数理解析研究所講究録
984巻 1997年 114-122

Hopf bifurcation for delayed equation of van der Pol type

徳島大総合科　村上公一 (Kouichi Murakami)
大阪府立大工　原　惟行 (Tadayuki Hara)

1 はじめに

本稿では、次の時間遅れのある微分方程式についての結果を報告する。

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x'(t) & = & y(t-\tau) - F(x(t-\tau)) \\
y'(t) & = & -x(t-\tau)
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

ただし、$F(x) = ax + bx^3$ とし、$\tau > 0$ とする。

方程式 (1) は $\tau = 0$ のとき自励振動で知られた van der Pol 方程式となり、適当な条件（例えば $F(x) = -x + \frac{1}{3}x^3$）の下で唯一つの周期解が存在することが分かっている。ここでは、時間遅れの影響がある場合について、解の漸近挙動がどのようになるかを考える。特に、Hopf 分岐による周期解の発生に着目し、

(i) 周期解の存在条件と安定性（定性的結果）

(ii) 周期解の振幅と周期（定量的結果）

を得ることを目標とする。

2 準備

方程式 (1) において、

$$
z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g(z) = \begin{pmatrix} -bx^3 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

とおくと、

$$
z'(t) = Az(t-\tau) + g(z(t-\tau))
$$

となる。いま、$C = C([-\tau, 0], R^2)$ とし、解 $z(t)$ に対して $z_t(s) = z(t+s), -\tau \leq s \leq 0$ により $z_t \in C$ を定義する。そして、

$$
Dz_t = z_t(0) = z(t), \qquad Lz_t = Az(t-\tau), \qquad f(z_t) = g(z(t-\tau))
$$

により、作用素 $D : C \to R^2$、$L : C \to R^2$、及び $f : C \to R^2$ を定義する。これにより、C上で定義された微分方程式

$$
\frac{d}{dt} Dz_t = Lz_t + f(z_t)
$$

が得られる。

ここで、線形化方程式の特性方程式

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = D(e^{\lambda \cdot}) - L(e^{\lambda \cdot}) \tag{2}$$

の根について考える。いま、(2) が一対の simple な純虚数根 $\pm i\omega$ を持ち、その他の根はすべて実部負であると仮定する。このとき、関数空間 C は $\pm i\omega$ に属する一般化固有空間 N により、

$$C = N \oplus S$$

と分解できる。さらに、Nと原点で接する有限次元の中心多様体 $W^c_{loc}(0)$ が存在し、解はその中心多様体に近づく。中心多様体は不変集合で、その上の解は常微分方程式で記述される。

一般化固有空間 Nの基底を Φ、対応する adjoint 方程式の解の基底を Ψ とする。ただし、Ψ は双線形形式について正規化されているとする。そして、解は $z_t = \Phi u + x^S_t$, $u \in R^2$ と表されるとする。このとき、中心多様体は、ある関数 $h(u) : R^2 \to S$ によって、

$$W^c_{loc}(0) = \{\phi \in C : \phi = \Phi u + h(u),\ |u| \leq \eta\}$$

と表される。また、中心多様体上の常微分方程式は、

$$u' = Bu + \Psi(0) f(\Phi u + h(u)) \tag{3}$$

$$\text{ただし、} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

方程式がパラメタを含み、パラメタ変化によって特性方程式 (2) の根 $\pm i\omega$ が虚軸を横切る場合、Hopf 分岐が起きて周期解が発生することが知られている。この Hopf 分岐による周期解は、中心多様体上の常微分方程式 (3) を Poincare の標準形に変換することにより調べることができる。

3 結果

3.1 特性方程式の根について

方程式 (1) に対する特性方程式

$$\det(\lambda I - Ae^{-\lambda\tau}) = 0, \quad A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

について、以下の結果を得た。

Lemma 1 特性方程式 (4) の根を考える。

(i) $2\sin\tau < a < \dfrac{\pi}{2\tau} + \dfrac{2\tau}{\pi}$ かつ $0 < \tau < \dfrac{\pi}{2}$ ならば、(4) の根はすべて実部負である。

