

近似計算による代数関数の実特異点の 検出について¹⁾

筑波大学大学院数学研究科 照井 章 (Akira Terui)
筑波大学数学系 佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki)

Abstract. 与えられた実係数の2変数多項式 $F(x, y)$ に対し、 $F(x, y) = 0$ の根として定まる代数関数の実特異点の検出には様々な方法が知られているが、厳密な計算を行う場合、計算効率の点で問題になることがある。本論では、近似計算を用いて、ある精度で実特異点を検出する方法を考察する。

1. はじめに

本論では与えられた既約な実係数の2変数多項式 $F(x, y)$ に対し、 $F(x, y) = 0$ の根として定まる代数関数の実平面上の特異点、すなわち実特異点を、近似計算を用いて検出することを考える。

代数関数の特異点の計算は数学や工学など様々な分野において重要である。特に、実平面上では孤立零点の検出が欠かせない。これまで、代数関数の特異点の計算には種々の算法が考え出され、いくつかは広く用いられているが、それらのほとんどは厳密計算を用いる。しかし、厳密計算を用いると、一般に計算の過程で代数的数の導入が必要になり、計算量が増大する。また、算法によっては、多項式の終結式や多項式系の Gröbner base を計算することによって計算量が増大するものもある。

計算量が増大する問題を解決する方法の一つとして、多項式の係数を浮動小数で近似し、浮動小数演算を行うことによって計算の効率化を図ることが考えられる。しかし、このような近似計算を行うと、計算結果には誤差が含まれるので、特異点が正しく計算されない心配がある。特に、孤立零点の検出が困難になる。

本論では、近似計算を用いて、誤差を考慮しながらある精度で代数関数の実特異点を計算する方法を述べる。1変数代数方程式の数値解法では、得られた近似根の誤差上界を厳密にかつかなりよい精度で見積もる方法(3. 参照)が知られており、特異点の計算の過程でその誤差を見積もりながら計算を行うことによって、ある精度での特異点を計算することができる。以下、2. では、実特異点を厳密計算を用いて検出する方法を述べ、3. では、実特異点を近似計算を用いて検出する方法を述べる。

¹⁾ 本研究は部分的に文部省科研費(課題番号 06558037: 近似代数計算システムの開発)および日本学術振興会・日中科学協力事業(課題: 近似的代数算法の研究と応用)の援助を受けた。

2. 実特異点の検出法

実多項式 $F(x, y)$ に対し、複素平面上の点 (\hat{x}, \hat{y}) が $F(\hat{x}, \hat{y}) = F_x(\hat{x}, \hat{y}) = F_y(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ を満たすとき、 (\hat{x}, \hat{y}) を F の特異点という。本論では実平面上の特異点、すなわち実特異点のみを考える。

実特異点は、以下の手順で計算する。

1. F と F_x の x に関する終結式 $\text{res}_x(F, F_x)$ を計算する。 $R(y) = \text{res}_x(F, F_x)$ とおく。
2. 方程式 $R(y) = 0$ の実根を計算する。得られた根を $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s$ とおく。
3. 各 \tilde{y}_i ($i = 1, \dots, s$) に対し、方程式 $F(x, \tilde{y}_i) = 0$ の実重根を計算する。得られた実重根を $\tilde{x}_{i,1}, \dots, \tilde{x}_{i,t_i}$ (ただし $\tilde{x}_{i,1} < \dots < \tilde{x}_{i,t_i}$ かつ t_i は値が異なる重根の個数)、各 $\tilde{x}_{i,j}$ の多重度を $m_{i,j}$ とする。
4. $F_y(x, y)$ を計算し、 $(\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_i)$ を代入して0になるかどうかを調べる。もし $F_y(\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_i) = 0$ ならば、 $(\tilde{x}_{i,j}, \tilde{y}_i)$ は実特異点である。

上の手順によって得られる実特異点の集合を $\{(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_i) \mid i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t_i\}$ とし、 $(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_i)$ の x に関する多重度を $m_{i,j}$ とする。

