

# Restriction theorem と極限吸収

姫路工業大学 理学部 保城 寿彦

## 1 序

本稿の主な目的は S. Agmon [1] が示した様な極限吸収の原理に関する評価式を示すことにあ  
る。結果が得られた背景には次の3つの事柄についての評価式が相互に深く関連しあかも三位一  
体の様を呈していることが上げられる: (i) restriction theorem (ii) 極限吸収の原理 (iii) 分散型  
方程式に対する smoothing effect。本稿ではまずこれら3者の関連について説明し、次に結果に  
ついて述べ、最後にどの様に3者の関連を用いて証明するか説明する。

## 2 背景

まず第1に restriction theorem について説明する。関数  $f(x)$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\xi)$  を  $\mathbb{R}^n$   
上の subset  $S$ (主にかんがえるのは hypersurface の場合)に制限することを考える。 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$   
なら  $\hat{f}(\xi)|_{\xi \in S} \in L^\infty(S)$  であることは明らかである。実はこの様なことは他の関数空間でも成り  
立つことがある。最も有名な例は次の P. Tomas-E.M. Stein [8] による結果である:  $S$  が (単位)  
球面であるとき  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  なら  $\hat{f}(\xi)|_{\xi \in S} \in L^2(S)$  となる。ここで  $p$  は  $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$  をみ  
たすものとする。この様な現象を研究することは60年代末から実関数論の重要なテーマの一つと  
なっている。

第2に極限吸収の原理とは resolvent operator  $R(\zeta) = (-\Delta - \zeta)^{-1}$  について複素パラメー  
タ  $\zeta$  が spectrum  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  に近づいてもある関数空間では有界にとどまっていることである。  
S. Agmon [1] は次の不等式を示した:  $s > \frac{1}{2}$  のとき

$$|\zeta|^{1/2} \|(1 + |x|)^{-s} u\|_{L^2} \leq C_s \|(1 + |x|)^s (-\Delta - \zeta) u\|_{L^2}$$

ここで  $C_s$  は  $\zeta \in \mathbb{C}$  及び  $u$  に依存しない定数である。

第3に分散型方程式に対する smoothing effect というのは Schrödinger 方程式の様な分散型  
方程式では解を時空間についての関数空間で考えると初期値より滑らかさが増す現象のことである。  
これについては例えば P. Constantin- J.C. Saut [3] が次の結果を示した。

$$\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow |D|^{1/2} e^{-it\Delta} \phi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

これら3者の関連について、まず

極限吸収の原理  $\Rightarrow$  restriction theorem

である。このことについては例えば S. Agmon の論文で次の関係式があげられている:

$R(\zeta) = (-\Delta - \zeta)^{-1}$  とすると

$$(2\pi)^n \lim_{\zeta \rightarrow \lambda^2 \in \mathbb{R}_+, \operatorname{Im} \zeta > 0} \operatorname{Im} (R(\zeta)f, f)_{L^2} = \frac{\pi}{2\lambda} \int_{|\xi|=\lambda} |\hat{f}(\xi)|^2 dS_\lambda$$

( $dS_\lambda$ : 球面  $\{|\xi| = \lambda\}$  の面積要素)

これから極限吸収の原理から球面に対する restriction theorem が導ける。

上の逆

restriction theorem  $\Rightarrow$  極限吸収の原理

は付加的条件の下に成立する。これは

$$(A(\lambda)f, g) = \frac{1}{2(2\pi)^n \sqrt{\lambda}} \int_{|\xi|=\sqrt{\lambda}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} dS_{\sqrt{\lambda}}$$

と定義すると

$$R(\zeta) = \int_0^\infty \frac{A(\lambda)}{\lambda - \zeta} d\lambda$$

という関係式からわかる。これよりもしある作用素ノルムで  $\lambda$  について Hölder 連続性を持つとすると  $R_\pm(\lambda) = \lim_{\zeta \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+, \operatorname{Im} \zeta \geq 0} R(\zeta)$  も同じ性質を持つことがわかる。

