

Title	方程式 $x^d=0$ に対するregula falsiの大域収束性について (科学技術における数値計算の理論と応用II)
Author(s)	山岸, 義和
Citation	数理解析研究所講究録 (1997), 990: 244-249
Issue Date	1997-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/61081">http://hdl.handle.net/2433/61081</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

方程式  $x^d = 0$  に対する regula falsi の大域収束性について

龍谷大学 理工学部 数理情報学科 山岸 義和 (YAMAGISHI Yoshikazu)

一変数関数  $p(x)$  の零点を求めるアルゴリズム SOR regula falsi は、漸化式

$$x_{i+2} = x_i - \lambda p(x_i) \frac{x_i - x_{i+1}}{p(x_i) - p(x_{i+1})} \tag{1}$$

で定義される。ただし  $\lambda$  は実定数である。この漸化式は平面の写像

$$(x, y) \mapsto \left( y, x - \lambda p(x) \frac{x - y}{p(x) - p(y)} \right)$$

の反復と同等である。

$p(x) = x^d$  のとき、変数変換  $x = u, y = uv$  によって平面の力学系

$$(u, v) \mapsto (uv, f(v)), \quad f(v) = \frac{1}{v} \left( 1 - \frac{\lambda}{1 + v + \dots + v^{d-1}} \right)$$

と同等である。つまり、漸化式 (1) の初期値  $x_0, x_1$  に対して  $v = x_1/x_0$  とおけば

$$x_n = x_0 \prod_{k=0}^{n-1} f^k(v), \quad n \geq 1$$

が成り立つ。

$\lambda = 1$  のとき (ふつうの regula falsi)、一次元力学系  $f$  は区間  $[0, 1]$  上に不動点  $\alpha$  を持つ。  $d$  位の臨界点  $x = 0$  が  $\alpha$  に吸引されることから、  $\alpha$  の安定領域  $A(\alpha)$  は完全不変であり、  $A(\alpha)$  以外の Fatou 成分は全て単連結であることがわかる。実験によれば、すべての臨界点は  $\alpha$  に吸引されるため、  $f$  の Julia 集合は測度零の Cantor 集合である。これにより、方程式  $x^d = 0$  に対する regula falsi の大域収束性が得られる。

収束の速さ

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |f^k(v)|$$

をパラメータ  $\lambda$  の函数 (一般に一価函数でない) とみなしてそのグラフを描いたのが図 1 上 ( $d = 2, 1 \leq \lambda \leq 2$ ), 図 2 上 ( $d = 3, -0.3 \leq \lambda \leq 2.2$ ), 図 3 上 ( $d = 4, -0.3 \leq \lambda \leq 2.2$ ) である。水平軸は  $\varphi = 0$  を表す。また、写像  $(\lambda, v) \mapsto (\lambda, f(v))$  のアトラクタを描いたのが図 1 下 ( $d = 2$ ), 図 2 下 ( $d = 3$ ), 図 3 下 ( $d = 4$ ) である。

$d = 2, \lambda(\lambda - 2) > 0$  とする。このとき、  $f$  は安定な二周期軌道  $\{0, \infty\}$  をもち、次が成り立つ。

**Proposition 1**  $v$  の軌道が  $\{0, \infty\}$  に吸引されるとき、  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(v) = \infty$  ならば  $x_{2n}$  は有限な極限値を持ち  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \infty$  である。  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(v) = \infty$  ならば  $x_{2n+1}$  は有限な極限値を持ち  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \infty$  である。

(proof)  $v_n = f^n(v)$  とおく。  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(v) = \infty$  の場合

$$x_{2n} = x_0(v_0 v_1) \cdots (v_{2n-2} v_{2n-1}) = x_0 \left( 1 - \frac{\lambda}{v_0 + 1} \right) \cdots \left( 1 - \frac{\lambda}{v_{2n-2} + 1} \right).$$