次に、孤立零点について説明する。例として、次の多項式 $F(x, y)$ を考える。

$$F(x, y) = x^5 - x^4 - y^2 \quad (1)$$

方程式 $F(x, y) = 0$ の実平面上の根として、 $y = \pm x^2 \sqrt{x-1}$ があるが、これらは実平面上の(原点を通らない)連続曲線である。一方、原点 $(0, 0)$ も $F(x, y) = 0$ の根であることがわかるが、この根は実平面上では孤立している。この例に見られるように、方程式 $F(x, y) = 0$ の根の中には時として、実平面上で連続曲線にならず、孤立した点となるものが現われるが、このような点を本論では孤立零点と呼ぶ。

孤立零点が特異点であることは、以下の命題によって示される。

命題 1 $F(x, y)$ の孤立零点 (\hat{x}, \hat{y}) は、 $F(x, y)$ の特異点である。

証明 $F(x, y)$ を実2変数関数 $z = F(x, y)$ として考える。 $F(x, y)$ は実多項式であるから、 $z = F(x, y)$ は実平面上で連続かつ微分可能な関数である。 (\hat{x}, \hat{y}) が孤立零点であるから、その点の近傍(ただし (\hat{x}, \hat{y}) 自身を除く)では $F(x, y) \neq 0$ でなければならない。したがって、 $z = F(x, y)$ は (\hat{x}, \hat{y}) において極値をとり、 $F_x(\hat{x}, \hat{y}) = F_y(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ が成り立つので、 (\hat{x}, \hat{y}) は特異点である。□

$F(x, y) = 0$ の根 $x = g(y)$ は y の代数関数で、複素 Riemann 面上では連続した一価曲線になる。ゆえに、 (\hat{x}, \hat{y}) は実平面上では孤立しているように見えるが、複素平面上では実平面を貫く連続曲線上の1点であり、 $x = g(y)$ は (\hat{x}, \hat{y}) の近傍で Taylor 級数もしくは Puiseux 級数に展開される。

$F(x, y)$ が式 (1) のとき、 $y = 0$ の近傍で $x = g(y)$ は次のように Puiseux 級数展開される。

$$x = g(y) = \begin{cases} 1 + y^2 - 4y^4 + 26y^6 + \dots \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)y^{1/2} \pm \frac{i}{4}y \pm \frac{7}{32\sqrt{2}}(-1+i)y^{3/2} + \dots \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)y^{1/2} \mp \frac{i}{4}y \pm \frac{7}{32\sqrt{2}}(-1-i)y^{3/2} + \dots \end{cases} \quad (2)$$

式 (2) の中の一番上の根は、(1, 0) が通常の零点であることを表す。一方、残りの 4 つの根は、原点 (0, 0) が特異点で、根が Puiseux 級数展開されたことを表す。このことから、これら 4 つの根 $x = g(y)$ は $y = 0$ のときのみ x が実数値をとり (すなわち (0, 0) は孤立零点)、かつ y が 0 に近づくにつれて x の虚部 $\text{Im } x$ も 0 に近づくことがわかる。

孤立零点は、引続き以下の手順で計算する。

5. 上の手順で計算される $F(x, y)$ の実特異点を $(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_i)$ ($i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t_i, \hat{y}_i < \hat{y}_{i+1}$) とする。
6. $F(x, y)$ が $(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_i)$ で極値をとるかどうかが調べる。もし $F(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_i)$ が $F(x, y)$ の極値ならば、 $(\hat{x}_{i,j}, \hat{y}_i)$ は孤立零点である。

3. 近似計算による実特異点の検出法

本章では、特異点を検出する際に必要な 1 変数多項式の根の近似値の計算に Durand-Kerner 法 [Dur60, Ker66] を用いる。また、Durand-Kerner 法で得られた根の近似値の誤差上界として Smith の誤差上界 [Smi70] が知られており、Durand-Kerner 法とともに広く用いられている。本章では、まず Durand-Kerner 法と Smith の誤差上界について簡単に説明し、次に、これらの算法を用いて実特異点を検出する方法を述べる。最後に、その方法に基づいて行った実験結果を示す。

3.1. DKA 法と Smith の誤差上界

Durand-Kerner 法 (以下 DK 法と略す) は、一般に複素係数の 1 変数多項式の根の近似値を同時に求める反復算法である。複素係数の 1 変数多項式 $P(z)$ を次式とする。