他の関係では

restriction theorem  $\Rightarrow$  同次方程式の解についての smoothing effect

極限吸収の原理  $\Rightarrow$  非同次方程式の解についての smoothing effect

となる。後者については例えば

$$(*) \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = f, \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

の解  $u$  が

$$u(t, \cdot) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\tau} \frac{R_+(\tau) + R_-(\tau)}{2} \tilde{f}(\tau, \cdot) d\tau$$

と表せることからわかる。ここで  $\tilde{f}(\tau, \cdot)$  は関数  $f$  の  $t$  に関する部分 Fourier 変換である。

### 3 結果

結果は2つの部分に分かれている。まず  $\Lambda$  を単位球面  $S^{n-1}$  上の Laplace-Beltrami 作用素、つまり

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Lambda}{r^2}$$

とする ( $r = |x|$ )。  $-\Lambda$  の固有値は

$$\lambda_k = k(k+n-2), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

であり  $\lambda_k$  に対応する固有空間 ( $k$  次球面調和関数) への射影  $H_k$  は

$$H_k f(\omega) = \frac{\nu + k}{\nu |S^{n-1}|} \int_{|\tilde{\omega}|=1} C_k^\nu(\omega \cdot \tilde{\omega}) f(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega}$$

と積分作用素として表すことができる。ここで  $\nu = \frac{n-2}{2}$ ,  $C_k^\nu(z)$ : Gegenbauer 多項式,  $\omega \cdot \tilde{\omega} = \sum_{j=1}^n \omega_j \cdot \tilde{\omega}_j$ ,  $|S^{n-1}|$ : 単位球面の面積 である。従ってこのことから作用素  $(I - \Lambda)^\alpha$  は

$$(I - \Lambda)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda_k)^\alpha H_k$$

と表すことができる。まず次の様な restriction theorem が成り立つ。

定理 1.  $n \geq 3$ ,  $\frac{1}{2} < s < \frac{n}{2}$  と仮定する。このとき

$$(1) \quad (A(\lambda)f, f) \leq C \lambda^{s-1} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2s} \left| (I - \Lambda)^{-\frac{2s-1}{4}} f(x) \right|^2 dx$$

ここで定数  $C$  は  $f, \lambda (> 0)$  に依存しない。

更に  $A(\lambda)$  が  $\lambda$  について Hölder 連続性を持つことに着目すると次の様な極限吸収原理に関する評価を得ることができる。

定理 2.  $n \geq 3$ ,  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ,  $\alpha' > \alpha$  と仮定する。このとき次が成立する。

$$(2) \quad \| |x|^{\alpha-1} (I - \Lambda)^{\frac{1-2\alpha'}{2}} |D|^{2\alpha} u \| \leq C \| |x|^{1-\alpha} (-\Delta - \zeta) u \|$$

ここで  $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ ,  $C$  は  $u$  及び  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$  に依存しない定数である。

上の定理より直ちに初期値問題 (\*) の解について次を得る。

系. 定理 2 の仮定の下に (\*) の解について次が成立する。

$$\| |x|^{\alpha-1} (I - \Lambda)^{\frac{1-2\alpha'}{2}} |D|^{2\alpha} u \|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \| |x|^{1-\alpha} f \|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

ここで  $C$  は  $f$  に依存しない定数である。

次に述べる定理はこれまでとは違った approach によって得られる。

定理 3.  $n \geq 3$ ,  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{2}{n}$ ,  $\frac{n+1}{2} < \frac{n}{p} - \frac{1}{q}$ ,  $\frac{n}{q} - \frac{1}{p} < \frac{n-3}{2}$  を仮定する。

$$\alpha = 1 - \frac{n}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

とおく。このとき次が成立する。

$$(3) \quad \| |D|^{2\alpha} u \|_{L^q} \leq C \| (-\Delta - \zeta) u \|_{L^p}$$

ここで  $C$  は  $u$  及び  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$  に依存しない定数である。

