数理解析研究所講究録
993巻 1997年 1-10

超音波における非線形現象

電通大 電子工　鎌倉 友男 (Tomoo Kamakura)
E-mail kamakura@electra.ee.uec.ac.jp

1. はじめに

われわれが日常経験する音の大きさは, 大気圧に比べれば極めて小さく, 音波の伝搬過程を線形化して記述している. しかし, 音波は媒質密度の粗密を伴って伝搬し, 本来, 音速は媒質の密度とともに増すので, 波面は伝搬につれて次第に急峻化し, 衝撃波が形成されるようになる. ことに, 爆発に伴うような大きな圧力変化では, 急峻な波面が容易に形成され, その波面を境に圧力, 密度が急激に変化する極限領域ができる. このような強い衝撃波と, 微小振幅の仮定から出発し, 線形理論に立脚した従来の音響学を補完する橋渡し的存在が, **非線形音響学** (Nonlinear Acoustics) の位置づけで, 2 次の非線形性が主役を演じる, 弱非線形の波動が研究の対象である. 表題に掲げた非線形現象とは, この研究分野に属する.

ところで, 非線形音響学の分野では, **波形歪み** (waveform distortion), **音響流** (acoustic streaming), そして**音響放射圧** (acoustic radiation pressure) が主要な 3 本柱で, また, クラシカルな問題として議論されてきており, 多くの基礎および応用研究がなされてきた[1)~3)]. 系が非線形であり, そこに正弦波交流を入力すれば, 高調波のみならず直流成分が発生し得ることは明らかであって, 前者は波形歪み, 後者は音響流と放射圧を引き起こす. このような非線形特有の現象は, いままではどちらかといえば, 個々の問題として個別に議論されてきたようであるが[4)], もとをたどれば, 流体粒子の非線形な振る舞いから派生するものであって, 流体力学の基礎方程式を出発として統一的に議論できると考えられる. そこで, 本報告では, 上記の考えを踏まえて, 波形歪み, 音響流, そして放射圧の現象を紹介する.

1.　基礎方程式

等方, 均質性な粘性流体内の粒子の運動方程式は, オイラー (Euler) 系で記述して

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{f} = \rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} \right] = -\nabla P + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{2}$$

$$\rho T\left[\frac{\partial S}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)S\right]=\nabla\cdot(\kappa\nabla T)+\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2+\zeta(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2 \tag{3}$$

$$P=P(\rho,S),\quad S=S(P,T) \tag{4}$$

で完結する. ここで, ρ は媒質密度, $\boldsymbol{v}$ は粒子速度, P は圧力, T は温度, S はエントロピー, η と ζ はそれぞれ, ずり粘性と体積粘性, κ は熱伝導係数, である. 式 (2) は単位体積当たりにはたらく力 (慣性力) $\boldsymbol{f}$ の釣り合いを表しており, ナヴィエ・ストークス (Navier–Stokes) の運動方程式, である.

音は密度の変化として伝わる粗密波で, 圧力は静圧 P_0 のまわりを微小変化し, これが音圧 p である. 音圧と密度の変化 ρ' がそれぞれ

$$P=P_0+p,\quad \rho=\rho_0+\rho' \tag{5}$$

の関係があり, 音場解析では $|p|\ll P_0$, $|\rho'|\ll\rho_0$, また別の表現をすれば

$$\frac{|p|}{P_0}\sim\frac{|\rho'|}{\rho_0}\sim\frac{|\boldsymbol{v}|}{c_0}(=M)\ll 1 \tag{6}$$

の条件が成り立つ. ここで, $|\ \ |$ は各変量の大きさを表すものとする. ふつう, 音響学で問題になるような音圧では, せいぜい音響マッハ数 M が 10^{-5} 程度で, M の 1 次の量のみを考慮した線形化を行って波動方程式を導き, 音場の特性を評価する. しかし, 音圧が高くなると必ずしもこのような線形化の取扱いは適切でなく, M の 2 次の項まで含めて音場解析をしなければならなくなる. これが, 非線形音響学の基本的な考え方である[5]).