ここで

$$v_{2n} = f(f(v_{2n-2})) = (1 - \lambda)v_{2n-2} + O(1), \quad (n \rightarrow \infty)$$

より級数  $\sum_n \left| \frac{\lambda}{v_{2n+1}} \right| < \infty$  が絶対収束するから  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$  は収束する。  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(v) = \infty$  の場合も同様である。 ■

$d = 2$ ,  $(23 - \sqrt{17})/16 = 1.1798 < \lambda < 1.185$  のとき、 $\varphi = \varphi(\lambda)$  は二価函数である。とくに  $\lambda = (23 - \sqrt{17})/16$  のとき  $f$  の Julia 集合は区間  $I \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  であり、 $f$  は  $I$  上で絶対連続なエルゴード不変測度  $d\mu$  をもつから、 $\varphi$  の一方の値は  $\int_I \log |v| d\mu$  で表される。 $f$  の安定な固定点を  $\alpha \in \mathbb{R}$  とすれば  $\varphi$  のもう一方の値は  $\log |\alpha|$  である。以下に示すように、これら二つの収束の速さは一致する。

**Proposition 2**  $f$  を実係数二次有理函数とし、 $f$  の Julia 集合が区間  $I \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  であるとする。 $f$  の安定固定点を  $\alpha \in \mathbb{R}$  とする。このとき  $I$  上の  $f$  の絶対連続なエルゴード不変測度を  $d\mu$  とすると、

$$\log |\alpha| = \int_I \log |v| d\mu$$

が成り立つ。

(proof) 不変測度  $d\mu$  を計算するために、 $f$  が Blaschke 積と semi-conjugate であることをみよう。 $f$  の臨界点のひとつ  $c$  によって  $I = [f(c), +\infty) \cup [-\infty, f(f(c))]$  と表される。Möbius 変換

$$v = M(y) = \alpha \frac{y - b}{y - d}$$

が  $M(-1) = f(c)$ ,  $M(1) = f(f(c))$ ,  $M(\infty) = \alpha$  をみたすように係数  $b, d$  を定める。 $g(y) = M^{-1}(f(M(y)))$  とおく。Joukowski 写像

$$j(w) = \frac{1}{2} \left( w + \frac{1}{w} \right)$$

と、てきとうな Blaschke 積

$$B(w) = w \frac{w - a}{-aw + 1}$$

によって

$$g \circ j = j \circ B$$

が成り立つ。Blaschke 積  $B$  は原点を固定点にもつから、 $B$  は単位円周上の Lebesgue 測度を保つ。したがって区間  $[-1, 1]$  上の確率測度

$$\frac{dy}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

は  $g$  で不変である。簡単な複素積分の計算により

$$\int_I \log |v| d\mu = \int_{-1}^1 \log \left| \alpha \frac{y - b}{y - d} \right| \frac{dy}{\pi\sqrt{1-y^2}} = \log |\alpha|$$

が成り立つ。 ■

一般の  $d \geq 2$  で、 $|\lambda - 1| > 1$  のとき、 $f$  の二周期軌道  $\{0, \infty\}$  は安定だが、それ以外に安定軌道が存在することもある。方程式  $x^3 = 0$  に対する SOR regula falsi で、二周期軌道  $\{0, \infty\}$  以外の安定周期軌道を  $f$  が持つような複素パラメータ  $\lambda$  の存在を複素領域  $|\lambda - 1| > 1$ ,  $1.8 \leq \Re(\lambda) \leq 1.9$ ,  $0.7 \leq \Im(\lambda) \leq 0.8$  の範囲で示したのが図 4 であり、マンデルブロート集合の形状をしている。