定理 4.  $n \geq 3$ ,  $\frac{n-1}{2(n+1)} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} < \frac{n+3}{2(n+1)}$ ,  $s+s' \leq 2-n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ ,  $\frac{s}{n} + s' > -\frac{1}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n-3}{2}$ ,  $s + \frac{s'}{n} > -\frac{n}{p} + \frac{1}{q} + \frac{n+1}{2}$  と仮定する。

$$\alpha = 1 - \frac{s+s'}{2} - \frac{n}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$$

とおく。このとき次が成立する。

$$(4) \quad \| |x|^{-s'} |D|^{2\alpha} u \|_{L^q} \leq C \| |x|^s (-\Delta - \zeta) u \|_{L^p}$$

ここで  $C$  は  $u$  及び  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$  に依存しない定数である。

## 4 証明の概略

まず定理 1 の証明に関して次が成り立つ

命題 1.

$$(A(\lambda)f, f) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|\omega|=1} \left| \int_0^{\infty} J_{\nu+k}(\sqrt{\lambda}r) r^{n/2} H_k f(r, \omega) dr \right|^2 d\omega.$$

(ここで  $J_{\nu+k}$  は  $\nu+k$  次 Bessel 関数)

上の恒等式の証明はさらに次の Bessel 関数についての古典的な公式による。

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|=\sqrt{\lambda}} e^{i(y-x)\xi} dS_{\sqrt{\lambda}} &= \lambda^{(n-1)/2} \int_{|\omega|=1} e^{i(y-x)\sqrt{\lambda}\omega} d\omega \\ &= \lambda^{(n-1)/2} (2\pi)^{n/2} \frac{J_{\nu}(\sqrt{\lambda}|x-y|)}{|\sqrt{\lambda}|x-y|^{\nu}}, \end{aligned}$$

$$\frac{J_{\nu}(|x-y|)}{|x-y|^{\nu}} = 2^{\nu} \Gamma(\nu) \sum_{k=0}^{\infty} (\nu+k) \frac{J_{\nu+k}(r)}{r^{\nu}} \frac{J_{\nu+k}(\rho)}{\rho^{\nu}} C_k^{\nu}(\omega_1 \cdot \omega_2),$$

$$(x = r\omega_1, \quad y = \rho\omega_2)$$

$$\frac{\nu+k}{\nu|S^{n-1}|} \int_{|\omega|=1} C_k^{\nu}(\omega_1 \cdot \omega) C_{\ell}^{\nu}(\omega \cdot \omega_2) d\omega = \delta_{k\ell} C_k^{\nu}(\omega_1 \cdot \omega_2).$$

更に次の Weber-Schafheitlin 積分についての公式に注意する。

$$\int_0^{\infty} J_{\nu+k}(r)^2 r^{1-2s} dr = \frac{\Gamma(2s-1)\Gamma(\nu+k-s+1)}{2^{2s-1}\Gamma(s)^2\Gamma(\nu+k+s)} \sim (1+k)^{1-2s} \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

すると定理 1 は次のようにして証明できる。

$$\begin{aligned} &(A(\lambda)f, f) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} J_{\nu+k}(\sqrt{\lambda}r)^2 r^{1-2s} dr \right) \left( \int_{|\omega|=1} \int_0^{\infty} |r^s H_k f(r, \omega)|^2 r^{n-1} dr d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2} \lambda^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} J_{\nu+k}(r)^2 r^{1-2s} dr \right) \left( \int_{|\omega|=1} \int_0^{\infty} |r^s H_k f(r, \omega)|^2 r^{n-1} dr d\omega \right) \\ &\leq C \lambda^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^{1-2s} \left( \int_0^{\infty} |r^s H_k f(r, \omega)|^2 r^{n-1} dr d\omega \right) \\ &\leq C \lambda^{s-1} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2s} \left| (I - \Lambda)^{-\frac{2s-1}{4}} f(x) \right|^2 dx \end{aligned}$$

定理 2 は

$$|D|^{2\alpha}(-\Delta - \zeta)^{-1} = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha A(\lambda)}{\lambda - \zeta} d\lambda$$

だから  $B(\lambda) = \lambda^\alpha A(\lambda)$  の作用素ノルムでの Hölder 連続性をいう必要がある。これについては定理 1 の場合と同じ様に Bessel 関数についての古典的事実より次を得ることができる (証明略)。

補題 2.

