^{\alpha} < A^{\alpha} \tag{3}$$

を証明した。藤井氏の予想では

$$\log B \leq \log A \Longleftrightarrow \exists\alpha \in (0,1) : B^{\alpha} \leq A^{\alpha} \tag{4}$$

は成立しないだろうとのことだったが、ここでは 2 行 2 列の行列を用いて藤井氏の予想が正しいこと、つまり (4) は成立しないことを示す。また、次にではいつ (4) が成立するか考える。$\log B < \log A$ のときは $\exists\alpha > 0 : B^{\alpha} < A^{\alpha}$ なので、$\log B \leq \log A, \log B \not< \log A$ の場合が問題になるが、このとき 2 行 2 列の場合には $AB = BA$ が $\exists\alpha > 0 : B^{\alpha} \leq A^{\alpha}$ となる必要十分条件であることを示す。

[ 1. grand 古田不等式の best possibility ]

$A, B$ をヒルベルト空間上の有界線形作用素とする。次の不等式はハインツの不等式としてよく知られている。
[ 命題 1.1 ([5],[6]) ]

$$O \le B \le A, 0 < p < 1 \Longrightarrow B^p \le A^p \tag{1.1}$$

この不等式の面白い拡張として次の古田不等式がある。
[ 命題 1.2 ([3]) ] $O \le B \le A$ とする。正数 $p, q, r$ が

$$p + 2r \le (1 + 2r)q \quad \text{かつ} \quad 1 \le q \tag{1.2}$$

を満たすなら

$$(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \le A^{\frac{p+2r}{q}}, \ B^{\frac{p+2r}{q}} \le (B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \tag{1.3}$$

が成立する。

前に筆者 ([7]) は 2 行 2 列の行列を用いて古田不等式が成立する範囲 (1.2) は次の意味で best possible であること、つまり

$$0 < q < 1 \ \text{ または } \ (1 + 2r)q < p + 2r \tag{1.4}$$

ならば (1.3) を満たさない行列 $A, B$ が存在することを証明した。
さて古田不等式はいろんな方面に応用され議論が活発にされているが、特に安藤ー日合の log-majorization の不等式を含んだ拡張として grand 古田不等式が得られている。

[ 命題 1.3 ([4]) ] ヒルベルト空間上の可逆な有界線形作用素 $A, B$ と実数 $p, r, s, t$ が $O \le B \le A,\ 1 < s, 0 < t < 1, t \le r, 1 \le p$ を満たすとする。このとき

$$0 < \alpha \le \frac{1 - t + r}{(p - t)s + r} \tag{1.5}$$

ならば

$$\left\{A^{\frac{r}{2}} \left(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}}\right)^s A^{\frac{r}{2}}\right\}^{\alpha} \le A^{\{(p-t)s+r\}\alpha} \tag{1.6}$$

が成り立つ。

ここでは ([7]) と同じような議論で 2 行 2 列の行列を用いて grand 古田不等式が成立する範囲 (1.5) は次の意味で best possible であることを証明する。

［定理 1.4］ 実数 $p, r, s, t$ は $1 < s, 0 < t < 1, t \leq r, 1 \leq p$ を満たすとする。このとき

$$\frac{1-t+r}{(p-t)s+r} < \alpha \tag{1.7}$$

ならば

$$\left\{A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}}\right)^s A^{\frac{r}{2}}\right\}^{\alpha} \leq A^{\{(p-t)s+r\}\alpha} \tag{1.8}$$

を満たさない行列 $A, B$ が存在する。

［証明］

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} \\ \sqrt{\varepsilon(a-b-\delta)} & b+\varepsilon+\delta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

ただし

$$0 < b < 1 < a,\ 0 < \varepsilon,\ 0 < \delta,\ \varepsilon(1-b) \leq \delta(a-1+\varepsilon) \tag{1.10}$$

とおこう。このとき $O \leq B \leq A$ は容易に示せる。ここでは $a, b, \varepsilon, \delta$ を適当にとれば $A, B$ は (1.8) を満たさないことを示せばよい。後で

$$\delta = \frac{1-b}{a-1}\varepsilon, \varepsilon \to +0$$

として (1.8) が満たされないことを示すのだが、当面 $\varepsilon, \delta$ はこのままにしておいて (1.8) が成立するならどのような条件がでてくるか調べる。次の補題を準備しておく。

［補題 1.5］ $\gamma = a - b + \varepsilon - \delta$ として

$$U = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\begin{pmatrix} \sqrt{a-b-\delta} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & -\sqrt{a-b-\delta} \end{pmatrix}$$