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad \text{ただし } a_0 \neq 0 \quad (3)$$

2 次 DK 法では、根の n 個の初期値 $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ を適当に与え、以下の反復式によって n 個の数値 $z_1^{(\nu)}, \dots, z_n^{(\nu)}$ を同時に求める。

$$z_i^{(\nu+1)} = z_i^{(\nu)} - \frac{P(z_i^{(\nu)})}{a_0 Q'(z_i^{(\nu)})}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

ただし $Q(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j^{(\nu)})$

このとき、 n 個の計算値 $z_1^{(\nu)}, \dots, z_n^{(\nu)}$ は方程式 $P(z) = 0$ の根に 2 次収束する。初期値 $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ としては、Aberth の初期値 [Abe73] を修正したものがよく使われている。DK 法と Aberth の初期値を合わせて DKA 法とも呼ばれる。

DKA 法で計算した近似値の、真の根からの誤差を見積もることは重要である。方程式 $P(z) = 0$ の根の存在範囲について、Smith による次の定理が知られている。

定理 2 複素平面上の n 個の異なる点を z_1, \dots, z_n とするとき、方程式 $P(z) = 0$ のすべての根は、中心 z_i , 半径

$$r_i = \frac{nP(z_i)}{a_0 \prod_{j \neq i} |z_i - z_j|} \quad (5)$$

の閉円盤 D_i の合併の中に存在する。さらに、 m 個の閉円盤が連結成分をなし、かつその他の閉円盤と連結でないならば、その連結成分の中に m 個の根が存在する。□

系 3 方程式 $P(z) = 0$ の根を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とし、それらに対する DKA 法の近似値をそれぞれ $z_1^{(\nu)}, \dots, z_n^{(\nu)}$ とする。 α_i が単根で上記円盤がすべて非連結のとき、 $z_i^{(\nu)}$ の誤差上界は次式で与えられる。

$$|z_i^{(\nu)} - \alpha_i| \leq n \left| \frac{P(z_i^{(\nu)})}{a_0 Q'(z_i^{(\nu)})} \right| \quad (6)$$

□

式 (6) の誤差上界は Smith の誤差上界と呼ばれる。式 (6) は DKA 法とは独立に求められるが、その右辺は式 (4) の「補正項」に比例するので、DKA 法で根の近似値を計算するときは Smith の誤差上界も効率的に計算することができる。

3.2. 近似計算による実特異点の検出法

以下では、 $F(x, y)$ の係数は整数または有理数で与えられているものとし、 $R(y) = \text{res}_x(F, F_x)$ も厳密計算で得られているものとする。

方程式 $R(y) = 0$ の根を DKA 法で計算した近似値は、一般に前章の $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s$ ではなく、 $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s$ ($\bar{y}_i = \tilde{y}_i + \delta\tilde{y}_i$, $0 \leq |\delta\tilde{y}_i| \ll 1$) となる。ゆえに、 \bar{y}_i を $F(x, y)$ に代入して得られる多項式 $F(x, \bar{y}_i)$ の係数も、 $F(x, \tilde{y}_i)$ の係数からの誤差を持つことになる。さらに、DKA 法で計算した方程式 $F(x, \bar{y}_i) = 0$ の根の近似値も、前章の $\tilde{x}_{i,1}, \dots, \tilde{x}_{i,t_i}$ ではなく、 $\bar{x}_{i,1}, \dots, \bar{x}_{i,t_i}$ ($\bar{x}_{i,j} = \tilde{x}_{i,j} + \delta\tilde{x}_{i,j}$, $0 \leq |\delta\tilde{x}_{i,j}| \ll 1$) となる。これに、重根もしくは近接根の存在による根の計算精度の低下が加わると、 $\bar{x}_{i,1}, \dots, \bar{x}_{i,t_i}$ は一般には重根として計算されないばかりか、微小な虚部を持つ場合も考えられ、実根かどうかの判定すら困難になる。

