数理解析研究所講究録
990 巻 1997 年 259-268

反復関数の収束次数の改良

東京女子大　長田 直樹 (Naoki Osada)

1. はじめに

実または複素反復関数$\phi(z)$ の収束次数が $p(>1)$ であるとき、

$$\Phi(z)=\phi(z)-\frac{1}{p}\phi'(z)[z-\phi(z)] \tag{1.1}$$

の収束次数は $p+1$ となることが知られている。(例えば、Petković and Tričković[5] を見よ。)

本論文では、この性質を一般化し、反復関数の収束次数を高める方法を述べる。ついでこれらの方法を、多重解を持つ単独方程式 $f(z)=0$ に適用し、新しい 3 次と 4 次の反復解法を導く。また、数値例により有効性を調べる。

2. 反復関数の収束次数

実または複素反復関数$\phi(z)$ が不動点αを持つとする。自然数 p と定数 C $(C\neq 0)$ が存在して

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{\phi(z)-\alpha}{(z-\alpha)^p}=C$$

のとなるとき、反復関数$\phi(z)$ の（αへの）収束次数は p であるという。言い替えると点αで連続な関数$\eta(z)$ により

$$\phi(z)=\alpha+\eta(z)(z-\alpha)^p,\ \eta(\alpha)\neq 0 \tag{2.1}$$

と表されるとき、ϕの収束次数は p となる。$C=\eta(\alpha)$ は漸近誤差定数と呼ばれる。

定理 1.　αに $p(\geq 1)$ 次収束する反復関数 $\phi(z)$ がαで連続微分可能とする。また、αに $q(>1)$ 次収束する反復関数 $\psi(z)$ がαで連続とする。このとき、反復関数

$$\Phi(z)=\phi(z)-\frac{1}{p}\phi'(z)\,[z-\psi(z)] \tag{2.2}$$

の収束次数は少なくとも $p+1$ である。

証明　$\phi(z)$ は (2.1) と表されるので、

$$\phi'(z)=p\eta(z)(z-\alpha)^{p-1}+\eta'(z)(z-\alpha)^p$$

となる。また、

$$\psi(z)=\alpha+\rho(z)(z-\alpha)^q,\ \rho(\alpha)\neq 0$$

と表されるので、これらを (2.2) に代入すると

$$\Phi(z) = \alpha - \frac{1}{p}\eta'(z)(z-\alpha)^{p+1} + O((z-\alpha)^{p+q-1})$$

が得られる。□

(2.2) において$\phi(z) = \psi(z)$ で $p \geq 2$ の場合が (1.1) である。(2.2) において$\Phi(z) = \psi(z)$ つまり

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{p}\phi'(z)\,[z - \Phi(z)]$$

とおき、$\Phi(z)$ について解くと

$$\Phi(z) = z - \frac{z - \phi(z)}{1 - \frac{1}{p}\phi'(z)} \tag{2.3}$$

となる。(2.3) について次の定理が成り立つ。

定理 2. αに $p(>1)$ 次収束する反復関数 $\phi(z)$ がα で連続微分可能とする。このとき、反復関数

$$\Phi(z) = z - \frac{z - \phi(z)}{1 - \frac{1}{p}\phi'(z)}$$

の収束次数は少なくとも $p+1$ である。

証明 $\phi(z)$ は (2.1) を満たすので、

$$\phi'(z) = p\eta(z)(z-\alpha)^{p-1} + \eta'(z)(z-\alpha)^p$$

となる。よって $p>2$ のときは

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= z - (z-\alpha)[1 - \eta(z)(z-\alpha)^{p-1}] \\ &\qquad \times [1 + \eta(z)(z-\alpha)^{p-1} + \frac{1}{p}\eta'(z)(z-\alpha)^p + O((z-\alpha)^{2p-2})] \\ &= \alpha - \frac{1}{p}\eta'(z)(z-\alpha)^{p+1} + O((z-\alpha)^{2p-1})\end{aligned}$$