式 (5) を式 (1)~(4) に代入して式 (6) を考慮し, 2 次の非線形項まで含めてまとめると, 次の式を得る.

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\underbrace{\nabla\cdot(\rho'\boldsymbol{v})}_{\text{nonlinear}}=0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{f}=\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\underbrace{\rho'\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}}_{\text{nonlinear}}+\underbrace{\rho_0(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}}_{\text{nonlinear}}=-\nabla p+\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{v}-\eta\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v} \tag{8}$$

$$\rho'=\frac{p}{{c_0}^2}+\frac{\kappa}{{c_0}^2}\left(\frac{1}{c_{\mathrm{v}}}-\frac{1}{c_{\mathrm{p}}}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{v}-\underbrace{\frac{1}{2{c_0}^6}\left(\frac{\partial^2P}{\partial\rho^2}\right)_S p^2}_{\text{nonlinear}} \tag{9}$$

ここで, c_0 は微小振幅音波の音速, c_{v}, c_{p} はそれぞれ定積比熱, 定圧比熱, である. 式 (7)~(9) に現れる非線形項で, それ特有の現象が見られるが, 本稿では, 高調波成分と直流成分の発生を取り上げる. 前者は波形歪み, 後者は音響流と放射圧を誘起することになる.

2. 音波ビームの波形歪み

式 (7)~(9) から音圧に関して 1 つの式にまとめるため, 以下の仮定を行う. まず, 音場は渦を伴う横波は存在せず, 縦波のみの場とする. 横波は, たとえ発生しても, 物体表面か

らの距離 z をもって指数関数 $e^{-\sqrt{\omega/2\nu}z}$ ($\nu=\eta/\rho_0$ は流体媒質の動粘性係数, ω は音波の角周波数) で減衰し, 境界層 $\delta=\sqrt{2\nu/\omega}$ 以上離れれば横波はほとんど消滅する, と考えてよい. 水を例にとると, 動粘性は $10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ であって, 100kHz の周波数での境界層は計算上 2μm 程度になり, 波長の 1.5cm に比べれば極めて薄い層内のみ横波が存在することになる. 波動の伝搬の議論においては, したがって, $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$ の条件を満たす縦波の振る舞いについてのみ述べる.

次の仮定は, 粘性によるエネルギー散逸や非線形性が弱い, 弱散逸系, 弱非線形性の音場を解析の対象とすることである. この条件下において多少の演算を施せば, 音圧の式にまとめられ

$$\nabla^2 p-\frac{1}{{c_0}^2}\left(1-\frac{b}{\rho_0{c_0}^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\frac{\beta}{\rho_0{c_0}^4}\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2}-\nabla^2\mathcal{L}-\frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial t^2} \tag{10}$$

の非線形波動方程式を得る. ここで, $b=\zeta+4\eta/3+\kappa(1/c_\mathrm{v}-1/c_\mathrm{p})$ は音波吸収に係わる物質定数, $\beta=1+(\partial^2P/\partial\rho^2)_S/\rho_0{c_0}^2$ は媒質の非線形性に係わる物質定数で, **非線形パラメータ** (nonlinearity parameter) と呼ばれている. また, 式 (10) の中の $\mathcal{L}$ は, 音波の運動エネルギー密度 $e_\mathrm{k}=\rho_0\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}/2$ と位置エネルギー密度 $e_\mathrm{p}=p^2/2\rho_0{c_0}^2$ の差のラグランジュ密度 (Lagrangian density) であって

$$\mathcal{L}=e_\mathrm{k}-e_\mathrm{p} \tag{11}$$

で与えられる. 超音波ビームにおいては, 音源からある程度離れ, 進行波であると, $e_\mathrm{k}\simeq e_\mathrm{p}$, よって, $\mathcal{L}\simeq 0$ である. この波が音軸 z 方向に進むとして, 遅れ時間