(ii) $a = 2\sin\tau$ かつ $0 < \tau < \dfrac{\pi}{2}$ ならば、(4) は一対の simple な純虚数根 $\pm i\omega$ を持ち、その他の根はすべて実部負である。ただし、$\omega = 1$ とする。

(iii) $a = \dfrac{\pi}{2\tau} + \dfrac{2\tau}{\pi}$ かつ $0 < \tau < \dfrac{\pi}{2}$ ならば、(4) は一対の simple な純虚数根 $\pm i\omega$ を持ち、その他の根はすべて実部負である。ただし、$\omega = \dfrac{\pi}{2\tau}$ とする。

証明には、文献 [4] の結果を利用する。

3.2 $a = 2\sin\tau$ の場合

$a = 2\sin\tau$ の場合を考える。中心多様体上の常微分方程式は、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \frac{b\sec\tau}{1+\tau^2}\begin{pmatrix} \tau u_2^3 \\ u_2^3 \end{pmatrix} + O(|u|^4)$$

となる。ただし、$\omega = 1$ とする。さらに、パラメタ μ を導入して $a = 2\sin\tau + \mu$ とし、Poincare の標準形に変換すると、

$$\begin{cases} r' &= \alpha\mu\, r + \beta\, r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5) \\ \theta' &= \omega + O(\mu, r^2) \end{cases}$$

$$\text{ただし、}\quad \alpha = \frac{-\sec\tau}{2(1+\tau^2)} < 0, \qquad \beta = \frac{-3b\sec\tau}{8(1+\tau^2)}\begin{cases} < 0 & (b > 0) \\ > 0 & (b < 0) \end{cases}$$

となる。ここで、r の方程式について以下が成立する。

- $\alpha < 0$ より、原点は $\mu > 0$ で安定、$\mu < 0$ で不安定となる。
- $b > 0$ ならば $\beta < 0$ となり、分岐の方向は $\mu < 0$ で周期解は安定となる。
- $b < 0$ ならば $\beta > 0$ となり、分岐の方向は $\mu > 0$ で周期解は不安定となる。

以上より、次の結果が得られた。

Theorem 1 μ は十分小さいとし、$a = 2\sin\tau + \mu$ かつ $0 < \tau < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(i) $b > 0$ ならば、$\mu < 0$ のとき安定周期解が存在する。

(ii) $b < 0$ ならば、$\mu > 0$ のとき不安定周期解が存在する。

このとき、周期解は $p(t) \approx \sqrt{-\dfrac{4\mu}{3b}}\begin{pmatrix} \sin(t+\tau) \\ \cos t \end{pmatrix}$ と近似できる。

Example 1 (1) のパラメタを、Theorem 1 (i) の条件を満たすように、以下のように設定する。

$$a = 2\sin\tau + \mu, \quad \tau = 0.5, \quad b = 0.2, \quad \mu = -0.1$$

このとき、初期関数 $\phi(t) = (t, \cos 4\pi t)^T$ に対する近似解は図 1のようになる。また、Theorem 1 により近似周期解を求めると図 2のようになる。図 1・2より、解が Theorem 1 の周期解に近づいていることが分かる。