(i)

$$|(H_k B(\lambda) f, g)| \leq C(1+k)^{2\alpha-1} \| |x|^{1-\alpha} H_k f \|_{L^2} \| |x|^{1-\alpha} H_k g \|_{L^2}$$

(ii)

$$\begin{aligned} |(H_k(B(\lambda) - B(\mu)) f, g)| &\leq C_\theta (1+k)^{2\alpha-1} |(\lambda \vee \mu)^{-1} (1+k) |\lambda - \mu||^{\theta/2} \\ &\quad \times \| |x|^{1-\alpha} H_k f \|_{L^2} \| |x|^{1-\alpha} H_k g \|_{L^2} \quad (0 \leq \theta \leq 1). \end{aligned}$$

また  $\zeta = 0$  の場合には次がなりたつ。

命題 3.  $\alpha$  は  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  となるものとする。このとき

$$|( |D|^{2(\alpha-1)} f, f )| \leq C \| (I - \Lambda)^{\frac{2\alpha-1}{4}} |x|^{1-\alpha} f \|_{L^2}^2,$$

ここで定数  $C$  は  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  に依存しない。

ここで関数空間を次のように導入する。

$$F_\alpha = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid |x|^{1-\alpha} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \},$$

$$G_{\alpha, \alpha'} = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid |x|^{\alpha-1} (I - \Lambda)^{\frac{1-2\alpha'}{2}} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \}.$$

すると補題 2 は  $B(\lambda)$  が  $F_\alpha$  から  $G_{\alpha, \alpha'}$  への作用素で ( $\alpha < \frac{1}{2}$ ,  $\alpha < \alpha'$ ), しかも  $\lambda > 0$  についての局所 Hölder 連続な関数となっていることを言っており、命題 3 は  $|D|^{2(\alpha-1)}$  が  $F_\alpha$  か

への作用素であることを言っている。これらから定理2が証明できる。まず  $\zeta$  がスペクトル  $[0, \infty)$  からはなれている場合

$$\begin{aligned}
 & |(|D|^{2\alpha}(-\Delta - \zeta)^{-1}f, g)| \\
 & \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left| \frac{|\xi|^{2\alpha}}{|\xi|^2 - \zeta} \right| |\hat{f}(\xi)| |\hat{g}(\xi)| d\xi \\
 & \leq C \int |\xi|^{2(\alpha-1)} |\hat{f}(\xi)| |\hat{g}(\xi)| d\xi \\
 & \leq C (|D|^{2(\alpha-1)}(I - \Lambda)^{\frac{1-2\alpha}{2}} f, f)^{1/2} (|D|^{2(\alpha-1)}(I - \Lambda)^{\frac{2\alpha-1}{2}} g, g)^{1/2} \\
 & \leq C' \| |x|^{1-\alpha} f \|_{L^2} \| |x|^{1-\alpha} (I - \Lambda)^{\frac{2\alpha-1}{2}} g \|_{L^2}
 \end{aligned}$$

と  $F_\alpha$  から  $G_{\alpha, \alpha}$  への有界作用素となる。

従って残りは  $\zeta$  がスペクトルに近づく場合であるが、これはまた scaling により  $\| |D|^{2\alpha}(-\Delta - (1 \pm i\epsilon))^{-1} \|_{\mathcal{L}(F_\alpha, G_{\alpha, \alpha})}$  が  $\epsilon \rightarrow 0$  としても有界にとどまることさえ示せばよい。ここで  $\chi(\lambda) \in C_0^\infty[\frac{1}{2}, 2]$  を  $\lambda = 1$  の近傍で  $\chi(\lambda) = 1$  となるものとして

$$\begin{aligned}
 & |D|^{2\alpha}(-\Delta - (1 + i\epsilon))^{-1} \\
 & = \int_0^\infty \chi(\lambda) \frac{B(\lambda)}{\lambda - (1 + i\epsilon)} d\lambda + \int_0^\infty (1 - \chi(\lambda)) \frac{B(\lambda)}{\lambda - (1 + i\epsilon)} d\lambda \\
 & = R_1 + R_2
 \end{aligned}$$