とおくと $U$ はユニタリで

$$U^*AU = \begin{pmatrix} a+\varepsilon & 0 \\ 0 & b+\delta \end{pmatrix}$$

である。

補題 1.5 より $U, U^*$ を (1.8) の左右にかけて

$$U^*A^{\{(p-t)s+r\}\alpha}U \geq \left\{U^*A^{\frac{r}{2}}U\left(U^*A^{-\frac{t}{2}}UU^*B^pUU^*A^{-\frac{t}{2}}U\right)^s U^*A^{\frac{r}{2}}U\right\}^{\alpha}$$

より

$$(1.11)\quad \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\{(p-t)s+r\}\alpha} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\{(p-t)s+r\}\alpha} \end{pmatrix}$$
$$\geq \left[\begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\frac{r}{2}} \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}\right.\right.$$
$$\left.\left. U^*\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^p \end{pmatrix}U\begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}\right\}^s\begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\frac{r}{2}} \end{pmatrix}\right]^{\alpha}$$

が得られる。ここで

$$\begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}U^*\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b^p \end{pmatrix}U\begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma}D$$

ただし

$$A_1 = (a+\varepsilon)^{-t}(a-b-\delta+b^p\varepsilon)$$
$$A_2 = (b+\delta)^{-t}(\varepsilon+b^p(a-b-\delta))$$
$$A_3 = (a+\varepsilon)^{-\frac{t}{2}}(b+\delta)^{-\frac{t}{2}}(1-b^p)\sqrt{\varepsilon}\sqrt{a-b-\delta}$$

とおく。さて $\varepsilon, \delta, b \to +0$ のとき

$$A_1 \to a^{1-t},\ A_2 \to 0$$

となるので

$$0 < A_2 < A_1$$

と考えてよい。$D$ を対角化しよう。

$$V = \frac{1}{\sqrt{A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1}}\begin{pmatrix} \sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} & \sqrt{\varepsilon_1} \\ \sqrt{\varepsilon_1} & -\sqrt{A_1 - A_2 + \varepsilon_1} \end{pmatrix},$$

ただし

$$2\varepsilon_1 = -A_1 + A_2 + \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_3^2}$$

とおくと $V$ はユニタリで

$$V^*DV = V^*\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}V = \begin{pmatrix} A_1 + \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & A_2 - \varepsilon_1 \end{pmatrix}$$

である。(1.11) に戻って次のように変形する。

$$(1.12)\quad \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\{(p-t)s+r\}\alpha} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\{(p-t)s+r\}\alpha} \end{pmatrix}$$
$$\geq \left\{ \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\frac{r}{2}} \end{pmatrix} VV^* \left(\frac{1}{\gamma}D\right)^s VV^* \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\frac{r}{2}} \end{pmatrix} \right\}^\alpha$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\frac{r}{2}} \end{pmatrix} V \frac{1}{\gamma^s} \begin{pmatrix} (A_1+\varepsilon_1)^s & 0 \\ 0 & (A_2-\varepsilon_1)^s \end{pmatrix} V^* \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\frac{r}{2}} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\frac{r}{2}} \end{pmatrix} \right\}^\alpha$$
$$= \gamma^{-s\alpha} \frac{1}{(A_1-A_2+2\varepsilon_1)^\alpha} \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix}^\alpha,$$

ただし

$$\begin{aligned} B_1 &= (a+\varepsilon)^r \left\{ (A_1+\varepsilon_1)^s (A_1-A_2+\varepsilon_1) + (A_2-\varepsilon_1)^s \varepsilon_1 \right\} \\ B_2 &= (b+\delta)^r \left\{ (A_1+\varepsilon_1)^s \varepsilon_1 + (A_2-\varepsilon_1)^s (A_1+A_2-\varepsilon_1) \right\} \\ B_3 &= (a+\varepsilon)^{\frac{r}{2}} (b+\delta)^{\frac{r}{2}} \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{A_1-A_2+\varepsilon_1} \left\{ (A_1+\varepsilon_1)^s - (A_2-\varepsilon_1)^s \right\} \end{aligned}$$