$$t'=t-\frac{z}{c_0} \tag{12}$$

を導入し, 式 (10) を書き直す. そして, その時間軸上での音圧を改めて p と置けば

$$\nabla_\perp{}^2 p+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{2}{c_0}\frac{\partial^2 p}{\partial z\partial t'}+\frac{b}{\rho_0{c_0}^4}\frac{\partial^3 p}{\partial t'^3}=-\frac{\beta}{\rho_0{c_0}^4}\frac{\partial^2 p^2}{\partial t'^2} \tag{13}$$

を導く. ここで, $\nabla_\perp{}^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ は音軸に垂直な径方向面内の 2 次元ラプラシアンである. $\mathcal{L}\simeq 0$ と見なされるような, 比較的緩やかに音場が変動する領域では, $\partial^2 p/\partial z^2$ の項を式 (13) から除くことができ, 次の近似モデル式を得る.

$$\nabla_\perp{}^2 p-\frac{2}{c_0}\frac{\partial^2 p}{\partial z\partial t'}+\frac{b}{\rho_0{c_0}^4}\frac{\partial^3 p}{\partial t'^3}=-\frac{\beta}{\rho_0{c_0}^4}\frac{\partial^2 p^2}{\partial t'^2} \tag{14}$$

この放物型の非線形偏微分方程式を **KZK の式** (Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov equation) という. 式 (14) は, 左辺の第 1 項が径方向への波の広がりを, また, 第 3 項が散逸を, 右辺の項が非線形性を示し, 波の基本的性質の相互関係を表している. KZK の式の適

用範囲は, 式 (13) の z に関する 2 階微分を除く条件で決まり, これはフレネル近似の成立条件と一致する. したがって, 音源近傍の, いわゆる近距離場の精密な音場解析には向かないが, 遠距離場に近づくにつれ精度は良くなり, 近年では非線形音波ビームのモデル式として多用されている[5].

回折が生じない平面波においては $\nabla_\perp{}^2 p$ の項を除き, t' で 1 回積分して

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{b}{2\rho_0 {c_0}^3}\frac{\partial^2 p}{\partial t'^2} = \frac{\beta}{2\rho_0 {c_0}^3}\frac{\partial p^2}{\partial t'} \tag{15}$$

を得る. これは**バーガースの式** (Burgers' equation) であって, KZK の式は特別な場合としてバーガースの式を含むことになる. KZK の式は, 現在のところ, バーガースの式のように適切な変数変換 (Cole-Hopf 変換) で線形な式に書き下すことができない. このため, KZK の式の解法としては非線形性が弱いならば逐次近似法に基づく線形化が有効となろう. しかし, 非線形性が強いときには数値解析法に頼らざるを得ない.

3. 直流成分

前節での議論は, 時間的に変動する, しかも周期の短い高調波の発生についてであった. つぎに, 音波の伝搬に付随して発生する直流成分について紹介する. ふつう, 音源に正弦波交流の電気信号を加え音波を放射するが, その電気信号には直流成分はない. しかしながら, 発生した音場を 2 次の微小量まで含めると, そこに直流成分として音響流と放射圧の発現を知る.