と分解すると  $\|R_2\|_{\mathcal{L}(F_\alpha, G_{\alpha, \alpha})}$  は  $\zeta$  がスペクトルからはなれているときとおなじようにすれば有界にとどまることが示せる。他方  $\|R_1\|_{\mathcal{L}(F_\alpha, G_{\alpha, \alpha})}$  についてはつぎの命題による (定理2の証明終わり)。

命題 4.  $F_1$  と  $F_2$  は Banach 空間、 $P(\lambda)$  は  $\mathcal{L}(F_1, F_2)$  に値をとる ( $\lambda > 0$  に関して) Hölder 連続な関数で support が  $(0, \infty)$  で compact で  $\lambda = 1$  の近傍に入ると仮定する。このとき

$$Q(\zeta) = \int_0^\infty \frac{P(\lambda)}{\lambda - \zeta} d\lambda$$

とおくと集合  $\{Q(1 \pm i\epsilon)\}_{\epsilon > 0}$  は  $\mathcal{L}(F_1, F_2)$  で有界となる。

定理3の証明で  $\zeta$  がスペクトルから離れている場合には Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式でもって容易にしめすことができる。実際  $p$  及び  $q$  を  $1 < p < 2 < q < \infty$ ,  $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2(1-\alpha)}{n}$

をみたすとする

$$\begin{aligned}
 & |(|D|^{2\alpha}(-\Delta - \zeta)^{-1}f, g)| \\
 & \leq C \int |\xi|^{2(\alpha-1)} |\hat{f}(\xi)| |\hat{g}(\xi)| d\xi \\
 & \leq C (|D|^{n(1-\frac{2}{p})}f, f)^{1/2} (|D|^{n(\frac{2}{q}-1)}g, g)^{1/2} \\
 & \leq C \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{\frac{q}{q-1}}}
 \end{aligned}$$

となるからである。また定理2の証明と同様にして  $\|R_2\|_{\mathcal{L}(L^p, L^q)}$  も  $\epsilon \rightarrow 0$  としても有界にとどまることがわかる。したがって  $\|R_1\|_{\mathcal{L}(L^p, L^q)}$  の挙動を調べるのが主な仕事であるがそのためには少し準備が必要となる。

まず  $K_{z, \zeta}(x-y)$  を作用素  $(-\Delta - \zeta)^{z-\frac{n}{2}}$  の核とする。また  $\Gamma_+$  を

$$\Gamma_+ = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \zeta > 0, \frac{1}{2} \leq |\zeta| \leq 2\}$$

と定義する ( $\Gamma_-$  も同様である)。このとき次が成立する (証明略)。

補題 5.  $\zeta$  と  $\zeta'$  はともに  $\Gamma_+$  または  $\Gamma_-$  に入るものとする。このとき  $-\frac{1}{2} < \text{Re } z < \frac{1}{2}$  および  $\max(0, 2\text{Re } z) \leq \mu < \text{Re } z + \frac{1}{2}$  に対して定数  $C$  が存在して

$$\begin{aligned}
 |K_{z, \zeta}(x)| & \leq C \frac{e^{C|\text{Im } z|}}{|x|^\mu} \\
 |K_{z, \zeta}(x) - K_{z, \zeta'}(x)| & \leq C \frac{e^{C|\text{Im } z|} |\zeta - \zeta'|^\theta}{|x|^\mu}
 \end{aligned}$$

となる。ただしここで  $\theta = \text{Re } z + \frac{1}{2} - \mu$  である。

この補題から resolvent operator  $R(\zeta)$  についての評価に関する情報が得られる。

命題 6.  $\zeta$  及び  $\zeta'$  はともに  $\Gamma_+$  または  $\Gamma_-$  に入るものとする。  $p$  及び  $q$  は定理3の仮定をみたすとする。このとき次が成立する。

$$\begin{aligned}
 \|R(\zeta)u\|_{L^q} & \leq C \|u\|_{L^p} \\
 \|[R(\zeta) - R(\zeta')]u\|_{L^q} & \leq C |\zeta - \zeta'|^\theta \|u\|_{L^p}
 \end{aligned}$$