とおく。ここで $\varepsilon, \delta, b \to +0$ のとき

$$B_1 \to a^{r+(1-t)(1+s)},\ B_2 \to 0$$

となるので

$$0 < B_2 < B_1$$

と考えてよい。このときも同じように

$$W = \frac{1}{\sqrt{B_1-B_2+2\varepsilon_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{B_1-B_2+\varepsilon_2} & \sqrt{\varepsilon_2} \\ \sqrt{\varepsilon_2} & -\sqrt{B_1-B_2+\varepsilon_2} \end{pmatrix},$$

ただし

$$2\varepsilon_2 = -B_1 + B_2 + \sqrt{(B_1-B_2)^2 + 4B_3^2}$$

とおくと $W$ はユニタリで

$$W^* \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} B_1+\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & B_2-\varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

となるから (1.12) に $W^*, W$ をかけて次のように変形する。

$$(1.13)\quad \gamma^{-s\alpha}(A_1-A_2+2\varepsilon_1)^{-\alpha} \begin{pmatrix} (B_1+\varepsilon_2)^\alpha & 0 \\ 0 & (B_2-\varepsilon_2)^\alpha \end{pmatrix}$$
$$\leq W^* \begin{pmatrix} (a+\varepsilon)^{\{(p-t)s+r\}\alpha} & 0 \\ 0 & (b+\delta)^{\{(p-t)s+r\}\alpha} \end{pmatrix} W$$
$$= \frac{1}{B_1-B_2+2\varepsilon_2} \begin{pmatrix} C_1 & C_3 \\ C_3 & C_2 \end{pmatrix},$$

ただし

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= \{(p-t)s+r\}\,\alpha\\ C_1 &= (a+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}(B_1-B_2+\varepsilon_2)+(b+\delta)^{\tilde{\alpha}}\varepsilon_2\\ C_2 &= (a+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}\varepsilon_2+(b+\delta)^{\tilde{\alpha}}(B_1-B_2+\varepsilon_2)\\ C_3 &= \left\{(a+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}-(b+\delta)^{\tilde{\alpha}}\right\}\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{B_1-B_2+\varepsilon_2}\end{aligned}$$

とおく。従って

$$\tilde{\gamma} = \gamma^{s\alpha}(A_1-A_2+2\varepsilon_1)^{\alpha}$$

とおくと

$$O \le \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}C_1-(B_1-B_2+2\varepsilon_2)(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha} & \tilde{\gamma}C_3\\ \tilde{\gamma}C_3 & \tilde{\gamma}C_2-(B_1-B_2+2\varepsilon_2)(B_2-\varepsilon_2)^{\alpha}\end{pmatrix}$$

となる。よって行列式をとって

$$\begin{aligned}0 \le \tilde{\gamma}^2C_1C_2 &- \tilde{\gamma}C_1(B_1-B_2+2\varepsilon_2)(B_2-\varepsilon_2)^{\alpha}-\tilde{\gamma}C_2(B_1-B_2+2\varepsilon_2)(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha}\\ &+(B_1-B_2+2\varepsilon_2)^2(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha}(B_2-\varepsilon_2)^{\alpha}-\tilde{\gamma}^2C_3^2\end{aligned}$$

である。ここで右辺の $C_1, C_2, C_3$ を展開して整理すると

$$\begin{aligned}0 \le (B_1-B_2+2\varepsilon_2)\{&\tilde{\gamma}^2(\alpha+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}(b+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}(B_1-B_2+2\varepsilon_2)\\ &-\tilde{\gamma}(\alpha+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}(B_1-B_2+2\varepsilon_2)(B_2-\varepsilon_2)^{\alpha}\\ &-\tilde{\gamma}(b+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}(B_2-\varepsilon_2)^{\alpha}-\tilde{\gamma}(\alpha+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}\varepsilon_2(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha}\\ &-\tilde{\gamma}(b+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}(B_1-B_2+\varepsilon_2)(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha}\\ &+(B_1-B_2+2\varepsilon_2)(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha}(B_2-\varepsilon_2)^{\tilde{\alpha}}\}\end{aligned}$$

が得られる。ここで

$$0 < B_1-B_2+2\varepsilon_2$$

と考えてよいので

$$\begin{aligned}(1.14)\quad &-\varepsilon_2\left\{\tilde{\gamma}(a+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}-(B_2-\varepsilon_2)^{\alpha}\right\}\left\{\tilde{\gamma}(b+\delta)^{\tilde{\alpha}}-(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha}\right\}\\ &\le (B_1-B_2+\varepsilon_2)\left\{\tilde{\gamma}(a+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}-(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha}\right\}\left\{\tilde{\gamma}(b+\delta)^{\tilde{\alpha}}-(B_2-\varepsilon_2)^{\alpha}\right\}\end{aligned}$$