いま, 静止状態の媒質内で, ある時刻から音波を放射し続けるとする. 時間的に緩やかに変化する slow mode としての粒子速度成分が存在するとして, これを $\boldsymbol{v}_0(\varepsilon t, \boldsymbol{r})$ と, また, 交流成分つまり fast mode の音波成分を $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}(t, \boldsymbol{r})$ として, 粒子速度をこれらの和

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_\mathrm{a} \tag{16}$$

と置く. ここで, ε は 1 よりも十分小さい定数, $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル, である. fast mode に比べて長い時間で音響量を平均すれば (時間平均の記号を $\overline{}$ で表す)

$$\overline{\boldsymbol{v}_\mathrm{a}} = 0, \quad \overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_0 \tag{17}$$

である. このことを考慮して, 式 (7) を時間平均すれば

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{v}_0 + \frac{\overline{\rho' \boldsymbol{v}_\mathrm{a}}}{\rho_0} \right) = 0 \tag{18}$$

を得る. この式の被演算項を

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{v}_0 + \frac{\overline{\rho' \boldsymbol{v}_\mathrm{a}}}{\rho_0} \tag{19}$$

と置けば, この $\boldsymbol{U}$ は, $\rho_0\boldsymbol{U} = \overline{\rho\boldsymbol{v}}$ であるので, 質量の流れに関与する. ふつう, トレーサとしての微粒子を測定媒質内に混入し, そのトレーサの動きを追跡して, 流速の測定を行う場合が多く, したがって, 質量流れの $\boldsymbol{U}$ を観測していることになる[6),7)]. ところで, 音の強さ (intensity) $\boldsymbol{I} = p\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}} = {c_0}^2\rho'\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$ をもって, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{v}_0 + \overline{\boldsymbol{I}}/\rho_0{c_0}^2$ に変形できる. 超音波領域においては, 局所で発生する流れの $\overline{\boldsymbol{I}}/\rho_0{c_0}^2$ は $\boldsymbol{U}$ に比べて $2 \sim 3$ 桁ほど小さく, 十分発展した流れの評価において $\boldsymbol{U} \simeq \boldsymbol{v}_0$ と近似して差し支えない.

式 (16) を式 (8) に代入して, やはり時間に関して平均すると, 次式を得る.

$$\overline{\boldsymbol{f}} = \rho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} + \rho_0(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0 - \rho_0\boldsymbol{F} = -\nabla\,\overline{p} + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0 - \eta\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{v}_0 \tag{20}$$

ここで, $\boldsymbol{F}$ は音波から供給され, 媒質を動かす単位質量当たりの駆動力

$$\boldsymbol{F} = -\overline{\frac{\rho'}{\rho_0}\frac{\partial \boldsymbol{v}_a}{\partial t}} - \overline{(\boldsymbol{v}_a\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_a} \tag{21}$$

である. 式 (20) の $\boldsymbol{F}$ に負号を付けたのは, 粘性による波動エネルギーの散逸で駆動力が発生することを考慮しての理由による. 式 (21) の右辺第 1 項を変形して

$$\overline{\frac{\rho'}{\rho_0}\frac{\partial \boldsymbol{v}_a}{\partial t}} = -\frac{1}{\rho_0}\overline{\frac{\partial \rho'}{\partial t}\boldsymbol{v}_a} = \overline{\boldsymbol{v}_a\nabla\cdot\boldsymbol{v}_a} \tag{22}$$

と表せば, この項は音波の発散成分, すなわち縦波に基づく駆動力である. 一方, 式 (21) の右辺第 2 項は

$$\overline{(\boldsymbol{v}_a\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_a} = \overline{\boldsymbol{v}_a\times(\nabla\times\boldsymbol{v}_a)} - \frac{1}{2}\nabla\left(\overline{\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_a}\right) \tag{23}$$

に書き直せるから, 音波の横波に基づく駆動力である.

以上, 式 (18), (20), そして, 式 (21) が直流成分に対する関係式になる.

3.1 音響流

媒質の動きを追跡するトレーサを利用した実験結果と比較する上で, 質量流れ $\boldsymbol{U}$ を測定することが重要である. 多くの実験では $\overline{\boldsymbol{I}}/\rho_0{c_0}^2 \ll \boldsymbol{U}$ であるから, $\boldsymbol{v}_0 \simeq \boldsymbol{U}$ であり, $\boldsymbol{v}_0$ と $\boldsymbol{U}$ を量的に区別する必要がない. 流れの規模に応じて, 2 つの場合に大別する.