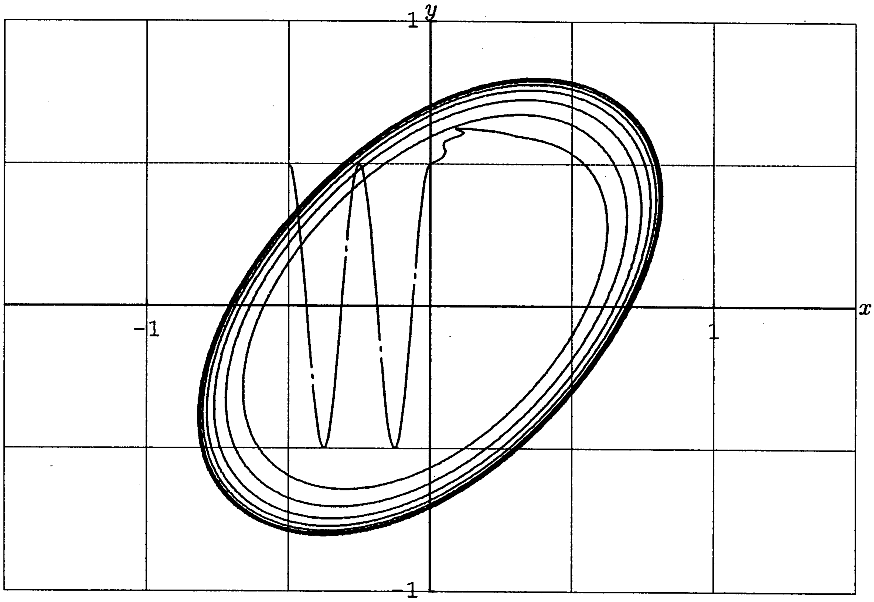

図 1: 例 1 の解軌道

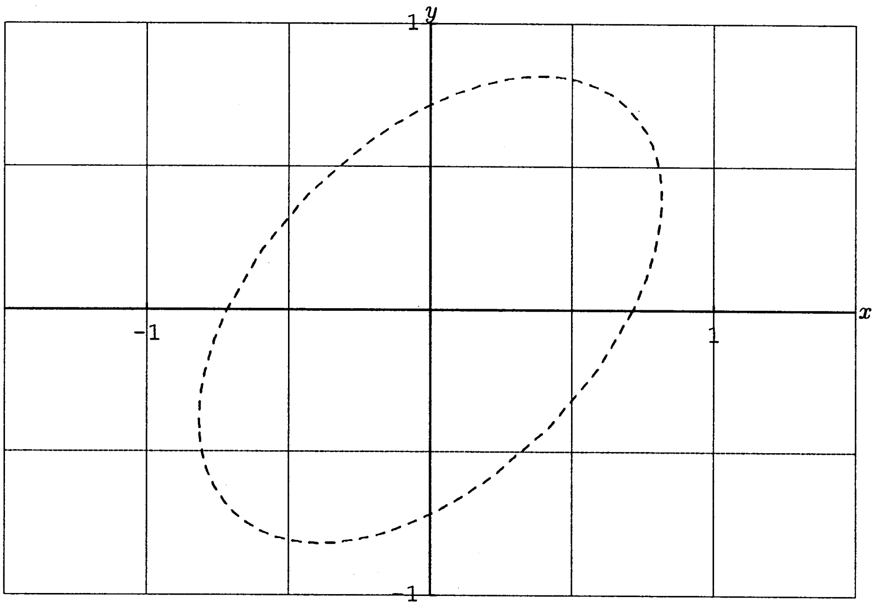

図 2: Theorem 1 による例 1 の近似周期解

3.3 $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi}$ の場合

$a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi}$ の場合を考える。中心多様体上の常微分方程式は、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{4\pi^2 b}{(4+\pi^2)(\pi^2-4\tau^2)}\begin{pmatrix} -2u_2^3 \\ \pi u_2^3 \end{pmatrix} + O(|u|^4)$$

となる。ただし、$\omega = \frac{\pi}{2\tau}$ とする。さらに、パラメタ μ を導入して $a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + \mu$ とし、Poincare の標準形に変換すると、

$$\begin{cases} r' &= \alpha\mu\, r + \beta\, r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5) \\ \theta' &= \omega + O(\mu, r^2) \end{cases}$$

ただし、 $\alpha = \frac{2\pi^3}{(4+\pi^2)(\pi^2-4\tau^2)} > 0,\qquad \beta = \frac{3\pi^3 b}{2(4+\pi^2)(\pi^2-4\tau^2)}\begin{cases} >0 & (b>0) \\ <0 & (b<0) \end{cases}$

となる。ここで、r の方程式について以下が成立する。

- $\alpha > 0$ より、原点は $\mu < 0$ で安定、$\mu > 0$ で不安定となる。
- $b > 0$ ならば $\beta > 0$ となり、分岐の方向は $\mu < 0$ で周期解は不安定となる。
- $b < 0$ ならば $\beta < 0$ となり、分岐の方向は $\mu > 0$ で周期解は安定となる。

