

Bifurcations for skew tent maps II (Renormalization)

お茶の水女子大学 理学研究科 伊藤みちほ (Michiho Ito)
城西大学 理学部 西沢清子 (Kiyoko Nishizawa)

1. 導入

パラメータ対 (a, b) を傾きとする skew tent map $f_{a,b}$ は、 (a, b) によってその力学系が決まる。従って、パラメータ対 (a, b) の定義域を $D = \{(a, b); a > 0, b > 1, a + b \geq ab\}$ とすると、 $f_{a,b}$ の振るまいによって D が分割される：即ち、領域 D は代数曲線によって定義される領域 $\{D_k\}_{k \geq 2}$ によって $D = \cup_{k=2}^{\infty} D_k$ となる。前述の論文 (Bifurcation for skew tent maps I [IN96]) により、各 D_k には、周期 k の吸引的周期軌道を唯一つもつようなパラメータ領域 D_k^A が存在した。本論文では、カオス区間を持つパラメータ領域として、新たに D_k の部分領域 D_k^B を定義する。 D_k^B にパラメータ対 (a, b) が含まれるような $f_{a,b}$ について、くり込み (renormalization) を使って力学系の解析を行い、くり込まれた関数のパラメータ領域が、どのような代数曲線によって決定されるかを述べる。本論中の代数曲線及び絵は Risa/Asir, symbolic and algebraic computation system, Version 940420. Copyright (C) FUJITSU LABORATORIES LIMITED による。

2. 準備

以下で、我々の目的の為に必要な、幾つかの定義と結果を述べる。

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{for } x \leq 0 \\ -bx + 1, & \text{for } x \geq 0 \end{cases}, \quad D := \{(a, b); a > 0, b > 1, a + b \geq ab\}.$$

で定義される関数族 $\{f_{a,b}\}_{(a,b) \in D}$ を skew tent map 族と呼ぶ。また、区間 $I_{a,b} := [f^2(0), f(0)]$ とする。前述の Part I で示したように、skew tent map $f_{a,b}$ の力学系は、 $I_{a,b}$ 上で考えれば十分である。

任意の正の整数 $k (\geq 2)$ に対し、

$$D_k := \{(a, b) \in D; 1 + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a^{k-2}} < b \leq 1 + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a^{k-1}}\}.$$

さらに、 $D_k (k \geq 2)$ を分割する； $D_k = D_k^A \cup D_k^B \cup D_k^*$.

$$D_k^A := \{(a, b) \in D_k; a^{k-1}b \leq 1\}.$$

$$D_k^B := \{(a, b) \in D_k; a^{k-1}b > 1, a + b \geq a^{k-1}b^2\}.$$

特に、 $D_0 := D_2^B = \{(a, b) \in D; a + b \geq ab^2, ab > 1\}$ とし、今後 D_k^B については、 $k \geq 3$ とする。 D_k^A に属するパラメータ対 (a, b) に対しては、Part I [IN96] で述べたように、 $f_{a,b}$ が唯一の周期 k の吸引的周期軌道を持つ。

2.1. カオス

X で定義された関数 f が次の 3 条件を満たすとき、 f は X 上でカオス的 (chaotic) であるという [Dev89]。

1. f が、初期値に対する敏感な依存性 (sensitive dependence on initial condition) を持つ。
2. f は、位相推移的 (topologically transitive) である。
3. f の周期点の集合は、 X 上稠密である。

但し、 f が、初期値に対する敏感な依存性を持つとは、ある正数 δ で次を満たすようなものが存在する：任意の点 x の任意近傍 U の点 y で $|f^n(x) - y| > \delta$ となる。また、 f は、位相推移的であるとは、任意の開集合 U, V に対して、ある整数 $n (\geq 0)$ が存在し $f^n U \cap V \neq \emptyset$ となることである。

ある区間に対し、 f がその上でカオス的であるとき、その区間を **カオス区間** と呼ぶことにする。

2.2. Renormalization (くり込み)

skew tent map $f_{a,b}$ に対して、ある閉区間 U と正の整数 n が存在して、 $f_{a,b}^n : U \rightarrow U$ 、 $f_{a,b}^n|_U$ が skew tent map となるならば、 $f_{a,b}$ はレベル n での **renormalizable** (くり込み可能)、又は、 $f_{a,b}^n|_U$ は **renormalizable** (くり込み可能) という。skew tent map 族に対して、 $f_{a,b}$ がレベル n でくり込み可能であるとき、Fig. 1 の可換図を成り立たせるようなある同相写像 h が存在する。このとき、

$$h : f_{a,b}^n|_U \sim f_{a',b'}|_{I'}$$

と書く。

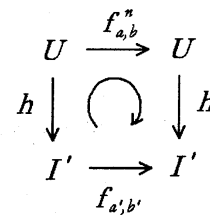


Fig. 1.