图1 d=2

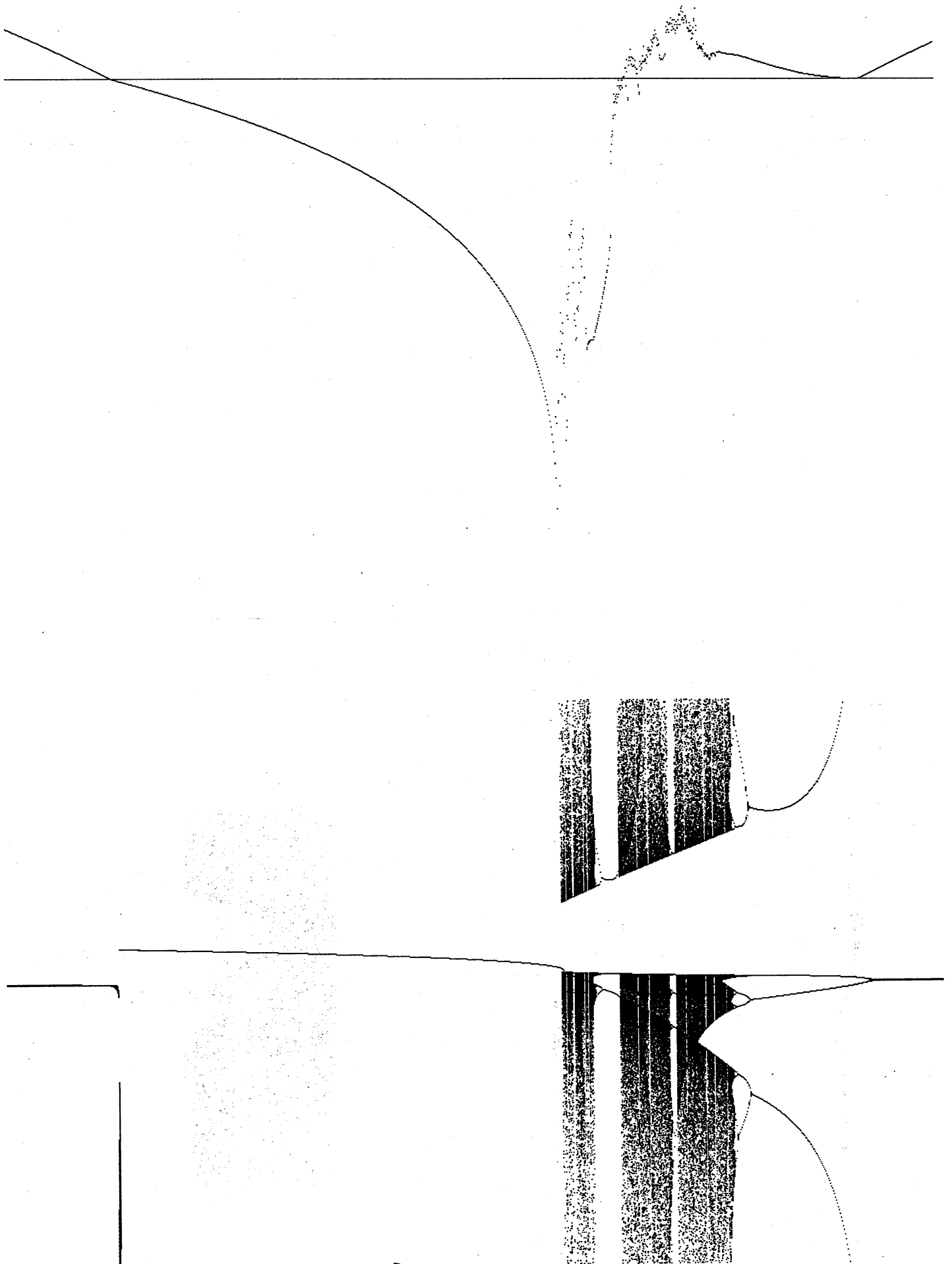