しかし、上の \bar{y}_i や $\bar{x}_{i,j}$ の真の根との誤差 $|\delta\tilde{y}_i|$ や $|\delta\tilde{x}_{i,j}|$ は大抵の場合において極めて小さいため、ある精度の下で点 $(\bar{x}_{i,j}, \bar{y}_i)$ が「近似的な」重根であると考えることができる。特にグラフ描画などの場合には、描画単位 (ピクセル) よりも細かな関数の振舞いを 1 つのピクセルで表すので、誤差がある精度より小さい近接根を近似的な重根とみなすのが妥当である。計算された根の近似値の、真の根との誤差上界は、Smith の誤差上界 (6) によって見積もることができる。

以上の要領で、「近似実重根」と「近似孤立零点」を以下のように定義する。なお、以下において、 $P(x)$ は n 次の実多項式であるとし、方程式の根の近似値 x_j とその誤差上界 δx_j はそれぞれ DKA 法と Smith の誤差上界によって計算されるものとする。

定義 1 (誤差近傍) 方程式 $P(x) = 0$ の根の近似値を x_1, \dots, x_n とし、誤差上界をそれぞれ $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ とする。このとき、 x_j の近傍 $B_j = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - x_j| \leq \delta x_j\}$ を x_j の誤差近傍という。

定義 2 (近似実重根) 方程式 $P(x) = 0$ の根の近似値を x_1, \dots, x_n とし、誤差上界をそれぞれ $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ とする。 x_j の誤差近傍をそれぞれ B_j とし、 m 個の近似値 x_1, \dots, x_m ($m \leq n$) が次の条件を満たしているとする。

1. B_1, \dots, B_m が連結であり、かつ他の B_j ($j > m$) とは連結でない。

2. $B_1 \cup \dots \cup B_m$ が実軸と交わる。

$B_1 \cup \dots \cup B_m$ を覆う最小の閉円盤を B 、その直径を δ_B とするとき、 x_1, \dots, x_m は解像度 δ_B の近似実 m 重根であるという。

定義 3 (近似孤立零点) $F(x, y)$ を実 2 変数多項式とする。方程式 $R(y) = \text{res}_x(F, F_x) = 0$ の実根の近似値の 1 つを \bar{y} とし、方程式 $F(x, \bar{y}) = 0$ に解像度 δ_B の近似実 m 重根 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ が存在するとする。 \bar{x}_j の誤差近傍を B_j とし、 $B_1 \cup \dots \cup B_m$ を含む最小の閉円盤を B とする。 B の外近傍に方程式 $F(x, y) = 0$ の実根が存在しないとき、点 $(\bar{x}_1, \bar{y}), \dots, (\bar{x}_m, \bar{y})$ は解像度 δ_B の近似孤立零点であるという。

以上の定義に基づいて、近似的な実特異点の候補となる近似実重根を次の手順で計算する。

1. F と F_x の x に関する終結式 $\text{res}_x(F, F_x)$ を計算する。 $R(y) = \text{res}_x(F, F_x)$ とおく。
2. 方程式 $R(y) = 0$ の実根を計算する。得られた近似値を $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_s$ (ただし $\bar{y}_1 < \dots < \bar{y}_s$) とし、誤差上界をそれぞれ $\delta\bar{y}_1, \dots, \delta\bar{y}_s$ とおく。
3. 各 \bar{y}_i ($i = 1, \dots, s$) に対し、方程式 $F(x, \bar{y}_i) = 0$ の近似実重根を次の手順で計算する。
 - (a) 方程式 $F(x, \bar{y}_i) = 0$ の根の近似値 $\bar{x}_{i,j}$ と誤差上界 $\delta\bar{x}_{i,j}$ を計算する。それらの中で、 $|\text{Im } \bar{x}_{i,j}| < |\delta\bar{x}_{i,j}|$ を満たすものを $\bar{x}_{i,1}, \dots, \bar{x}_{i,n_i}$ (ただし $\text{Re } \bar{x}_{i,1} \leq \dots \leq \text{Re } \bar{x}_{i,n_i}$) とし、誤差上界をそれぞれ $\delta\bar{x}_{i,1}, \dots, \delta\bar{x}_{i,n_i}$ とおく。
 - (b) $|\bar{x}_{i,j} - \bar{x}_{i,k}| < \min\{\delta\bar{x}_{i,j}, \delta\bar{x}_{i,k}\}$ ($1 \leq j < k \leq n_i$) を満たすような $\bar{x}_{i,j}, \bar{x}_{i,k}$ が存在すれば、それらは近似実重根である。

