数理解析研究所講究録
991巻 1997年 168-170

群上の方程式、関数について

山口大学教育学部
飯寄信保 (Iiyori, Nobuo)

今回の講演において、群上の方程式、関数を扱う上での基本的な道具について解説した。その内容については、本研究の共同研究者である阿部晴一氏の熊本大学における修士論文に極めて詳しく解説されているのでそちらの方を参照して下さい。以下では、簡単ですがなぜこのようなことをはじめたかについての理由の一つについて説明したいと思います。

Gを有限群とします。$f(x)=x^n$を考えてやると自然にfはGからGへの写像$(g \mapsto g^n)$と考えられます。よく知られた事実でありますが $\#f^{-1}(1)/(|G|,n) \in \mathbb{Z}_{>0}$ が成立します。今この$\#f^{-1}(1)/(n,|G|)$をφ_nとかくとします。W. Feitは"φ_nはいかなる意味をもつか"という問題を提出しています。我々はこの問題を有限群の単純群の分類と独立に考えたいわけです。そこでの手法は今のところ2つに分れているのですが、その1つはGを$GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{R})$などに埋め込み、そこで幾何的考察をするものです。今回はこれについては説明を略させてもらいますが、先にふれた修論に多少解説してあります。

さてφ_n又は(φ_n, n)を考える上で$L_n=\{x\in G \mid x^n=1\}$を考えることは自然なことといえるでしょう。そこで$\mathcal{F}=\{L_n \mid n \mid |G|\}$を考えることとします。これは、G上に自然に位相を与えることになります。この位相を直接考えても良いのですが、多少の理由より、少し一般化したものを考えた方がより計算し易すくなります。即ち$SE_1(H;G)=\{f(x) \mid f(x)=a_1x^{e_1}a_2x^{e_2}\cdots x^{e_r}a_0$, $e_i\in\mathbb{Z}-\{0\}$, $a_i\in H^\#$ $(i=2,\cdots,r)$ $a_1,a_0\in H$, $a_1a_2\cdots a_ra_0=1\}$（但し$H<G$）とおき$f^{-1}(1)^\#$をclosed setとする最とも弱い位相を$G^\#$上に考えるわけです。この場合、Gに有限性の条件を与える必要はありません。先にふれたFeitの問題は、"$SE_1(H;G)$による$G^\#$上の位相と群Gの関係を明らかにせよ。"と書き直せます。例えば"$SE_1(G,G)$で位相を考えた場合$G^\#\approx H^\#$かつGが可換有限群ならば$G\simeq H$"などは直ぐに検証できます。又Gが単純群であるならば$G^\#$は$SE_1(G;G)$による位相で離散的になります。又$SE_1(G;G)$による位相で離散的な群は群構造上で著じるしい特長があることがわかり大まかに分類されている。これらを導びく上で重要なことは$SE_1(H;G)$を調べることであり、これについて今回の講演で話しをさせてもらったわけです。この$SE_1(H;G)$について調べることは、先にふれた$GL_n(\mathbb{C})$などに埋め込みを考えた時にも非常に大切であることが解っており、$SE_1(H;G)$などを主軸にすえた群上の方程式、関数の理論を現在調べている

わけです。$G^\#$上の位相については現在準備中の論文にて解説する予定です。

以上