3. 結果と証明

$$f_{a,b}^2|_{L_i} \sim_{h(x)} f_{b^2,ab}|_I \quad (i = 0, 1) \quad (1)$$

L_0 上での位相共役関数 $h_0(x)$ は、以下のようになる：

$$h_0(x) = \frac{f_{b^2,ab}(0) - f_{b^2,ab}^2(0)}{f_{a,b}^4(0) - f_{a,b}^2(0)} (f_{a,b}^4(0) - x) + f_{b^2,ab}^2(0).$$

くり込みに関して、以下のことにまず注意する：
 $D^* := \{(a, b) \in D; a + b < ab^2, a > 1\}$ とする。このとき $(a, b) \in D^*$ に対して、 $I_{a,b}$ はカオス区間になる [ITN79b]。

$(a, b) \in D_0$ のとき、 $L_0 = [f^2(0), f^4(0)]$, $L_1 = [f^3(0), f(0)]$ とする。 $L_0 \cap L_1 = \phi$, $fL_0 = L_1$, $fL_1 = L_0$ であり、 $f^2 : L_i \rightarrow L_i$ ($i = 0, 1$) となる。このとき $f_{a,b}$ はレベル 2 でのくり込み可能であることが次のようにして示される：

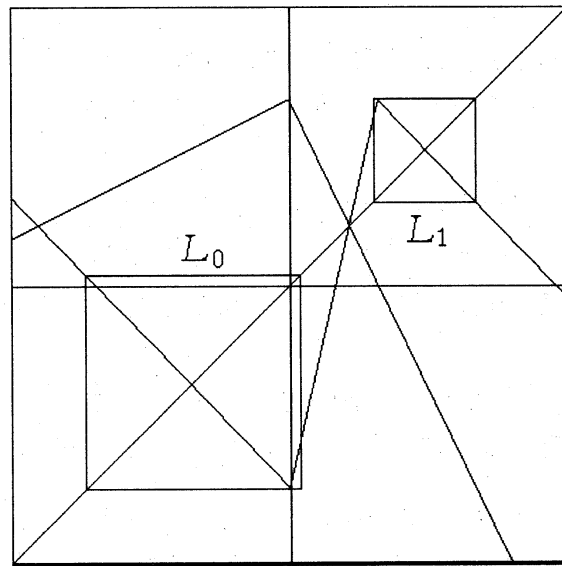
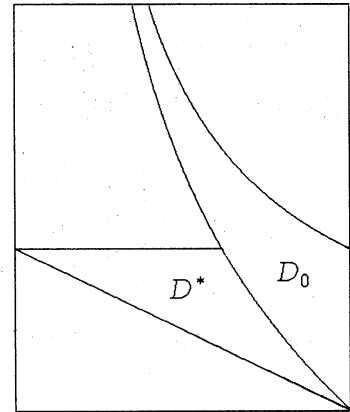


Fig. 2. レベル 2 でのくり込み

L_1 上での位相共役関数 $h_1(x)$ は、以下のようになる：

$$h_1(x) = \frac{f_{b^2, ab}(0) - f_{b^2, ab}^2(0)}{f_{a,b}(0) - f_{a,b}^3(0)} (x - f_{a,b}^3(0)) + f_{b^2, ab}^2(0).$$

$I_{a,b} - L_0 \cup L_1$ の固定点以外の点の $f_{a,b}$ による軌道は $L_0 \cup L_1$ に収束する。従って、 L_i ($i = 0, 1$) 上での力学系が、 $I_{a,b}$ 上での $f_{a,b}$ の力学系を決定する。(1) より、以下のような領域 A_2 を定義する：

$$\begin{aligned} A_2 &:= \{(b^2, ab); (a, b) \in D_0\} \\ &= \{(a, b) \in D; a > 1\}. \end{aligned}$$

このとき $A_2 \subset D^* \cup D_0$.