となる。$p=2$ のときも同様に

$$\Phi(z) = z - \frac{1}{2}\eta'(z)(z-\alpha)^3 + O((z-\alpha)^4)$$

が導ける。□

定理 1 を $q=1$ の場合にも成立するように修正する。

定理 3. αに $p(\geq 1)$ 次収束する反復関数 $\phi(z)$ と $q(\geq 1)$ 次収束する反復関数 $\psi(z)$ がαで連続微分可能とする。このとき、反復関数

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{p}\phi'(z)\frac{z-\psi(z)}{1-\frac{1}{q}\psi'(z)}$$

の収束次数は少なくとも $p+1$ である。

証明　定理 1、定理 2 と同様である。□

定理 3 で$\phi(z) = \psi(z)$ とおくと (2.3) が得られる。

3. 単独方程式の 1 点反復解法への応用

単独方程式 $f(z) = 0$ の解αを求める 1 点反復解法

$$z_{n+1} = \phi(z_n)$$

を考える。p 次収束する反復関数$\phi(z)$ が $f(z), f'(z), \ldots, f^{(p-1)}(z)$ とαの多重度 m のみによって定まるとき、ϕは p 次最適解法[1]という。

次の記号を用いる。

$$u = u(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}, \quad A_j = A_j(z) = \frac{f^{(j)}(z)}{j!f'(z)} \ (j = 2, 3, \ldots).$$

3.1. 既知の例

良く知られた解法に前節の諸定理を適用すると、別の良く知られた解法が得られる。

例 1. $f(z) = 0$ の単解αを求める Newton 法

$$\phi(z) = z - u$$

に定理 1 および 2 を適用する。$p = 2,\ \phi'(z) = 2A_2u$ より

(i) $\phi(z) - \dfrac{1}{2}\phi'(z)\,[z - \phi(z)] = z - u - A_2u^2$ (Traub の 3 次基本系列).

(ii) $z - \dfrac{z-\phi(z)}{1-\frac{1}{2}\phi'(z)} = z - \dfrac{u}{1-A_2u}$ (Halley 法).

例 2. $f(z) = 0$ の単解αを求める parallel-chord 法 (簡易 Newton 法)

$$\phi(z) = \psi(z) = z - cf(z) \quad c \neq 0$$

[1] 最適解法は、関数値計算回数の点で最適であって、必ずしも精度の点での最適ではない。精度には収束次数のほかに漸近誤差定数も関係する。

に定理3を適用する。$p=q=1$, $\phi'(z)=\psi'(z)=1-cf'(z)$ より

$$\phi(z)-\phi'(z)\frac{z-\psi(z)}{1-\psi'(z)}=z-\frac{f(z)}{f'(z)} \quad \text{(Newton 法)}.$$

例 3. $f(z)=0$ の単解αを求める

$$\phi(z)=z-u, \qquad \psi(z)=z-cf(z) \quad c\neq 0$$

に定理3を適用すると、$p=2$, $q=1$ より

$$\phi(z)-\frac{1}{2}\phi'(z)\frac{z-\psi(z)}{1-\psi'(z)}=z-u-A_2u^2$$

が得られる。これは例1(i)と同じである。

例 4. $f(z)=0$ の m 重解αを求める Schröder 法

$$\phi(z)=z-mu$$

に定理1および2を適用する。$p=2$, $\phi'(z)=1-m+2mA_2u$ より

(i) $\phi(z)-\dfrac{1}{2}\phi'(z)\left[z-\phi(z)\right]=z-mu\left[\dfrac{1}{2}(3-m)+mA_2u\right]$ (Traub の 3 次基本系列).

(ii) $z-\dfrac{z-\phi(z)}{1-\dfrac{1}{2}\phi'(z)}=z-\dfrac{u}{\dfrac{1+m}{2m}-A_2u}$

(Hansen and Patrick[2], Farmer and Loizou[1]). [2]

例 5. (Traub[7,Lemma 7-1]) $f(z)=0$ の m 重解αを求める Traub の 3 次基本系列

$$\phi(z)=z-mu\left[\frac{1}{2}(3-m)+mA_2u\right]$$

に$\psi(z)=z-mu$ として定理1を適用すると、Traub の 4 次基本系列が得られる。

$$\Phi(z)=z-mu\left[\frac{1}{6}(m^2-6m+11)+m(2-m)A_2u+m^2(2A_2^2-A_3)u^2\right].$$