以上より、次の結果が得られた。

Theorem 2 μ は十分小さいとし、$a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + \mu$ かつ $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ とする。

(i) $b > 0$ ならば、$\mu < 0$ のとき不安定周期解が存在する。

(ii) $b < 0$ ならば、$\mu > 0$ のとき安定周期解が存在する。

このとき、周期解は $p(t) \approx \sqrt{-\frac{4\mu}{3b}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2\tau}t \\ \frac{2\tau}{\pi}\cos\frac{\pi}{2\tau}t \end{pmatrix}$ と近似できる。

Example 2 (1) のパラメタを、Theorem 2 (ii) の条件を満たすように、以下のように設定する。

$$a = \frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi} + \mu, \quad \tau = 1, \quad b = -0.2, \quad \mu = 0.1$$

このとき、初期関数 $\phi(t) = (t, \cos 4\pi t)^T$ に対する近似解は図 3のようになる。また、Theorem 2 により近似周期解を求めると図 4のようになる。図 3・4より、解が Theorem 2 の周期解に近づいていることが分かる。

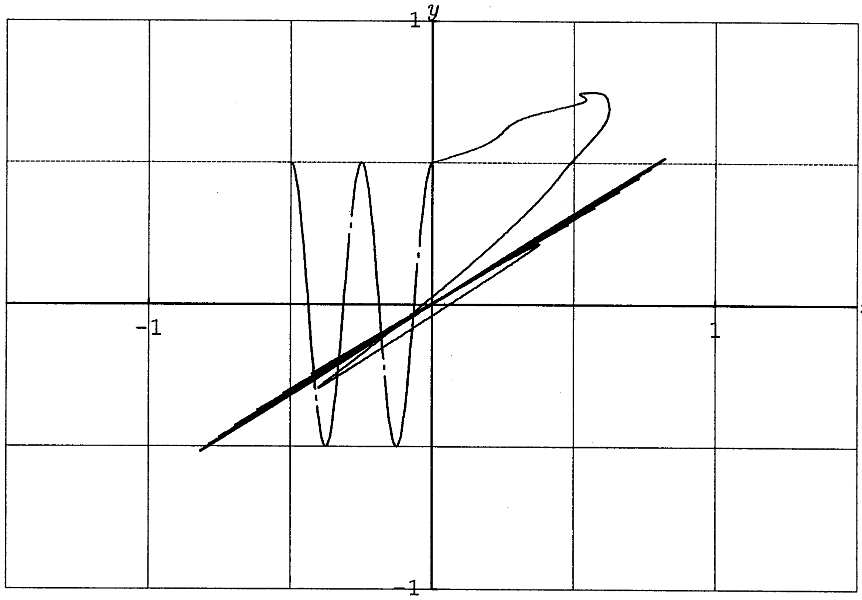

図 3: 例 2 の解軌道

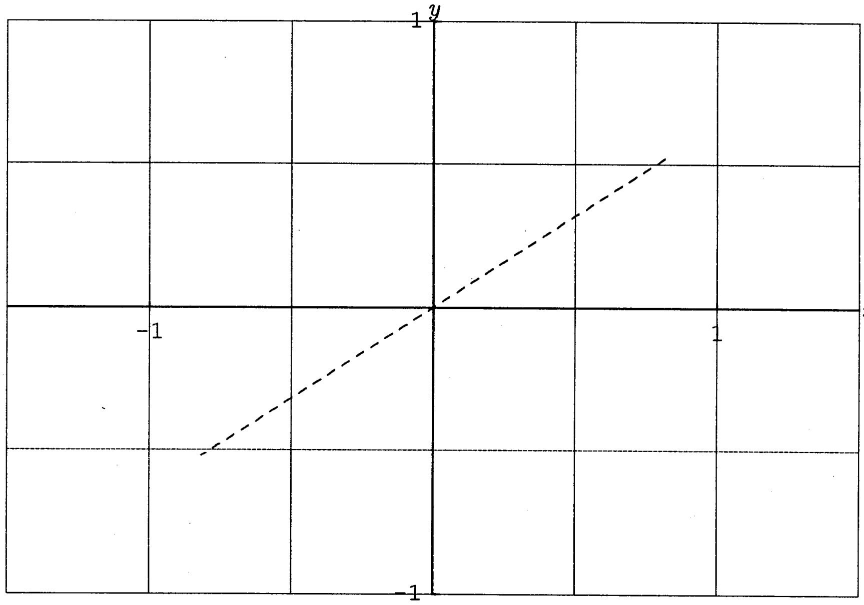

図 4: Theorem 2 による例 2 の近似周期解