D_0 は、更に細かく分割される。

整数列 $p(m)$ を帰納的に次のように定義する：

$$p(m) = \begin{cases} 1, & (m=1) \\ 2p(m-1), & (m \text{ が偶数}) \\ 2p(m-1) - 1, & (m \text{ が奇数}) \end{cases}$$

D_0 の部分領域 D_0^m を以下のように定義する：

$$D_0^m := \{(a, b) \in D_0; a^{p(m)} b^{p(m+1)} \leq a + b \leq a^{p(m+1)} b^{p(m+2)}\}$$

このとき、次のことが得られる。

key-lemma (renormalization) (cf. 定理 1.2(ii) [ITN79b])

$(a, b) \in D_0^m$ ($m \geq 2$) に対して、ある $(a', b') \in D_0^{m-1}$ が存在して、次の共役関係が成立する：

$$f_{a,b}^2 |_{L_i} \sim f_{a',b'} |_{I_{a',b'}} \quad (i = 0, 1)$$

特に $m = 1$ のときは、ある $(a', b') \in D^*$ に対して、上の共役関係が成立する。

命題 $(a, b) \in D_0^m$ とする。 $f_{a,b}$ に対し、互いに共通部分を持たない 2^m 個のカオス区間が存在する。

証明 $(a, b) \in D_0^m$ ($m \geq 1$) とする。 key-lemma を帰納的に利用することによって、 $f_{a,b}$ に対し、互いに共通部分を持たない次のような 2^m 個の区間 L_i ($1 \leq i \leq 2^m$) ($\subset I_{a,b}$) を得る。

$$L_i = \begin{cases} [f^{2^m+i+1}(0), f^{i+1}(0)], & \text{if } f^{2^m+i+1}(0) < f^{i+1}(0) \\ [f^{i+1}(0), f^{2^m+i+1}(0)], & \text{if } f^{i+1}(0) < f^{2^m+i+1}(0) \end{cases}$$

$$fL_i = L_{i+1} \quad (1 \leq i \leq 2^m - 1), \quad fL_{2^m} = L_1$$

である。各 L_i 上で、レベル 2^m でのくり込みが可能であり、このときくり込まれた *skew tent map* のパラメータ対は $D_{a,b}^*$ に含まれる。従って、各 L_i がカオス区間となる。 □
但し、命題の結果については [ITN79b] の定理 1.2(ii) と命題 3.1 から暗に得られていることに注意する。

D_k^B ($k \geq 3$) についても D_0^m に対してと同様に考えることができる。

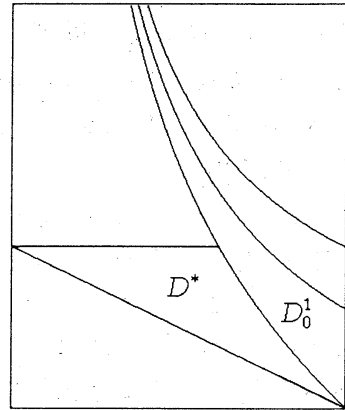
カオス区間をもつような *skew tent map* 族のために D 内に新たな領域を定義する。

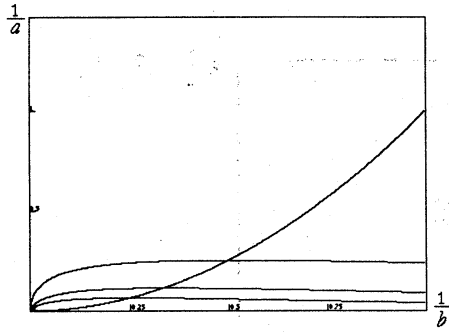
定義

$$A_2 := \{(a, b) \in D; a > 1\}, \quad (2)$$

$$A_k := \{(a, b) \in D; a > b^2, (a+b)b^{\frac{k-2}{k}} > (b+1)a^{\frac{k-1}{k}}\} \quad (k \geq 3) \quad (3)$$

定理 1 $A_2 \subset D^* \cup \{\cup_{m=1}^{\infty} D_0^m\}$, $A_k \subset D^* \cup D_0^1$ ($k \geq 3$) である。更に $A_i \subset A_{i+1}$ ($i \geq 2$) である。