3.2. 多重解を持つ方程式の3次の1点反復解法

以下では $f(z)$ は、$f(z)=(z-\alpha)^m g(z)$, $m>1$, $g(\alpha)\neq 0$ を満たすとする。そして、$f(z)=0$ の解αを求める1点反復解法 $z_{n+1}=\phi(z_n)$ を調べる。ただし、多重度 m は既知とする。

命題 1. 次の反復関数$\psi(z)$ は、$g'(\alpha)\neq 0$ のときαに2次収束する。

[2] この方法は Hansen and Patrick と Farmer and Loizou により独立に得られ、共に 1977 年に発表された。

(i) $\psi(z) = z - \dfrac{2m^2}{m-1}A_2u^2$, (ii) $\psi(z) = z - \dfrac{m-1}{2A_2}$.

証明 次の漸近公式からいえる。

(i) $A_2u^2 = \dfrac{m-1}{2m^2}(z-\alpha) - \dfrac{m-3}{2m^3}\dfrac{g'(z)}{g(z)}(z-\alpha)^2 + O((z-\alpha)^3)$.

(ii) $\dfrac{1}{2A_2} = \dfrac{f'(z)}{f''(z)} = \dfrac{1}{m-1}(z-\alpha) - \dfrac{m+1}{m(m-1)^2}\dfrac{g'(z)}{g(z)}(z-\alpha)^2 + O((z-\alpha)^3)$. □

Schröder 法$\phi(z) = z - mu$ を基に 3 次の最適な 1 点反復解法を導く。

命題 2. $\phi(z) = z - mu$ と 次の$\psi(z)$

(i) $\psi(z) = z - \dfrac{2m^2}{m-1}A_2u^2$, (ii) $\psi(z) = z - \dfrac{m-1}{2A_2}$

に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{2}\phi'(z)[z - \psi(z)]$$

は以下の 3 次最適解法を与える。

$$\text{(i)}\quad \Phi(z) = z - mu\left[1 - mA_2u + \frac{2m^2}{m-1}(A_2u)^2\right]. \tag{3.1}$$

$$\text{(ii)}\ \Phi(z) = z - \frac{1}{2}m(m+1)u + \frac{(m-1)^2}{4A_2}\ \text{(Osada[3])}. \tag{3.2}$$

証明 定理 1 と命題 1 から得られる。$\phi'(z) = 1 - m + 2mA_2u$ を用いる。□

命題 3. $\phi(z) = z - mu$ と 次の$\psi(z)$

(i) $\psi(z) = z - mu\left[\dfrac{1}{2}(3-m) + mA_2u\right]$

(ii) $\psi(z) = z - \dfrac{1}{2}m(m+1)u + \dfrac{(m-1)^2}{4A_2}$

(iii) $\psi(z) = z - \dfrac{\sqrt{m}u}{\sqrt{1-2A_2u}}$ (Ostrowski)

に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{2}\phi'(z)\,[z - \psi(z)]$$

は以下の 3 次反復解法を与える。

$$\text{(i)}\quad \Phi(z) = z - mu\left[\frac{1}{4}(m^2 - 4m + 7) + m(2-m)A_2u + m^2(A_2u)^2\right]. \tag{3.3}$$

$$\text{(ii)}\quad \Phi(z) = z + \frac{1}{2}m(m+1)(m-2)u - \frac{1}{2}m^2(m+1)A_2u^2 - \frac{(m-1)^3}{8A_2}. \tag{3.4}$$

$$\text{(iii)}\quad \Phi(z) = z - mu - \frac{\sqrt{m}(1 - m + 2mA_2u)u}{2\sqrt{1-2A_2u}}. \tag{3.5}$$

証明 $\psi(z)$ はそれぞれ既知の 3 次反復解法であるので、定理 1 から得られる。□

命題 4. $\phi(z) = z - mu$ と $\psi(z) = z - u$ に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{2}\phi'(z)\frac{z-\psi(z)}{1-\psi'(z)} = z - \frac{\left(\frac{1}{2}(1+m) - mA_2u\right)u}{1-2A_2u} \tag{3.6}$$