となる。ここでこの式を$\varepsilon, \delta$ について 1 次の項まで評価する。$o$ は $o(\varepsilon), o(\delta)$ 、つまり

$$\frac{o}{\varepsilon}, \frac{o}{\delta} \to 0 \quad (\varepsilon, \delta \to +0)$$

とする。すると

$$\begin{aligned}A_1 &= a^{-t}(a-b)\left(1-\frac{t}{a}\varepsilon-\frac{1}{a-b}\delta+\frac{b^p}{a-b}\varepsilon+o\right)\\ A_2 &= b^{p-t}(a-b)\left(1-\frac{t}{b}\delta-\frac{1}{a-b}\delta+\frac{1}{b^p(a-b)}\varepsilon+o\right)\\ A_3^2 &= a^{-t}b^{-t}(1-b^p)(a-b)\varepsilon\left(1-\frac{t}{a}\varepsilon-\frac{t}{b}\delta-\frac{1}{a-b}\delta+o\right)\\ \varepsilon_1 &= \frac{a^{-t}b^{-t}(1-b^p)^2}{a^{-t}-b^{p-t}}\varepsilon\left(1+\frac{o}{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

である。また

$$A_1 - A_2 + 2\varepsilon_1 = (a-b)(a^{-t} - b^{p-t})(1 + c_1\varepsilon + c_2\delta + o)$$

$$c_1 = \frac{1}{(a-b)(a^{-t} - b^{p-t})}\left(\frac{-t(a-b)a^{-t}}{a} + a^{-t}b^p - b^{-t} + \frac{2a^{-t}b^{-t}(1-b^p)^2}{a^{-t} - b^{p-t}}\right)$$

$$c_2 = \frac{1}{(a-b)(a^{-t} - b^{p-t})}\left(-a^{-t} + \frac{t(a-b)b^{p-t}}{b} + b^{p-t}\right)$$

$$\tilde{\gamma} = (a-b)^{s\alpha+\alpha}(a^{-t} - b^{p-t})^{\alpha}\left(1 + \frac{s\alpha}{a-b}\varepsilon - \frac{s\alpha}{a-b}\delta + \alpha c_1\varepsilon + \alpha c_2\delta + o\right)$$

$$A_1 - A_2 + \varepsilon_1 = (a-b)(a^{-t} - b^{p-t})(1 + c_3\varepsilon + c_4\delta + o)$$

$$c_3 = c_1 - \frac{a^{-t}b^{-t}(1-b^p)^2}{(a-b)(a^{-t} - b^{p-t})^2}$$

$$c_4 = c_2$$

となるので

$$B_1 = a^{r-st}(a-b)^{1+s}(a^{-t} - b^{p-t})\left(1 + \frac{r-st}{a}\varepsilon + c_3\varepsilon + c_4\delta - \frac{s}{a-b}\delta + \frac{sb^p}{a-b}\varepsilon + \frac{sb^{-t}(1-b^p)^2}{(a-b)(a^{-t} - b^{p-t})}\varepsilon + \frac{a^{st-t}b^{-t+sp-st}(1-b^p)^2}{(a-b)(a^{-t} - b^{p-t})^2}\varepsilon + o\right)$$

$$B_2 = b^{r+sp-st}(a-b)^{1+s}(a^{-t} - b^{p-t})\left(1 + \frac{r-st}{b}\delta + c_3\varepsilon + c_4\delta - \frac{s}{a-b}\delta + \frac{s}{b^p(a-b)}\varepsilon + \frac{a^{-st-t}b^{-t-sp+st}(1-b^p)^2}{(a-b)(a^{-t} - b^{p-t})^2}\varepsilon - \frac{sa^{-t}(1-b^p)^2}{b^p(a-b)(a^{-t} - b^{p-t})}\varepsilon + o\right)$$

$$B_3^2 = a^{r-t}b^{r-t}(a-b)^{1+2s}(a^{-st} - b^{sp-st})^2(1-b^p)^2\varepsilon\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a^{r-t}b^{r-t}(a-b)^s(a^{-st} - b^{sp-st})^2(1-b^p)^2}{(a^{-t} - b^{p-t})(a^{r-st} - b^{r+sp-st})}\varepsilon\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right)$$