图 2.  $d=3$

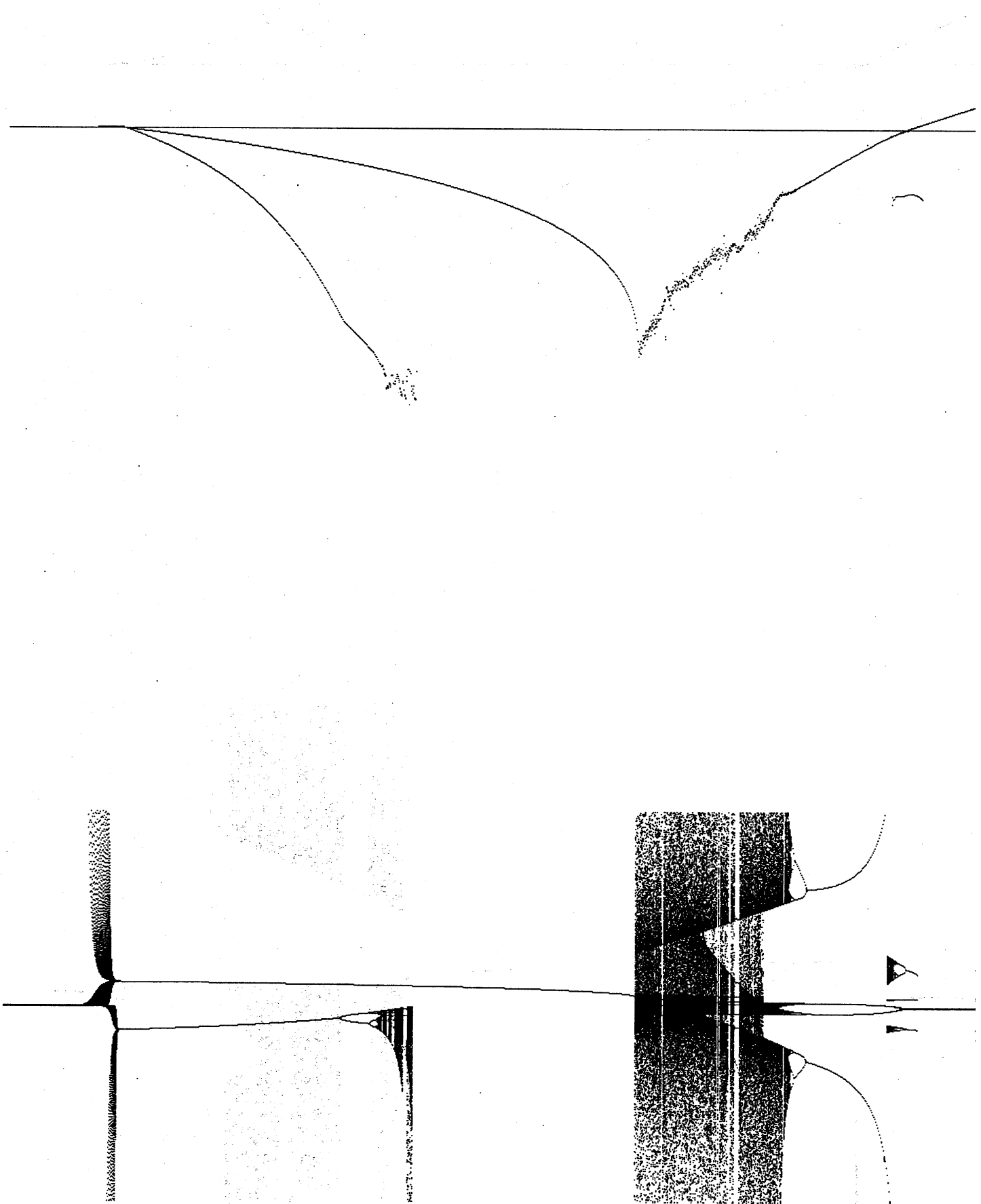