は 3 次反復解法である。

証明 定理 3 から得られる。□

3.3. 多重解を持つ方程式の 4 次の 1 点反復解法

Traub の 3 次基本系列$\phi(z) = z - mu\left[\frac{1}{2}(3-m) + mA_2u\right]$ を基に 4 次の最適な 1 点反復解法を導く。

命題 5. $\phi(z) = z - mu\left[\frac{1}{2}(3-m) + mA_2u\right]$ と 次の$\psi(z)$

(i) $\psi(z) = z - \dfrac{2m^2}{m-1}A_2u^2$, (ii) $\psi(z) = z - \dfrac{m-1}{2A_2}$, (iii) $\psi(z) = \phi(z)$

に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{3}\phi'(z)[z - \psi(z)]$$

は以下の 4 次最適解法を与える。

$$\text{(i)}\quad \Phi(z) = z - mu\left[\frac{1}{2}(3-m) + \frac{m}{3}(m+1)A_2u - 2m^2(A_2u)^2 + \frac{2m^3}{m-1}(2A_2^2 - A_3)u^2A_2u\right]. \tag{3.7}$$

$$\text{(ii)}\quad \Phi(z) = z + \frac{1}{2}m(m+1)(m-2)u - m^3A_2u^2 - \frac{1}{12A_2}(m-1)^2(m-2) + \frac{A_3}{2A_2}m^2(m-1)u^2. \tag{3.8}$$

$$\text{(iii)}\quad \Phi(z) = z - \frac{1}{12}m(3-m)(m^2-3m+8)u - \frac{1}{6}m^2(4m^2-15m+17)A_2u^2 - 2m^3(2-m)A_2^2u^3 + \frac{1}{2}m^3(3-m)A_3u^3 + m^4A_2A_3u^4 - 2m^4A_2^3u^4. \tag{3.9}$$

(Petković and Tričković[5])

次に$\phi(z) = z - \dfrac{u}{\frac{1+m}{2m} - A_2u}$ を基に 4 次の最適な 1 点反復解法を導く。

命題 6. $\phi(z) = z - \dfrac{u}{\frac{1+m}{2m} - A_2u}$ と 次の$\psi(z)$

(i) $\psi(z) = z - mu$, (ii) $\psi(z) = z - \dfrac{2m^2}{m-1}A_2u^2$,

(iii) $\psi(z) = z - \dfrac{m-1}{2A_2}$, (iv) $\psi(z) = \phi(z)$

に対し

$$\Phi(z) = \phi(z) - \frac{1}{3}\phi'(z)[z - \psi(z)]$$

は以下の 4 次最適解法を与える。

$$\text{(i)}\quad \Phi(z) = z - \frac{\left(-\dfrac{1}{4m}(m+1)(m-7) - 3A_2u + 3mA_2^2u^2 - 3mA_3u^2\right)u}{3\left(\dfrac{m+1}{2m} - A_2u\right)^2}. \tag{3.10}$$

$$\text{(ii)}\quad \Phi(z) = z - \frac{\left(\dfrac{m+1}{2m} - \dfrac{1}{6}(m+7)A_2u + \dfrac{2m^2}{m-1}A_2u^3(A_2^2 - A_3)\right)u}{\left(\dfrac{m+1}{2m} - A_2u\right)^2}. \tag{3.11}$$

$$\text{(iii)}\quad \Phi(z) = z - \frac{\left(\dfrac{m+1}{2m} + \dfrac{1}{2}(m-3)A_2u - \dfrac{(m-1)^2(m+1)}{24m^2A_2u} - \dfrac{(m-1)A_3u^2}{2A_2u}\right)u}{\left(\dfrac{m+1}{2m} - A_2u\right)^2}. \tag{3.12}$$

$$\text{(iv)}\quad \Phi(z) = z - \frac{\left(\dfrac{(m+1)(m+2)}{6m^2} - \dfrac{m+1}{m}A_2u + (2A_2^2 - A_3)u^2\right)u}{\left(\dfrac{m+1}{2m} - A_2u\right)^3}. \tag{3.13}$$