近似孤立零点は、引き続き次の手順で計算する。

4. $y = \bar{y}_i$ における近似実重根の一つを $\bar{x}_{i,1}, \dots, \bar{x}_{i,n_i}$ とし、誤差上界をそれぞれ $\delta\bar{x}_{i,1}, \dots, \delta\bar{x}_{i,n_i}$ とおく。 δ_i を、 $0 < \delta_i \ll \min\{|\bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i|, |\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1}|\}$ を満たすようにとる。
5. 方程式 $F(x, \bar{y}_i \pm \delta_i) = 0$ の根を計算する。方程式 $F(x, \bar{y}_i + \delta_i) = 0$ の根の近似値で $\bar{x}_{i,j}$ に一番近いものをそれぞれ $\bar{x}_{i,j}^+$ 、方程式 $F(x, \bar{y}_i - \delta_i) = 0$ の根の近似値で $\bar{x}_{i,j}$ に一番近いものをそれぞれ $\bar{x}_{i,j}^-$ ($j = 1, \dots, n_i$) とおく。また、これらの根の誤差上界をそれぞれ $\delta\bar{x}_{i,j}^\pm$ とおく。
6. $j = 1, \dots, n_i$ に対して、 $|\text{Im } \bar{x}_{i,j}^\pm| > |\delta\bar{x}_{i,j}^\pm|$ かつ $|\bar{x}_{i,j} - \bar{x}_{i,j}^\pm| > \delta\bar{x}_{i,j} + \delta\bar{x}_{i,j}^\pm$ ならば、点 $(\bar{x}_{i,1}, \bar{y}_i), \dots, (\bar{x}_{i,n_i}, \bar{y}_i)$ は近似孤立零点である。

3.3. 近似計算による実特異点の検出の実験例

本節では、上に述べた方法を用いて、実特異点を検出した実験例を示す。本節の実験には、数式処理システム GAL を用いた。また、浮動小数は倍精度で計算した。

例 1 $F(x, y) = 93392896/15625x^6 + (94359552/625y^2 + 91521024/625y - 249088/125)x^4 + (1032192/25y^4 - 36864y^3 - 7732224/25y^2 - 207360y + 770048/25)x^2 + (65536y^6 + 49152y^5 - 135168y^4 - 72704y^3 + 101376y^2 + 27648y - 27648)$.

上の $F(x, y)$ は、次の孤立零点を持つことに注意されたい。

$$(x, y) = \begin{cases} (\pm 35\sqrt{14}/351, -380/351) \\ (\pm 35\sqrt{14}/76, -41/76) \end{cases} \quad (7)$$

まず、 $R(y) = \text{res}_x(F, F_x)$ を計算し、方程式 $R(y) = 0$ の実根の近似値を計算した。以下では、方程式の根の近似値とその誤差上界の組を $(x, \delta x)$ と表す。方程式 $R(y) = 0$ の実根の近似値とその誤差上界 $(\bar{y}_i, \delta \bar{y}_i)$ は、表 1 の通りになった。

	近似値	誤差上界
$(\bar{y}_1, \delta \bar{y}_1)$	-1.0997150997151	$2.5547331799736 \times 10^{-16}$
$(\bar{y}_2, \delta \bar{y}_2)$	-1.0444457094896	$9.5301998485282 \times 10^{-14}$
$(\bar{y}_3, \delta \bar{y}_3)$	-1.0330821905909	$1.9335807554009 \times 10^{-13}$
$(\bar{y}_4, \delta \bar{y}_4)$	-1.0	$\leq 1.0 \times 10^{-16}$
$(\bar{y}_5, \delta \bar{y}_5)$	-0.53947368421053	$8.1919660819229 \times 10^{-16}$
$(\bar{y}_6, \delta \bar{y}_6)$	0.12196417637746	$1.2889410703248 \times 10^{-14}$
$(\bar{y}_7, \delta \bar{y}_7)$	0.75	$\leq 1.0 \times 10^{-16}$
$(\bar{y}_8, \delta \bar{y}_8)$	1.455563723703	$1.1633906536125 \times 10^{-13}$