$$\tilde{\gamma}(b+\delta)^{\tilde{\alpha}} - (B_2 - \varepsilon_2)^{\alpha} = b^{\alpha(r+sp-st)}(a-b)^{\alpha(1+s)}(a^{-t} - b^{p-t})^{\alpha}\varepsilon\left(c_5 + \frac{\alpha(r+sp)}{b}\frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{o}{\varepsilon}\right)$$

$$c_5 = -\frac{\alpha s(1-b^p)(a^{-t} - b^{-t})}{(a-b)(a^{-t} - b^{p-t})} - \frac{\alpha s a^{-t}b^{-t}(1-b^p)^2(a^r - b^r)(a^{-st} - b^{sp-st})}{(a-b)(a^{-t} - b^{p-t})^2(a^{r-st} - b^{r+sp-st})}$$

$$\tilde{\gamma}(a+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}} - (B_2 - \varepsilon_2)^{\alpha} = (a^{\alpha(r+sp-st)} - b^{\alpha(r+sp-st)})(a-b)^{\alpha(1+s)}(a^{-t} - b^{p-t})^{\alpha}\left(1 + \frac{o}{\varepsilon}\right)$$

$$\tilde{\gamma}(b+\delta)^{\tilde{\alpha}}-(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha}=-(a^{\alpha(r-st)}-b^{\alpha(r+sp-st)})(a-b)^{\alpha(1+s)}(a^{-t}-b^{p-t})^{\alpha}\left(1+\frac{o}{\varepsilon}\right)$$

$$B_1+B_2+\varepsilon_2=(a-b)^{1+s}(a^{-t}-b^{p-t})(a^{r-st}-b^{r+sp-st})\left(1+\frac{o}{\varepsilon}\right)$$

$$\tilde{\gamma}(a+\varepsilon)^{\tilde{\alpha}}-(B_1+\varepsilon_2)^{\alpha}=a^{\alpha(r-st)}(a^{\alpha sp}-1)(a-b)^{\alpha(1+s)}(a^{-t}-b^{p-t})^{\alpha}\left(1+\frac{o}{\varepsilon}\right)$$

が得られる。よって (1.14) より

$$\begin{aligned}&(a^{-st}-b^{sp-st})^2(a^{\alpha(r+sp-st)}-b^{\alpha(r+sp-st)})(a^{\alpha(r-st)}-b^{\alpha(r+sp-st)})(1-b^p)^2\\&\le a^{\alpha(r-st)+t-r}b^{\alpha(r+sp-st)+t-r}(a-b)(a^{-t}-b^{p-t})^2(a^{r-st}-b^{r+sp-st})^2(a^{\alpha sp}-1)\\&\quad\times\left(c_5+\frac{\alpha(r+sp)}{b}\frac{\delta}{\varepsilon}+\frac{o}{\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

となる。この式を見ると $\dfrac{\delta}{\varepsilon}$ が小さい方が矛盾が出やすいように見えるので

$$\frac{1-b}{a-1+\varepsilon}\le\frac{\delta}{\varepsilon}$$

に注意して

$$\frac{1-b}{a-1}=\frac{\delta}{\varepsilon},\ \delta=\frac{1-b}{a-1}\varepsilon$$

とおくことにする。こうして

$$\varepsilon\to+0$$

とすると

$$\begin{aligned}&(a-1)(a^{-st}-b^{sp-st})^2(1-b^p)^2(a^{\alpha(r+sp-st)}-b^{\alpha(r+sp-st)})(a^{\alpha(r-st)}-b^{\alpha(r+sp-st)})\\&\le a^{\alpha(r-st)+t-r}b^{\alpha(r+sp-st)-1+t-r}(a^{r-st}-b^{r+sp-st})(a^{\alpha sp}-1)\\&\times\{-\alpha sb(1-b^p)(a^{-t}-b^{-t})(a^{-t}-b^{p-t})(a^{r-st}-b^{r+sp-st})(a-1)\\&\qquad-\alpha sa^{-t}b^{1-t}(1-b^p)^2(a^r-b^r)(a^{-st}-b^{sp-st})(a-1)\\&\qquad+\alpha(r+sp)(1-b)(a-b)(a^{-t}-b^{p-t})^2(a^{r-st}-b^{r+sp-st})\}\end{aligned}$$

が得られる。もし

$$\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}<\alpha$$

なら

$$0<\alpha(r+sp-st)-1+t-r$$

なので $b\to+0$ として

$$0<(a-1)a^{-2st+\alpha(2r+sp-2st)}\le 0$$

となって矛盾である。

[ 2. log- majorization に関する注意 ]