(Petković and Tričković[5])

次に定理 2 を用いて、4 次最適解法を求める。

命題 7. 次の$\phi(z)$

(i) $\phi(z) = z - \dfrac{1}{2}m(3-m)u - m^2A_2u^2$

(ii) $\phi(z) = z - \dfrac{u}{\dfrac{1+m}{2m} - A_2u}$

(iii) $\phi(z) = z - \dfrac{\sqrt{m}u}{\sqrt{1-2A_2u}}$

(iv) $\phi(z) = z - \dfrac{1}{2}m(m+1)u + \dfrac{(m-1)^2}{4A_2}$

に対し

$$\Phi(z) = z - \frac{z - \phi(z)}{1 - \dfrac{1}{3}\phi'(z)}$$

はそれぞれ以下の 4 次最適解法を与える。

$$\text{(i)}\ \Phi(z) = z - \frac{m\left(\frac{1}{2}(3-m) + mA_2u\right)u}{\frac{1}{6}(4-m)(m+1) - m(1-m)A_2u + m^2A_3u^2 - 2m^2A_2^2u^2}. \tag{3.14}$$

$$\text{(ii)}\ \Phi(z) = z - \frac{3\left(\frac{1+m}{2m} - A_2u\right)u}{\frac{(2m+1)(m+1)}{2m^2} - 3\frac{m+1}{m}A_2u + 3A_3u^2}. \tag{3.15}$$

(Farmer and Loizou[1])

$$\text{(iii)}\ \Phi(z) = z - \frac{3\sqrt{m}u(1-2A_2u)}{2(1-2A_2u)\sqrt{1-2A_2u} + \sqrt{m}(1-3A_2u+3A_3u^2)}. \tag{3.16}$$

$$\text{(iv)}\ \Phi(z) = z - \frac{\frac{1}{2}m(m+1)u - \frac{1}{4A_2}(m-1)^2}{\frac{1}{2}(m+1) - \frac{1}{3}m(m+1)A_2u + \frac{A_3}{4A_2^2}(m-1)^2}. \tag{3.17}$$

4. 数値例

前節で導いた解法の有効性を数値例を用いて検証する。テスト問題は、多重度の異る表 4.1 の 4 問を用いる。比較のため Traub の 3 次基本系列 (例 4(i))、Hansen and Patrick 法 (例 4(ii))、Ostrowski 法、Traub の 4 次基本系列 (例 5) も取り上げる。

表 4.1. テスト問題

$f(z)$	m	α	z_0
$(z^2-2z+2)^2(z^2+2z+3)^3$	2	$1+i$	$2+2i$
$(z^2-2z+2)^2(z^2+2z+3)^3$	3	$-1+\sqrt{2}i$	$-2+2i$
$(z^2-2z+2)(z^2+2z+3)^4$	4	$-1+\sqrt{2}i$	$-2+2i$
$(z^2-2z+2)^{2.5}(z^2+2z+3)$	2.5	$1+i$	$2+2i$

計算は fortran90(Fortran Power Station) を用いて、複素倍精度で行なう。以下の表では、

$$|z_n - \alpha| < 10^{-15}$$

を満たす最小の n とそのときの誤差の絶対値 $|z_n - \alpha|$ を示す。表において exact は、誤差 0 を表す。

表 4.2.　3 次最適解法 (命題 2,3,4)

formula	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2.5$
例 4 (i)	5　exact	4　exact	4　$.22 \times 10^{-15}$	4　exact
例 4 (ii)	5　exact	4　exact	4　exact	4　exact
Ostrowski	4　exact	4　$.22 \times 10^{-15}$	3　exact	4　exact
(3.1)	5　exact	4　$.22 \times 10^{-15}$	4　exact	4　exact
(3.2)	6　$.11 \times 10^{-15}$	5　$.22 \times 10^{-15}$	4　$.22 \times 10^{-15}$	5　exact
(3.3)	5　exact	4　$.22 \times 10^{-15}$	4　$.22 \times 10^{-15}$	4　exact
(3.4)	5　$.11 \times 10^{-15}$	4　$.31 \times 10^{-15}$	4　$.22 \times 10^{-15}$	4　$.11 \times 10^{-15}$
(3.5)	4　$.50 \times 10^{-15}$	4　$.22 \times 10^{-15}$	4　$.22 \times 10^{-15}$	4　exact
(3.6)	4　exact	3　$.31 \times 10^{-15}$	3　exact	3　exact