ここで正定数  $\theta$  及び  $C$  は  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\zeta, \zeta'$  に依存しない。

(証明) まず、まえの補題と Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式から次の評価がいえる。

$$\begin{aligned} \|(-\Delta - \zeta)^{z - \frac{n}{2}} u\|_{L^q} &\leq C e^{C|\operatorname{Im} z|} \|u\|_{L^p} \\ \| [(-\Delta - \zeta)^{z - \frac{n}{2}} - (-\Delta - \zeta')^{z - \frac{n}{2}}] u \|_{L^q} &\leq C e^{C|\operatorname{Im} z|} |\zeta - \zeta'|^\theta \|u\|_{L^p} \end{aligned}$$

ここで  $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$ ,  $1 < p < q < \infty$ ,  $\max(0, 2\operatorname{Re} z) \leq n \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) < \operatorname{Re} z + \frac{1}{2}$ ,  $\theta = \operatorname{Re} z + \frac{1}{2} - n \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$  である。

他方

$$|(|\xi|^2 - \zeta)^{i\gamma}| \leq e^{\pi|\gamma|} \quad \text{for } \zeta \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{R}$$

であるので Plancherel の等式より

$$\|(-\Delta - \zeta)^{i\gamma} u\|_{L^2} \leq e^{\pi|\gamma|} \|u\|_{L^2}$$

となる。これらを複素補間し、 $z$  が  $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$  の範囲を動くときの  $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$  が動く範囲の union をとると命題 6 が得られる。

以上より

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \downarrow 0} [R(\lambda + i\epsilon) - R(\lambda - i\epsilon)]$$

及び  $B(\lambda)$  が定理 3 の  $p, q$  の範囲で  $\mathcal{L}(L^p, L^q)$  に値をとる関数として局所 Hölder 連続となっていることがいえる。従って定理 2 の証明と同様に命題 4 によって  $\|R_1\|_{\mathcal{L}(L^p, L^q)}$  が  $\epsilon \rightarrow 0$  としても有界にとどまることがわかる。よって定理 3 が証明された。

(定理 4 の証明) 定理 4 では定理 3 の証明において Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式を使うかわりに次の Stein-Weiss によって示された Riesz 作用素についての重み付き評価式をもちいる。

命題 7. (Stein-Weiss)  $0 < \mu < n$  に対し

$$T_\mu f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^\mu} dy$$

とおく。  $1 < p \leq q < \infty$ ,  $s < n/p'$  ( $p'$  は  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  で定義する),  $s' < n/q$ ,  $s + s' \geq 0$ ,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\mu + s + s'}{n} - 1$$

と仮定する。このとき

$$\| |x|^{-s'} T_{\mu} f \|_{L^q} \leq C \| |x|^s f \|_{L^p}$$

となる。ただしここで定数  $C$  は  $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  に依存しない。

#### REFERENCES

0. T. Hoshiro, *On weighted  $L^2$  estimates of solutions to wave equations*, preprint.
1. S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Pisa Serie IV 2 (1975), 150-218.
2. M. Ben-Artzi and S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrödinger equation*, Jour.d'Analyse Math. 58 (1992), 25-37.
3. P. Constantin and J.C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, Jour. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 413-439.
4. T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. 1 (1989), 481-496.
5. C. Kenig, A. Ruiz and C.D. Sogge, *Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators*, Duke Math. J. 55 (1987), 329-347.
6. E.M. Stein and G. Weiss, *Fractional integrals on  $n$ -dimensional Euclidean space*, J. of Math. and Mech. 7 (1958), 503-514.
7. R.S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions to wave equations*, Duke Math. J 44 (1977), 705-714.
8. P. Tomas, *A restriction theorem for the Fourier transform*, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 477-478.

姫路工業大学 理学部

671-22 兵庫県姫路市書写 2167

e-mail: hoshiro@sci.himeji-tech.ac.jp