$A, B$ はヒルベルト空間上の有界線形作用素とする。さて $O \leq A-B$ で $A-B$ が可逆のとき $B < A$ とかくことにする。最近藤井氏 ([2]) が可逆な正作用素 $A, B$ に対して

$$\log B < \log A \Longleftrightarrow \exists \alpha \in (0,1) : B^{\alpha} < A^{\alpha} \tag{2.1}$$

を証明した。この結果は古田不等式と安藤、日合、藤井ら ([1]) による不等式を結びつける面白い結果であることを説明しよう。

$p, q, r$ を正の実数とする。古田不等式は $O \leq B \leq A$ である作用素に対して

$$1 \leq q, p+2r \leq q(1+2r) \Longrightarrow (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}$$

という不等式であった。また安藤、日合、藤井ら ([1]) による不等式は可逆な正作用素 $A, B$ が $\log B \leq \log A$ を満たすならば

$$p+2r \leq 2qr \Longrightarrow (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}$$

という不等式であった。

さて $\alpha$ を正の実数として $O \leq B^{\alpha} \leq A^{\alpha}$ と仮定しよう。このとき古田不等式から

$$1 \leq q, p+2r \leq q(1+2r)$$

ならば

$$(A^{r\alpha} B^{p\alpha} A^{r\alpha})^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p\alpha+2r\alpha}{q}}$$

となるが、ここで改めて

$$\tilde{r} = r\alpha, \tilde{p} = p\alpha, \tilde{q} = q$$

とおけばこの結果は

$$1 \leq \tilde{q}, \tilde{p}+2\tilde{r} \leq \tilde{q}(\alpha+2\tilde{r}) \Longrightarrow \left(A^{\tilde{r}} B^{\tilde{p}} A^{\tilde{r}}\right)^{\frac{1}{\tilde{q}}} \leq A^{\frac{\tilde{p}+2\tilde{r}}{\tilde{q}}}$$

と書き直すことができる。つまり作用素 $A, B$ が $O \leq B^{\alpha} \leq A^{\alpha}$ とするとき

$$1 \leq q, p+2r \leq q(\alpha+2r) \Longrightarrow (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}$$

が成立する。またこの範囲の best possibility も同じように分かるわけでちょうど $\alpha = 1$ が古田不等式になっている。

このように見ていくと安藤、日合、藤井らの不等式は作用素 $A, B$ が $\log B \leq \log A$ ならば $(A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+2r}{q}}$ を満たす正数 $p, q, r$ の範囲は

$$p+2r \leq 2qr$$

となることを示しているわけである。

さて藤井の結果を用いると安藤、日合、藤井らの不等式は古田不等式からでてくる。なぜなら可逆な正作用素 $A, B$ が $\log B < \log A$ を満たしているとしよう。このとき藤井の結果から

$$\exists\alpha \in (0,1) : B^\alpha \le A^\alpha$$

となる。従って

$$1 \le q, p+2r \le q(\alpha+2r) \Longrightarrow (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \le A^{\frac{p+2r}{q}}$$

となるのでもちろん

$$p+2r \le 2qr \Longrightarrow (A^r B^p A^r)^{\frac{1}{q}} \le A^{\frac{p+2r}{q}}$$

が成立している。$\log B \le \log A$ のときは小さな正数 $0 < \varepsilon$ をとって

$$\log B < \log A + \varepsilon = \log(e^\varepsilon A)$$

としてでてくる不等式

$$p+2r \le 2qr \Longrightarrow ((e^\varepsilon A)^r B^p (e^\varepsilon A)^r)^{\frac{1}{q}} \le (e^\varepsilon A)^{\frac{p+2r}{q}}$$

で$\varepsilon \to +0$ として目的の安藤、日合、藤井らの不等式が得られる。

従って藤井の結果は今までの理論に新しい視点をもたらす面白い結果であると思われる。さてここでは藤井の結果から当然予想される次の式

$$\log B \le \log A \Longleftrightarrow \exists\alpha \in (0,1) : B^\alpha \le A^\alpha \tag{2.2}$$

を考える。藤井氏の予想ではこの式は成立しないとのことだったが、確かに成立しない反例を次に与えよう。

[ 反例 2.1 ]