<u>a. 大局的な流れ</u>

この流れは音波ビーム内を主流とした大局的な流れで, Eckart 流れと呼ばれている. 境界から波長以上離れれば音波は縦波のみ存在するので, 駆動力 $\boldsymbol{F}$ の表示式のうち, 回転項 (rotational 成分) は省略できる. よって, Eckart 型の流れの基本式は

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0 = 0 \\ &\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial t} + \boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\overline{p} + \nu\nabla^2\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{F} \\ &\boldsymbol{F} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\overline{\mathcal{L}} + \frac{b}{{\rho_0}^3{c_o}^4}\overline{p\nabla\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

を得る．この式は，非圧縮性流体に対するナヴィエ・ストークスの式に他ならない．

ここで注目することは，$\boldsymbol{F}$ のうち保存力を与える $\nabla\overline{\mathcal{L}}$ は音響流の発生に何ら関与しないことである．これは，流れが非圧縮性の条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0=0$ を満たさなければならない，つまり流れ出るだけの流体の量は流れ入るということで，流れは渦を伴って発生する．式 (24) のナヴィエ・ストークスの式の回転をとって

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{v}_0+\nabla\times(\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0)=\nu\nabla^2\nabla\times\boldsymbol{v}_0+\nabla\times\boldsymbol{F} \tag{25}$$

からも説明される．すなわち，この場合 $\nabla\times\nabla\overline{\mathcal{L}}\equiv 0$ からである．

単位質量あたりの力 $\boldsymbol{F}$ は，超音波の波動エネルギーが散逸する過程で媒質に供給され，それが媒質を動かす駆動力になっている．エネルギー損失があれば必ずこれに抗する力が媒質に作用し，これが音響流の駆動力になるのである．slow mode の流れに対して音場は定常とみてよいので，正弦波ビームの駆動力は，式 (24) から保存力を除き

$$\boldsymbol{F}=\frac{2\alpha}{\rho_0 c_0}\overline{\boldsymbol{I}} \tag{26}$$

で表される．ここで，$\alpha=b\omega^2/2\rho_0{c_0}^3$ は音波の吸収係数である．音波の振幅が大きくなると，前節で述べたように波形が歪んで多くの高調波が発生する．一般に，周波数が高いほど波動エネルギーの損失が大きくなるので，波形が歪んだ音波ビームにおいては，単に高調波のみを考慮した線形理論の予測をはるかに超えて駆動力が増し，音響流の速度も増す．音源から音波を放射したとほぼ同時に駆動力が生じ，その力によって媒質がビーム内を主流として大局的にゆっくりと動き出す．これが音響流で，特に Eckart 型の流れである．なお，$\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla\boldsymbol{v}_0$ は流れの対流を表す非線形項であり，この項はレイノルズ数の大きな，大局的な音響流では省くことは適切ではない[4),8)]．

b.　境界層内での流れ

例えば，円柱棒をその軸の垂直方向に正弦駆動して振動させ，粘性流体内に波を誘起させると，その棒の近傍に渦を伴って定常の微小流れが観測される．この現象は Schlichting 流れとして知られ，多くの研究がなされてきた[6)]．棒と流体との間で形成される厚さ δ の境界層内で音波の横波成分は急激に減衰するため，音波エネルギーはその狭い空間で減衰して駆動力が発生する．縦波は，たとえ発生しても棒の寸法程度では距離減衰が小さく，駆動力への寄与は無視できる．このように，Schlichting 流れの駆動力は，Eckart 流れの駆動力の発生機構と本質的に異なる．