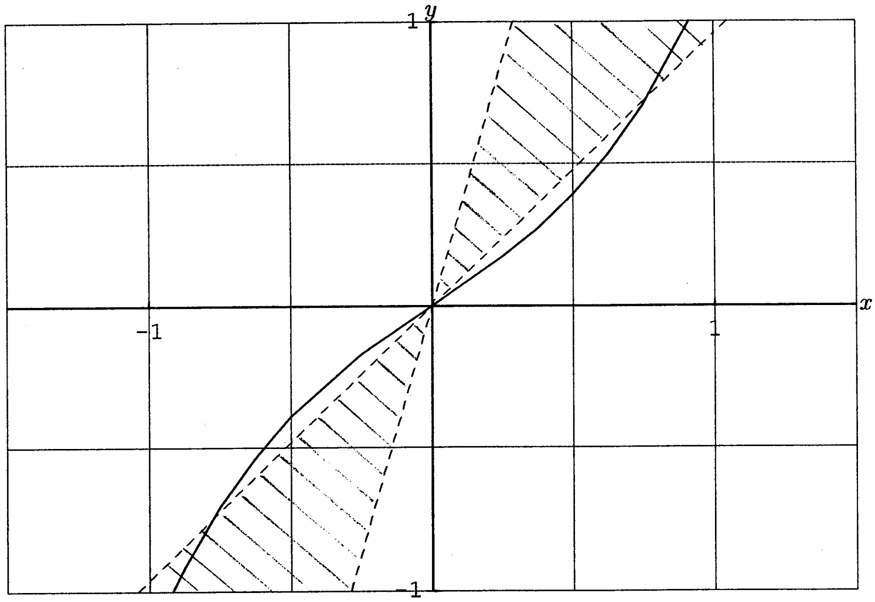

図 5: $F(x) = ax + bx^3$ ($a > 0$ かつ $b > 0$) のグラフ

4 考察

ここでは、時間遅れの影響をみるため、(1) の解の漸近挙動を $\tau = 0$ と $\tau > 0$ で比較してみる。

まず、(1) の $F(x) = ax + bx^3$ が図 5 のように $a > 0$ かつ $b > 0$ の場合を考える。$\tau = 0$ のときは周期解は存在しない。しかし、$\tau > 0$ ならば周期解が存在する場合があるということを Theorem 1・2 は示している。図 5の斜線部の境界は $y = (2\sin\tau)x$ と $y = (\frac{\pi}{2\tau} + \frac{2\tau}{\pi})x$ で、$F(x)$ は原点近傍で斜線部からはみ出し、$|x|$ が大きいところで斜線部内に入っている。ここで、もし $F(x)$ がすべて斜線部に含まれているならば、Lemma 1 より原点は漸近安定となる。しかし、図 5のような $F(x)$ では原点が局所不安定となるので、周期解が存在すると考えられる。$\tau = 0$ の場合は斜線部の境界が x 軸と y軸にまで広がり、$a > 0$ かつ $b > 0$ では原点は大域的に漸近安定となるので、周期解は存在しない。尚、$\tau > 0$ で存在する周期解は、一般に一意性は成立しないと考えられる。

次に、(1) の $F(x) = ax + bx^3$ が 図 6のように $a < 0$ かつ $b > 0$ の場合を考える。$\tau = 0$ のときは、唯一つの周期解が存在する。$\tau > 0$ のときにも周期解が存在すると予想していたが、数値シミュレーションでは図 7のような chaos 的な解軌道になった。この理由は、今のところ分からない。