証明 領域の定義により次の代数曲線を考える：

$$a - b^2 = 0 \quad (4)$$

$$(a+b)b^{\frac{k-2}{k}} - (b+1)a^{\frac{k-1}{k}} = 0 \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^k b^{k-2} - (b+1)^k a^{k-1} = 0 \quad (6)$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > b > 1, a > b^2$ の範囲を考えれば十分である。この範囲では (6) で示される曲線群は、互いに交わらない。

b を固定し、 a の関数として、 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > b > 1$ の範囲の (6) の唯一解を α_k とする。このとき、 α_k の k に対する単調増加性がいえる。従って、 $A_i \subset A_{i+1}$ ($i \geq 2$) となる。 $A_k \subset D^* \cup D_0^1$ ($k \geq 3$) については、 A_3 について調べればよい。

一方、 $A_2 \subset D^* \cup \{\cup_{m=1}^{\infty} D_0^m\}$ については、以下のことから分かる。即ち、 D_m の境界曲線と $b=1$ の交点は $a^{p(m)} - a - 1 = 0$ の最大根であり、 m の増加に伴って単調減少に 1 に収束する。□

式 (6) は、 $k (\geq 3)$ の値にかかわらず、(4) を因子として持つ。(6) から (4) の因子を除いた代数方程式を定義方程式としている曲線を Γ_k とする。Fig. 3 は $k = 2, \dots, 5$ の A_k であり、その境界を示す曲線 $\Gamma_i(a, b)$ ($i = 2, \dots, 5$) は、以下のように表せる。

$$\Gamma_3(a, b) : -b^2 + (a^2 - 3a)b - a = 0 \quad (7)$$

$$\Gamma_4(a, b) : -b^4 - 4ab^3 + (a^3 - 6a^2 - a)b^2 - 4a^2b - a^2 = 0 \quad (8)$$

$$\Gamma_5(a, b) : -b^6 - 5ab^5 + (-10a^2 - a)b^4 + (a^4 - 10a^3 - 5a^2)b^3 + (-10a^3 - a^2)b^2 - 5a^3b - a^3 = 0 \quad (9)$$

補題 (cf. 定理 2.3 [ITN79b]) $(a, b) \in D_k^B$ ($k \geq 3$) に対し、 $J_j = [f_{a,b}^{j+2}(0), f_{a,b}^{k+j+2}(0)]$ ($0 \leq j \leq k-2$), $J_{k-1} = [f_{a,b}^{k+1}(0), 1]$ とすると、次のことが示される。

(1) J_j は、互いに共通部分を持たず、 $f_{a,b} J_j = J_{j+1}$ ($0 \leq j \leq k-2$), $f_{a,b} J_{k-1} = J_0$.

(2) $f_{a,b}^k |_{J_i} \sim f_{a^{k-2}b^2, a^{k-1}b} |_I$.

(3) ほとんどすべての $x \in I_{a,b} - \cup_{j=0}^{k-1} J_j$ に対し、ある n が存在して、 $f_{a,b}^n(x) \in \cup_{j=0}^{k-1} J_j$.

上述の補題の (2) より、各 J_i 上の f^k は、 $I_{a,b}$ 上の $f_{a^{k-2}b^2, a^{k-1}b}$ にくり込み可能である。従って $k (\geq 3)$ に対し、 D_k^B と A_k のくり込みに関する関係は次の定理に述べられる。

定理 2 D_k^B は代数曲線 $a+b = a^{2k-2}b^3$ で 2 つの部分領域 B_k^2, B_k^1 に分割されて、パラメータ対 (a, b) が B_k^2 に属するとき、対応する skew tent map $f_{a,b}$ は、互いに共通部分を持たない $2k$ 個のカオス区間を持つ。また、パラメータ対 (a, b) が B_k^1 に属するとき、対応する skew tent map $f_{a,b}$ は、互いに共通部分を持たない k 個のカオス区間を持つ。