Schlichting 流れの支配式は，局所流れの効果が小さく，定常流であるとして，式 (24) の第 1, 2 式と，駆動力の式 (21)~(23) から

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0=0\\&\nu\nabla^2\nabla\times\boldsymbol{v}_0=-\nabla\times\boldsymbol{F}\\&\nabla\times\boldsymbol{F}=-\nabla\times\left(\overline{\boldsymbol{v}_a\nabla\cdot\boldsymbol{v}_a}+\overline{(\boldsymbol{v}_a\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_a}\right)\simeq-\nabla\left(\overline{\boldsymbol{v}_a\times\nabla\times\boldsymbol{v}_a}\right)\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

になる．円柱棒を振動させるのではなく，音場内に円柱棒を挿入しても同様な流れが，また，円柱の代わりに剛球や気泡の周りにも流れが観測される．特に，気泡が入射音波で共振するようなとき，振動速度が大きくて境界層の効果が現れ，気泡の外側のみならず内側でも微小流れが発生する，との報告がある[9]．

境界層内の流れはその層外にまで広がる．音響管内に定在波をたてると，それに並行して，節と腹で循環するスケールの大きい定常流れが観測され，これを Rayleigh 型の流れと呼んでいる．境界層外では横波は存在せず，また，定在波内での縦波の減衰が無視できるので駆動力はなく，境界層外での流れは

$$\nu\nabla^2\nabla \times \boldsymbol{v}_0 = 0 \tag{28}$$

を満たす．Rayleigh 型の流れは，結局，式 (27) と (28) を境界層の内外で適切な境界条件をもって解けばよいことになる．この流れの代表例としてクント (Kundt) 管内で発生する循環流があげられる．

3.2　放射圧

弾性体や流体中の各部分にはたらく力には，その部分の体積に比例する力と，相隣り合う媒質の間の境界面を通して面積に比例してはたらく力があり，前者を体積力，後者を面積力という．$\overline{\boldsymbol{f}}$ は音波から媒質に供給される直流の体積力で，これが音響流を誘起する駆動力になった．面積力の代表が流体内の面にはたらく圧力であり，音の放射圧はこの圧力に基づくものである．

いま，均質の媒質内で，仮想面 A, B を通して音波が入射していると考える．音圧 p は仮想面に対して垂直に作用し，しかも音波はその面の存在で乱れることもないと，面の両側から作用する力は同じ大きさで釣り合っている．たとえ，圧力が仮想面 A, B の位置で異なっても，それぞれの面の両端で釣り合う限り，面全体には何ら力は作用しない．一方，例えば異なる音響インピーダンスの境界で音波の反射が起こるようであると，音圧が面を境に異なる大きさになるから，その差に相当する力が面に作用することになる．この考えに従えば，対象とする面 (物体の表面) S_0 上で音圧を積分すれば，音波の物体に与える力が得られる．

$$\boldsymbol{F}_0 = \overline{\iint_{S_0} p(-\boldsymbol{n})dS} = -\iint_{S_0} \overline{p}\boldsymbol{n}dS \tag{29}$$

ここで，$\boldsymbol{n}$ は表面上の外向き法線ベクトルである．

ところで，音波から媒質に作用する力 $\boldsymbol{F}$ の式 (24) において，2 つの項の大小関係を見積もってみる．第 1 項の $(1/\rho_0)\nabla\overline{\mathcal{L}}$ は代表的な長さ l でラグランジュ密度の変化をみるものであり，音響インピーダンスが大きく変化する媒質間では反射は強く起こり，エネルギー密度の空間変化 $\overline{\boldsymbol{I}}/\rho_0 c_0 l$ は大きい．これに比べて第 2 項の $(b/\rho_0{}^3 c_0{}^4)\overline{p\nabla(\partial p/\partial t)} \simeq 2\alpha\overline{\boldsymbol{I}}/\rho_0 c_0$ であるので，$1/l$ と α の大小関係で評価できる．音響インピーダンスが急激に変われば，音