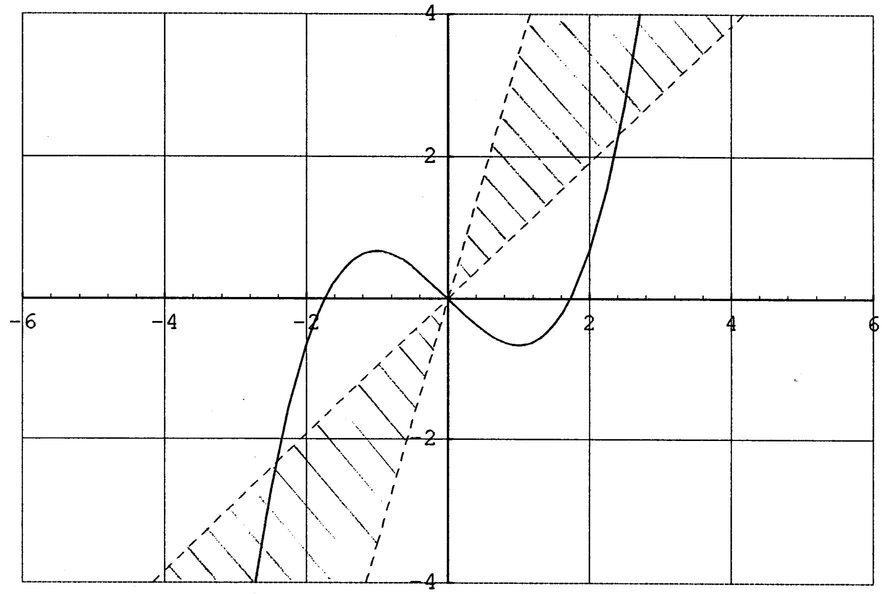

図 6: $F(x) = ax + bx^3$ ($a < 0$ かつ $b > 0$) のグラフ

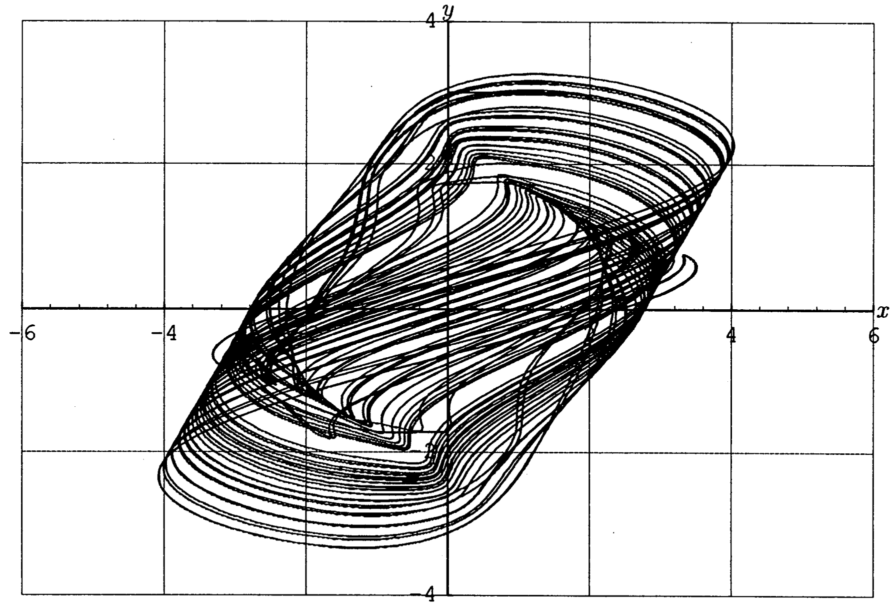

図 7: $F(x) = ax + bx^3$ ($a < 0$ かつ $b > 0$), $\tau > 0$ の場合の解軌道

参考文献

[1] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields,* Springer-Verlag (1983).

[2] J. Hale and S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations,* Springer-Verlag (1993).

[3] B.D. Hassard, N.D. Kazarinoff and Y.H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation,* Cambridge University Press (1981).

[4] K. Murakami, Stable Periodic Solutions for Two-dimensional Linear Delay Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.* (in press).

[5] G. Stépán, *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions,* Pitman (1989).

[6] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos,* Springer-Verlag (1990).