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} > O, \log B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \log A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とおく。このとき

$$\log A - \log B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

の固有方程式は

$$\Delta_{\log A - \log B}(t) = t^2 - \frac{5}{2}t = 0$$

なので

$$O \leq \log A - \log B,\ O \not\geq \log A - \log B$$

である。ここで

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とおくと $U$ はユニタリで

$$U^* (\log A) U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。従って

$$A = Ue^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}} U^* = U \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} U$$

$$\begin{aligned} A^\alpha &= U \begin{pmatrix} e^{2\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\alpha} \end{pmatrix} U \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{2\alpha} + 2e^{-\frac{\alpha}{2}} & \sqrt{6}e^{2\alpha} - \sqrt{6}e^{-\frac{\alpha}{2}} \\ \sqrt{6}e^{2\alpha} - \sqrt{6}e^{-\frac{\alpha}{2}} & 2e^{2\alpha} + 3e^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。さて

$$B^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

なので $A^\alpha - B^\alpha$ の行列式を $\alpha$ でテーラー展開すると

$$\begin{aligned} |A^\alpha - B^\alpha| &= \begin{vmatrix} \dfrac{3e^{2\alpha} + 2e^{-\frac{\alpha}{2}}}{5} - 1 & \dfrac{\sqrt{6}e^{2\alpha} - \sqrt{6}e^{-\frac{\alpha}{2}}}{5} \\ \dfrac{\sqrt{6}e^{2\alpha} - \sqrt{6}e^{-\frac{\alpha}{2}}}{5} & \dfrac{2e^{2\alpha} + 3e^{-\frac{\alpha}{2}}}{5} - e^{-\alpha} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{2}{5}e^{2\alpha} + e^{\frac{3}{2}\alpha} - \frac{3}{5}e^{\alpha} - \frac{3}{5}e^{-\frac{1}{2}\alpha} + e^{-\alpha} - \frac{2}{5}e^{-\frac{3}{2}\alpha} \\ &= -\frac{1}{8}\alpha^4 + \cdots \end{aligned}$$

となる。もし $B^{\alpha_0} \leq A^{\alpha_0}$ となる $0 < \alpha_0$ が存在するならハインツの不等式から $0 < \alpha \leq \alpha_0$ であるすべての $\alpha$ に対して $B^\alpha \leq A^\alpha$ 、よって $0 \leq |A^\alpha - B^\alpha|$ となるはずである。しかし上の式から $0 < \alpha$ が十分小さいとき

$$|A^\alpha - B^\alpha| < 0$$

であるからこれは矛盾である。よってこの $A, B$ に対しては $B^{\alpha_0} \leq A^{\alpha_0}$ となる $0 < \alpha_0$ は存在しない。

次にいつ (2,2) が成立するか考えよう。 (2.1) から $\log B < \log A$ のときは $\exists\alpha > 0 : B^\alpha < A^\alpha$ なので、$\log B \leq \log A, \log B \not< \log A$ の場合が問題になるが、面白いことに 2 行 2 列の場合には $AB = BA$ が $\exists\alpha > 0 : B^\alpha \leq A^\alpha$ となる必要十分条件であることが示せる。

[ 定理 2.2 ] $A, B$ は 2 行 2 列の可逆な正行列で $\log B \leq \log A$ であるが $\log B < \log A$ は満たさないとする。このとき次が成り立つ。

$$\exists\alpha > 0 : B^\alpha \leq A^\alpha \Longleftrightarrow AB = BA$$

[ 証明 ] $(\Longrightarrow)$ を示せばよい。$B^\alpha \leq A^{\alpha_0}$ となる $0 < \alpha_0$ が存在するとしよう。するとハインツの不等式から $0 < \alpha \leq \alpha_0$ であるすべての $\alpha$ に対して $B^\alpha \leq A^\alpha$ が成り立つ。さて $A, B$ を $kA, kB \quad (0 < k)$ でおきかえても

$$\log B \leq \log A, \log B < \log A, B^\alpha \leq A^\alpha, AB = BA$$

の条件は同じなので

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-b} \end{pmatrix}, 0 \leq b, \log A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

とおいて一般性を失わない。ここで $b = 0$ なら $B = I$ となって $AB = BA$ となるので $0 < b$ としてよい。

さて $\log A$ の固有方程式は

$$\Delta_{\log A}(t) = t^2 - (a_1 + a_2)t + a_1 a_2 - a_3^2 = 0$$

なので $\log A$ の固有値は

$$a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon \ (0 \leq \varepsilon)$$

とおける。ここで $\varepsilon = 0$ なら $a_3 = 0$ 、よって $\log A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ であるから $\log A$ は $B$ と可換、よって $A$ は $B$ と可換になる。従って $0 < \varepsilon, 0 \neq a_3$ としてよい。