波吸収に起因する力よりも保存力による効果が大きい．以上より，一般に，音圧の増大とともにまず放射圧が発生し，さらに音圧を増すとその上に音響流も発生する．しかし，この発生の順序は境界面の音波の反射の強さに依存し，もし反射が弱いようであれば，音響流と同程度の音圧レベルで放射圧が発生することにもなる．

ここで，音響流がたとえ起きても十分小さく，$\boldsymbol{v}_0$ の発生が無視できるとしよう．すると，式 (20) と式 (24) の駆動力から

$$\nabla\overline{p} = -\nabla\overline{\mathcal{L}} \tag{30}$$

よって，$\overline{p} = -\overline{\mathcal{L}} + C$ (C は定数) を導き，式 (29) に代入することで，音波が物体に与える力，つまり放射圧として

$$\boldsymbol{F}_0 = \iint_{S_0} \overline{\mathcal{L}}\boldsymbol{n}dS = \iint_{S_0} \left(\overline{e_\mathrm{k}} - \overline{e_\mathrm{p}}\right)\boldsymbol{n}dS \tag{31}$$

の表示式を得る．ここで，C の面積分は $\iint_{S_0}\boldsymbol{n}dS \equiv 0$ から消える．なお，$\boldsymbol{F}_0$ は物体全体にはたらく力でベクトル量であり，放射力というべきである．

式 (31) の放射力は，物体の表面が不動であって，しかも実在の流体がもつ粘性や，境界層内の流れの影響を受けない，理想的な場合である．空中に置かれた剛体の，境界層がたとえ存在しても物体の寸法と比較して十分小さければ，式 (31) が利用できる．剛体といえどもそれが水中に置かれているならば，境界面は音場の振動速度で動くことになるだろうし，また音響流が粘性を通して境界面に作用するだろう．特に，微小物体が小さいほど，音響流 (局所流れを含めて) の効果が放射力に影響するはずである．

境界面の振動と境界付近の音響流を含めて，放射力を次のように拡張する[10),11)]．粒子速度 $\boldsymbol{v}_a$ で振動する境界面 $S(t)$ の周りに，仮想的な不動の境界 S_1 をとり，S_1 と $S(t)$ で囲まれた体積 $V(t)$ を考える．そして，この体積内で慣性力 $\boldsymbol{f}$ を積分し，$S_1 \to S_0$(S_0 は振動している面の平均的な面積 $\overline{S(t)}$) の操作を行う．式 (31) の積分表示を拡張して

$$\boldsymbol{F}_0 = \overline{\iint_{S(t)} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}dS} \tag{32}$$

から

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_0 &= \iint_{S_0} \left\{\overline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n} - \rho_0\overline{\boldsymbol{v}_\mathrm{a}\left(\boldsymbol{v}_\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{n}\right)}\right\} dS \\ \overline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} &= \left[-\overline{p} + \left(\frac{2\eta}{3} - \zeta\right)\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0\right]\tilde{\boldsymbol{I}} + \eta\left(\nabla\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_0\nabla\right) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

を得る[12)]．特に，音響流の効果が無視できる，あるいは粘性の影響を考慮する必要がない場合は，$\overline{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = -\overline{p}\tilde{\boldsymbol{I}}$，また，$\overline{p} = -\overline{\mathcal{L}}$ であるので

$$\boldsymbol{F}_0 = \iint_{S_0} \left\{\overline{\mathcal{L}}\boldsymbol{n} - \rho_0\overline{\boldsymbol{v}_\mathrm{a}\left(\boldsymbol{v}_\mathrm{a}\cdot\boldsymbol{n}\right)}\right\} dS \tag{34}$$

を導く．これは，ランジュバン (Langevin) の放射圧に対する Yosioka and Kawasima の表示式[13)]に他ならない．音響流が存在すると，$\overline{p} = -\overline{\mathcal{L}}$ の関係は必ずしも成立せず，式 (20)~(23) を含めて $\overline{p}$ の関係式を導かねばならず，大方，複雑な計算を必要とする．