图3.  $d=4$

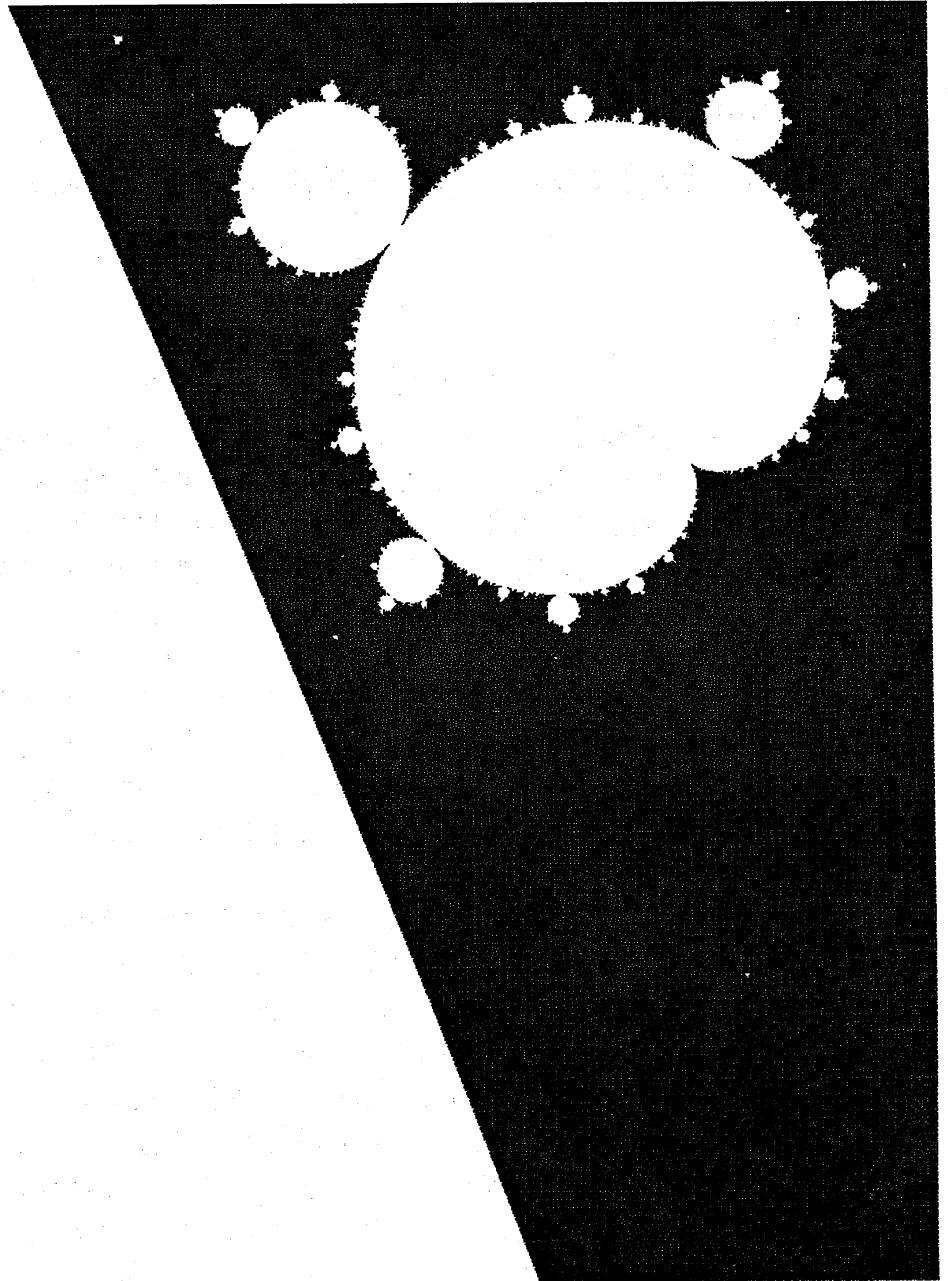


图 4