Table 1. 方程式 $R(y) = 0$ の実根とその誤差上界

本稿では、 $y = \bar{y}_1$ における特異点のみを掲載する。方程式 $F(x, \bar{y}_1) = 0$ の根の近似値とその誤差上界 $(\bar{x}_{1,j}, \delta \bar{x}_{1,j})$ ($j = 1, \dots, 6$) は表 2 の通りになった。表 2 の結果の中で、 $\bar{x}_{1,3}$

	近似値	誤差上界
$(\bar{x}_{1,1}, \delta \bar{x}_{1,1})$	$-0.37309972847765 + 6.6257902475795 \times 10^{-10}i$	$4.1774825126298 \times 10^{-9}$
$(\bar{x}_{1,2}, \delta \bar{x}_{1,2})$	$-0.37309975030399 - 6.4334609478011 \times 10^{-10}i$	$4.0467377380405 \times 10^{-9}$
$(\bar{x}_{1,3}, \delta \bar{x}_{1,3})$	$0.0 + 1.8842643012372i$	$1.2670512404643 \times 10^{-14}$
$(\bar{x}_{1,4}, \delta \bar{x}_{1,4})$	$0.0 - 1.8842643012372i$	$1.2670512404644 \times 10^{-14}$
$(\bar{x}_{1,5}, \delta \bar{x}_{1,5})$	$0.37309975030399 + 6.4334609478011 \times 10^{-10}i$	$4.0467377380405 \times 10^{-9}$
$(\bar{x}_{1,6}, \delta \bar{x}_{1,6})$	$0.37309972847765 - 6.6257902475795 \times 10^{-10}i$	$4.1774825126298 \times 10^{-9}$

Table 2. 方程式 $F(x, \bar{y}_1) = 0$ の根と誤差上界

と $\bar{x}_{1,4}$ は、 $|\text{Im } \bar{x}_{1,3}| \gg |\delta \bar{x}_{1,3}|$, $|\text{Im } \bar{x}_{1,4}| \gg |\delta \bar{x}_{1,4}|$ により、明らかに実根でないと判定される。一方、 $\bar{x}_{1,1}$, $\bar{x}_{1,2}$, $\bar{x}_{1,5}$, $\bar{x}_{1,6}$ は、 $|\text{Im } \bar{x}_{1,j}| < |\delta \bar{x}_{1,j}|$ より近似的に実根と判定された。さらに、 $|\bar{x}_{1,1} - \bar{x}_{1,2}| < \min\{\delta \bar{x}_{1,1}, \delta \bar{x}_{1,2}\}$, $|\bar{x}_{1,5} - \bar{x}_{1,6}| < \min\{\delta \bar{x}_{1,5}, \delta \bar{x}_{1,6}\}$ より、 $\bar{x}_{1,1}$, $\bar{x}_{1,2}$ と $\bar{x}_{1,5}$, $\bar{x}_{1,6}$ がそれぞれ近似実 2 重根と判定された。

次に、 $y = \bar{y}_1$ の近傍で、上の近似実重根がどのような振舞をするかを調べた。 $y = \bar{y}_1 \pm \delta_1$ ($\delta_1 = 1.0 \times 10^6 \delta \bar{y}_1$) に対して方程式 $F(x, \bar{y}_1 \pm \delta_1) = 0$ の根の近似値を計算し、方程式