さてこのとき

$$(a_1 + \varepsilon)(a_2 - \varepsilon) = a_1 a_2 - a_3^2$$

よって

$$a_3^2 = \varepsilon(\varepsilon + a_1 - a_2)$$

である。また

$$O \leq \log A - \log B = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 + b \end{pmatrix}$$

の固有方程式は

$$\Delta_{\log A - \log B}(t) = t^2 - (a_1 + a_2 + b)t + a_1(a_2 + b) - a_3^2 = 0$$

なので $\log B \leq \log A, \log B \not\leq \log A$ より

$$0 \leq a_1 + a_2 + b, a_3^2 = a_1(a_2 + b)$$

となる。よって

$$0 < a_1, 0 < a_2 + b$$

である。ここで

$$0 < a = a_1, 0 < \delta = a_2 + b$$

とおくと $a_3^2 = \varepsilon(\varepsilon + a_1 - a_2) = a_1(a_2 + b)$ より

$$\delta = \frac{(a + b + \varepsilon)\varepsilon}{a + \varepsilon}$$

である。さて

$$\log A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\varepsilon}\sqrt{a + b + \varepsilon - \delta} \\ \sqrt{\varepsilon}\sqrt{a + b + \varepsilon - \delta} & \delta - b \end{pmatrix}$$

をユニタリ行列

$$V = \frac{1}{\sqrt{a + b + 2\varepsilon - \delta}} \begin{pmatrix} \sqrt{a + b + \varepsilon - \delta} & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & -\sqrt{a + b + \varepsilon - \delta} \end{pmatrix}$$

で対角化すると

$$V^* (\log A) V = \begin{pmatrix} a + \varepsilon & 0 \\ 0 & \delta - b - \varepsilon \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned}
&A^\alpha \\
&= V \begin{pmatrix} e^{\alpha(a+\varepsilon)} & 0 \\ 0 & e^{\alpha(\delta - b - \varepsilon)} \end{pmatrix} V^* \\
&= \frac{1}{a + b + 2\varepsilon - \delta} \\
&\times \begin{pmatrix} (a + b + \varepsilon - \delta)e^{\alpha(a+\varepsilon)} + \varepsilon e^{\alpha(\delta - b - \varepsilon)} & \sqrt{\varepsilon}\sqrt{a + b + \varepsilon - \delta}\left(e^{\alpha(a+\varepsilon)} - e^{\alpha(\delta - b - \varepsilon)}\right) \\ \sqrt{\varepsilon}\sqrt{a + b + \varepsilon - \delta}\left(e^{\alpha(a+\varepsilon)} - e^{\alpha(\delta - b - \varepsilon)}\right) & \varepsilon e^{\alpha(a+\varepsilon)} + (a + b + \varepsilon - \delta)e^{\alpha(\delta - b - \varepsilon)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$B^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

なので $A^\alpha - B^\alpha$ の行列式を $\alpha$ でテーラー展開すると

$$|A^\alpha - B^\alpha| = -\frac{1}{12} b(a + b + 2\varepsilon - \delta)(a + b + \varepsilon - \delta)(a + \varepsilon)(\delta - \varepsilon)\alpha^4 + \cdots$$

となる。ここで

$$0 < b, 0 < \varepsilon, 0 < a + b + \varepsilon - \delta, 0 < \delta - \varepsilon = \frac{b\varepsilon}{a + \varepsilon}$$

であるがこれは反例 (2.1) の時と同じ議論で $O \leq A^\alpha - B^\alpha$ に反する。

[ 文献 ]

[ 1 ] M. Fujii, T. Furuta and E. Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, Linear Alg. and Its Appl, 179 (1993) , 161- 169.

[ 2 ] M. Fujii, Jian Fei Jiang, E. Kamei and K Tanahashi, A Characterization of chaotic order and a problem , ( preprint )

[ 3 ] T. Furuta , $A \geq B \geq O$ assures $(B^r A^p B^r)^{\frac{1}{q}} \geq B^{\frac{p+2r}{q}}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1 + 2r)q \geq (p + 2r)$ , jour Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987) 85-88.

[ 4 ] T. Furuta , Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Alg. and its Appl. 219 (1995) 139-155.

[ 5 ] E. Heinz , Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, Math. Ann. 123 (1951) 415-438.

[ 6 ] K. Löwner, Über monotone Matrixfunktionen, Math. Z. 38 ( 1934) 177-216.

[ 7 ] K. Tanahashi, Best possibility of the Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996) 141-146.