Doinikov は, 平面進行波が剛球へ入射しているときの放射圧について理論解析を行っている. そして, 球の半径が波長に比べて十分小さく, $ka \ll 1$ (k は波数, a は球の半径) の実用的な場合の, 粘性の放射力に与える影響を議論している[11]. それによれば, King や Yosioka and Kawasima の理論[13),14)](粘性を無視) は, 放射力の主要項 (leading term) が $(ka)^4$ に比例するが, 粘性を含めると $ka\delta/a$ になり, $(ka)^3 < \delta/a$ の条件が満たされるようなとき, 粘性が放射力に少なからず影響する. この結論に対する実験的検証はまだ十分でなく, 今後の研究が待たれるところである.

波形歪みから新たな周波数成分が発生するが, この現象を利用して超指向性音源 (パラメトリックアレイ)[5]が, また音響流や放射圧は熱輸送の促進やマイクロマニピュレーション技術[15]への応用が期待されている.

4. あとがき

統一理論がほぼ確立されつつある放射圧と, 近年, 対流項の存在が流れの特性に大きく影響することが明らかになってきた Eckart 型の音響流, そして, 超音波ビームの非線形伝搬を記述する KZK モデル式が波形歪みの発生を詳細に記述できるようになったことを中心に, ここで整理を試みた. 音響流と放射圧はともに音波のエネルギーの一部が, 一方は, 体積力としての駆動力に変換され, また一方は, ラグランジュ密度を通して物体に面積力として作用する. 音響流の駆動力はエネルギーの損失が起因するもので, 非粘性流体では起こり得ない (ただし, 微小ではあるが, 局所流れは存在する). しかし, 放射圧は非粘性流体でも存在する.

文献

1) L.D.Rozenberg : *High-intensity Ultrasonic Fields* (Plenum, New York, 1971).

2) O.V.Rudenko and S.I.Soluyan : *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (Plenum, New York, 1977).

3) B.K.Novikov, O.V.Rudenko, and V.I.Timoshenko : *Nonlinear Underwater Acoustics* (AIP, New York, 1987).

4) 波形歪みと音響流の整理は, 例えば, J.N.Tjøtta and S.Tjøtta : Nonlinear Equations of Acoustics, *Proc. of 12th ISNA*, edited by M.F.Hamilton and D.T.Blackstock, (Elsevier, London, 1990), 80-97.

5) 鎌倉友男 : 非線形音響学の基礎 (愛智出版, 1996).

6) W.L.Nyborg : Acoustic Streaming, Pysical Acoustics, Vol.IIB (Academic, New York, 1965).

7) Sir J.Lighthill: Acoustic streaming, J. Sound & Vib. **61**(1978) 394-418.

8) K.Matsuda, T.Kamakura, and Y.Kumamoto : Buildup of acoustic streaming in focused beams, Ultrasonics **34** (1996) 763-765.

9) W.L.Nyborg : Acoustic microstreaming within a gas-filled bubble, J.Acoust.Soc.Am., **96**, Pt.2 (1994) 3279.

10) 長谷川高陽 : ランジュバン放射圧に関する統一理論, 日本音響学会誌 **52** (1996) 187-194.

11) A.A.Doinikov : Acoustic radiation pressure on a rigid sphere in a viscous fluid, Proc.R.Soc.Lond. A **447** (1994) 447-466.

12) 鎌倉友男, 熊本芳朗 : 音響流と放射圧, 信学技報 **96-93** (1997).

13) K.Yosioka and Y.Kawasima : Acoustic radiation pressure on a compressible sphere, ACUSTICA **5** (1955) 167-173.

14) L.V.King : On the radiation pressure on spheres, Proc. R.Soc.Lond. A **147** (1934) 212-240.

15) 竹内正男 : 微小物体の超音波マイクロマニピュレーション, 日本音響学会誌 **52** (1996) 203-209.