表 4.3.　4 次最適解法 (命題 5,6)

formula	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2.5$
例 5	4　$.11 \times 10^{-15}$	4　$.22 \times 10^{-15}$	3　exact	4　exact
(3.7)	4　$.25 \times 10^{-15}$	4　$.50 \times 10^{-15}$	3　exact	4　exact
(3.8)	5　exact	4　$.50 \times 10^{-15}$	3　exact	4　$.22 \times 10^{-15}$
(3.9)	4　$.11 \times 10^{-15}$	4　$.22 \times 10^{-15}$	3　$.22 \times 10^{-15}$	4　exact
(3.10)	4　exact	3　$.40 \times 10^{-15}$	3　$.22 \times 10^{-15}$	3　exact
(3.11)	4　exact	3　exact	3　exact	3　exact
(3.12)	4　exact	3　$.31 \times 10^{-15}$	3　$.22 \times 10^{-15}$	4　exact
(3.13)	4　exact	3　$.25 \times 10^{-15}$	3　exact	3　exact

表 4.4.　4 次最適解法 (命題 7)

formula	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 2.5$
(3.14)	4　exact	3　$.50 \times 10^{-15}$	3　exact	3　$.90 \times 10^{-15}$
(3.15)	4　exact	3　$.22 \times 10^{-15}$	3　$.22 \times 10^{-15}$	3　exact
(3.16)	3　$.11 \times 10^{-15}$	3　$.22 \times 10^{-15}$	3　$.22 \times 10^{-15}$	3　exact
(3.17)	4　$.50 \times 10^{-15}$	4　$.31 \times 10^{-15}$	3　$.22 \times 10^{-15}$	4　exact

これらの表から以下のことがいえる。

- 3.2 節で得られた解法はすべて、表 4.1 の方程式に対し要求精度の範囲内の解を与えている。
- 3 次最適解法の中で最良の結果を与えるものは、Schröder 法を Newton 法で改良した (3.6) である。
- 4 次最適解法の中で最良の結果を与えるものは、Ostrowski 法に定理 2 を適用して得られる (3.16) である。
- 定理 1 において$\psi(z) = z - (m-1)/(2A_2)$ として得られる解法 – (3.2) と (3.8) – は、収束次数が同じ他の解法に比べ精度が少し劣る。
- 定理 1 において$\phi(z) = z - mu$ とし$\psi(z)$ を $f(z), f'(z), f''(z)$ を用いる 2 次または 3 次解法とすると、得られる解法は 3 次最適解法である。$\psi(z)$ が 3 次解法のときは、得られる解法の数値結果は$\psi(z)$ の結果に似ているが、演算量の点で$\psi(z)$ に劣る。

5. おわりに

定理 1,2,3 は、収束次数の異なる反復法の間の相互関係を明らかにするとともに、既知の反復法から、新しい高次の反復法を導出する。今回は、これらの定理を多重解を持つ方程式の 1 点反復解法に適用した。これ以外の反復法への適用は今後の課題である。

参考文献

[1] M. R. Farmer and G. Loizou, An algorithm for the total, or partial, factorization of a polynomial, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 82(1977), 427-437.

[2] E. Hansen and M. Patrick, A family of root finding methods, Numer. Math. 27(1977), 257-269.

[3] N. Osada, An optimal multiple root-finding method of order three, J. Comput. Appl. Math. 51(1994), 131-133.

[4] A. M. Ostrowski, *Solution of Equations in Banach Spaces* (Academic Press, New York, 1973)

[5] M. S. Petković and S. Tričković, On zero-finding methods of the fourth order, J. Comput. Appl. Math. 64(1995), 291-294.

[6] E. Schröder, Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Ann. 2(1870), 317-365.

[7] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations* (Chelsea, New York, 2nd ed. 1982)