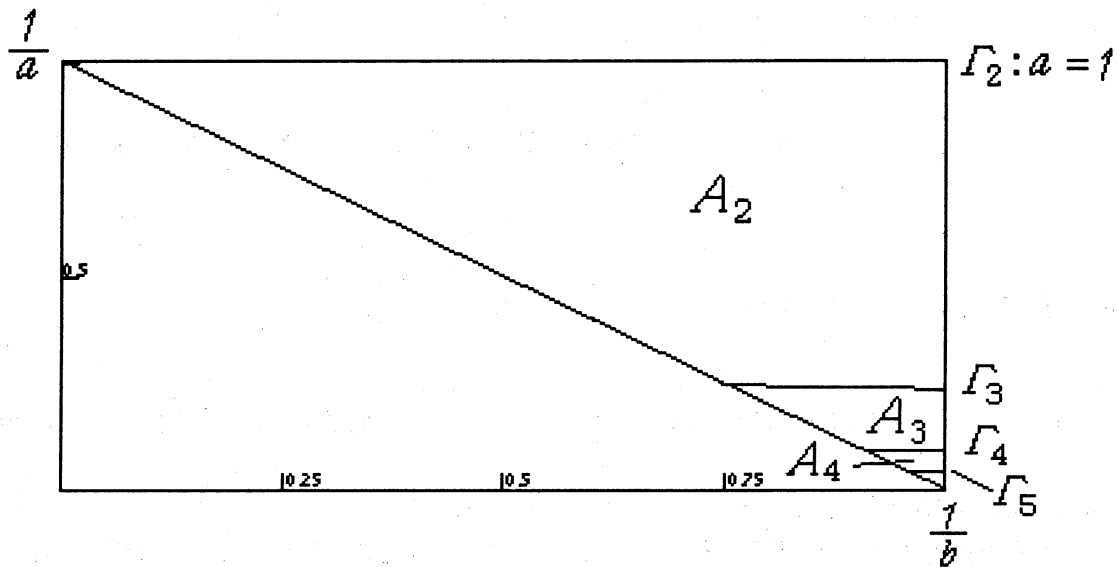


Fig. 3.

証明 D_k^B に属するパラメータ対 (a, b) を持つ skew tent map $f_{a,b}$ は、 $A_k \cap D_0^1$ のパラメータを持つ $f_{a',b'}$ にくり込まれるか、 $A_k \cap D^*$ のパラメータを持つ $f_{a',b'}$ にくり込まれる。前者のとき、 $f_{a,b}$ は $2k$ 個のカオス区間を持ち、後者のとき、 $f_{a,b}$ は k 個のカオス区間を持つことは、命題と補題の結果から示される。従って、 D_k^B は、 D_0^1 と D^* の境界曲線に対応する $a+b = a^{2k-2}b^3$ のひき戻された代数曲線： $a+b = a^{2k-2}b^3$ によって B_k^2 と B_k^1 に分割される。

上述のくり込みによって、 D_k^B の境界線をなす 3 本の代数曲線は、それぞれ A_k の境界線をなす 3 本の代数曲線と次のように対応している： $a^{k-1}b = 1$ は $b' = 1$ に、 $a+b = a^{k-1}b^2$ は $a'+b' = a'b'$ に、 $1 + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a^{k-2}} = b$ は Γ_k である。□

参 考 文 献

- [Dev89] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, 1989.
- [IN96] K. Ichimura, and K. Nishizawa. Bifurcations for skew tent maps I (Stair type). *in This Paper*.
- [ITN79a] S. Ito, S. Tanaka, and H. Nakada. On unimodal linear transformations and chaos I. *TOKYO J. MATH.*, 2(2):221–239, 1979.
- [ITN79b] S. Ito, S. Tanaka, and H. Nakada. On unimodal linear transformations and chaos II. *TOKYO J. MATH.*, 2(2):241–259, 1979.
- [NY95] H. E. Nusse and J. A. Yorke. Border-collision bifurcations for piecewise smooth one-dimensional maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(1):189–207, 1995.