	近似値	誤差上界
$(\bar{x}_{1,1}^+, \delta\bar{x}_{1,1}^+)$	$-0.373099737974 + 3.7226944686533 \times 10^{-8}i$	$6.2062774331275 \times 10^{-11}$
$(\bar{x}_{1,1}^-, \delta\bar{x}_{1,1}^-)$	$-0.3730997423172 + 3.4067137181498 \times 10^{-8}i$	$1.3594902458777 \times 10^{-10}$
$(\bar{x}_{1,2}^+, \delta\bar{x}_{1,2}^+)$	$-0.373099737974 - 3.7359464394647 \times 10^{-8}i$	$1.2412550804634 \times 10^{-10}$
$(\bar{x}_{1,2}^-, \delta\bar{x}_{1,2}^-)$	$-0.37309974231809 - 3.4032759918104 \times 10^{-8}i$	$4.9011142245537 \times 10^{-13}$
$(\bar{x}_{1,5}^+, \delta\bar{x}_{1,5}^+)$	$0.373099737974 + 3.7359464394647 \times 10^{-8}i$	$1.2412550804634 \times 10^{-10}$
$(\bar{x}_{1,5}^-, \delta\bar{x}_{1,5}^-)$	$0.37309974231809 + 3.4032759918104 \times 10^{-8}i$	$4.9011142245537 \times 10^{-13}$
$(\bar{x}_{1,6}^+, \delta\bar{x}_{1,6}^+)$	$0.373099737974 - 3.7226944686533 \times 10^{-8}i$	$6.2062774331275 \times 10^{-11}$
$(\bar{x}_{1,6}^-, \delta\bar{x}_{1,6}^-)$	$0.3730997423172 - 3.4067137181498 \times 10^{-8}i$	$1.3594902458777 \times 10^{-10}$

Table 3. 方程式 $F(x, \bar{y}_1 \pm L \delta\bar{y}_1) = 0$ の根と誤差上界 ($j = 1, 2, 5, 6$)

$F(x, \bar{y}_1 + \delta_1) = 0$ の根の近似値で $\bar{x}_{1,j}$ に一番近いものを $\bar{x}_{1,j}^+$ 、方程式 $F(x, \bar{y}_1 - \delta_1) = 0$ の根の近似値で $\bar{x}_{1,j}$ に一番近いものを $\bar{x}_{1,j}^-$ とした。計算結果は表 3 の通りである。表 3 の結果から、 $|\delta\bar{x}_{1,j}^\pm| < |\text{Im } \bar{x}_{1,j}^\pm|$, $|\bar{x}_{1,j}^\pm - \bar{x}_{1,j}| > |\delta\bar{x}_{1,j}^\pm| + |\delta\bar{x}_{1,j}|$ (複号同順) であることがわかる。これより、点 $(\bar{x}_{1,1}, \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_{1,2}, \bar{y}_1)$ と $(\bar{x}_{1,5}, \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_{1,6}, \bar{y}_1)$ がそれぞれ近似孤立零点と判定された。

4. まとめ

本論では、数値解法で得た近似根の誤差上界を見積もることにより、ある精度で代数関数の特異点を近似計算を用いて計算する方法を示した。特に、上で述べた Smith の誤差上界は、DKA 法の近似根の誤差上界を厳密に、しかもかなり高い精度で与えるので、ある精度での特異点を精密かつ効率的に検出することができる。

方程式 $R(y) = 0$ の根の近似値 \bar{y}_i は真の根からの誤差を含むので、 \bar{y}_i を $F(x, y)$ に代入した方程式 $F(x, \bar{y}_i) = 0$ の係数も誤差を含むことになり、結果として方程式 $F(x, \bar{y}_i) = 0$ の根の近似値 $\bar{x}_{i,j}$ の誤差が大きくなり得るが、その誤差上界も、上記と同様に Smith の誤差上界によって厳密に見積もることができる。

参 考 文 献

- [Abe73] O. Aberth, Iteration Methods for Finding all Zeros of a Polynomial Simultaneously. *Math. Comput.*, **27** (1973), 339–344.
- [Dur60] E. Durand, *Solutions Numériques des Équations Algébriques*, Tome I. Masson et Cie, Paris, 1960.
- [Iri81] 伊理正夫, 数値計算 (理工系基礎の数学 12), 第 3 章. 朝倉書店, 1981.
- [Ker66] I. O. Kerner, Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen. *Numer. Math.*, **8** (1966), 290–294.
- [KMS95] 近藤祐史, 三好善彦, 齋藤友克, 陰関数描画に関する一つの試み, 数理解析研究所講究録 920 “数式処理の理論と応用に関する研究.” 京都大学数理解析研究所, 1995, 165–172.

[Smi70] B. T. Smith, Error Bounds for Zeros of a Polynomial Based Upon Gerschgorin's Theorems. *J. ACM*, **17** (1970), 661-674.