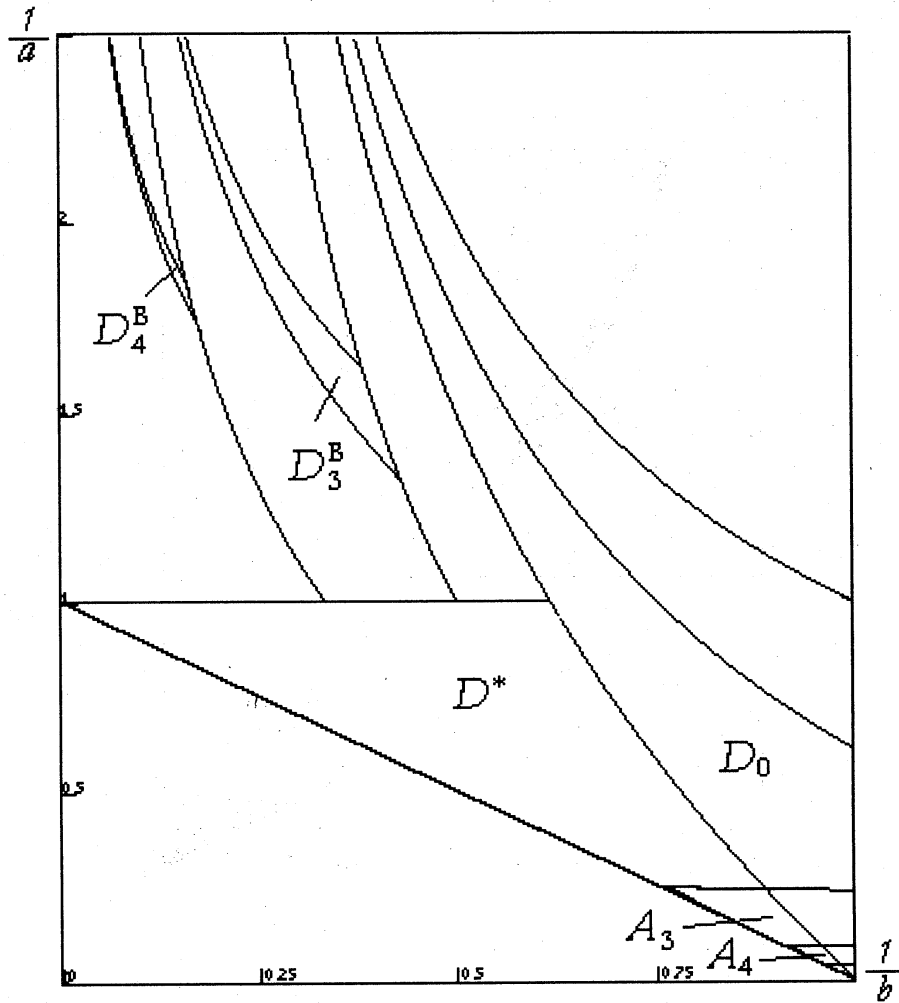


Fig. 4.

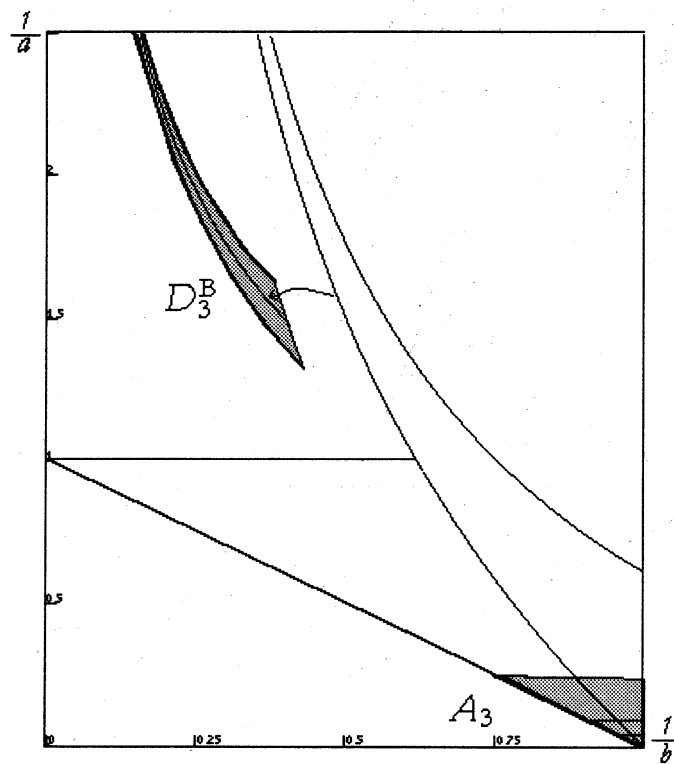


Fig. 5.