数理解析研究所講究録
994 巻 1997 年 15-31

小さいポテンシャルをもつディラック作用素の境界値逆問題について

九州大学大学院数理学研究科
土田哲生　Tetsuo Tsuchida

1. 序.

$\Omega \subset \mathbf{R}^3$ を滑らかな境界$\partial\Omega$ をもつ有界領域とする。Dirac 作用素

$$
\begin{aligned}
L_{\vec{a},q} &= L_0 + (-\alpha\vec{a}(x) + q(x)) = \alpha D + \beta + (-\alpha\vec{a}(x) + q(x)) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \alpha_j (D_j - a_j(x)) + \beta + q(x)
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

を Ω で考える。ここで $D_j = -i\partial/\partial x_j$, 又、$\alpha_j$, $j = 1, 2, 3$, β は Dirac 行列、すなわち、4×4 エルミート行列で

$$
\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} I_4, \quad j, k = 1, 2, 3, 4, \tag{1.2}
$$

$(\alpha_4 = \beta)$ を満たす。$P_\pm = (I \pm \beta)/2$ を $\mathbf{C}^4$ の orthogonal projection として、スカラーポテンシャル q は、

$$
q(x) = q^+(x) P_+ + q^-(x) P_-
$$

の形を仮定する。また、ベクトルポテンシャルを$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とし、各 a_j と q^+, q^- は、実数値関数とする。

$L_0 = \alpha D + \beta$ の定義域 $D(L_0)$ を、

$$
D(L_0) = \{u \in (L^2(\Omega))^4 |\, P_+ u \in (H_0^1(\Omega))^4,\ P_- u \in \mathcal{H}\}
$$

$$
\text{但し、}\quad \mathcal{H} = \{u \in (L^2(\Omega))^4 |\, \alpha D u \in (L^2(\Omega))^4\}
$$

とすると、L_0 は、$(L^2(\Omega))^4$の自己共役作用素になる。また、$\vec{a}, q \in L^\infty(\Omega)$ に対し、$L_{\vec{a},q} = L_0 + (-\alpha\vec{a}(x) + q(x))$ も自己共役で $D(L_{\vec{a},q}) = D(L_0)$ である。以下、この自己共役作用素と微分作用素 (1.1) とは同じ $L_{\vec{a},q}$を用いる。次に、以下の Dirichlet 境界値問題を考える。

$$
\begin{cases}
(L_{\vec{a},q} - \lambda) u(x) = 0, & \lambda \in \mathbf{C}, \\
P_+ u|_{\partial\Omega} = f \in P_+ (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^4.
\end{cases} \tag{1.3}
$$

もし、$\lambda \in \rho(L_{\vec{a},q})$ ($L_{\vec{a},q}$のレゾルベント集合) ならば、(1.3) の解 u は、$P_+ u \in (H^1(\Omega))^4$, $P_- u \in \mathcal{H}$ で一意に存在する。そこで、写像 $\Lambda_{\vec{a},q}^\lambda : P_+(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^4 \to (H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^4$ を定義する。

<u>定義</u>. $f \in P_+(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^4$ に対し、$\Lambda_{\vec{a},q}^\lambda f = i\alpha N P_- u|_{\partial\Omega} \in (H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^4$ とする。但し、N は、$\partial\Omega$ の単位外法線ベクトルである。

<u>注意</u>.

∘ $\Lambda_{\vec{a},q}^\lambda f$ が $(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^4$ の元である事は、任意の $u \in \mathcal{H}$ に対し$\alpha N u|_{\partial\Omega} \in (H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^4$ であることより従う。

∘ (Gauge invariance) $p \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $p|_{\partial\Omega} = 0$ ならば、$\Lambda_{\vec{a}+\nabla p,q}^\lambda = \Lambda_{\vec{a},q}^\lambda$ である。

ここでの境界値逆問題とは、$\vec{a}, q$ から$\Lambda^{\lambda}_{\vec{a},q}$ への対応の一意性に関する問題である。以下では、$1 \in \rho(L_{\vec{a},q})$ を仮定し、$\lambda = 1$ のとき$\Lambda^{1}_{\vec{a},q} = \Lambda_{\vec{a},q}$と書く。

$$W^{1,\infty}_{\Omega} = \{u \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3) | \mathrm{supp}\ u \subset \overline{\Omega}\}$$

とする。主定理は、次の2つ。

<u>定理 1.</u> $\vec{a}_j \in C^2_0(\overline{\Omega})$, $\|\mathrm{rot}\vec{a}_j\|_{L^\infty(\Omega)} \ll 1$, $q_j \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $j = 1, 2$, とする。このとき、$\Lambda_{\vec{a}_1,q_1} = \Lambda_{\vec{a}_2,q_2}$ ならば、$\mathrm{rot}\vec{a}_1 = \mathrm{rot}\vec{a}_2$ and $q_1 = q_2$ in Ω である。

<u>定理 2.</u> $\vec{a}_j \in W^{1,\infty}_{\Omega}$, $\|\mathrm{rot}\ \vec{a}_j\|_{L^\infty(\Omega)} \ll 1$, $q_j \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\|q_j\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \ll 1$, $j = 1, 2$, とする。このとき、$\Lambda_{\vec{a}_1,q_1} = \Lambda_{\vec{a}_2,q_2}$ ならば、$\mathrm{rot}\vec{a}_1 = \mathrm{rot}\vec{a}_2$ and $q_1 = q_2$ in Ω である。

定理 2 は、次の 2 つの定理からわかる。

<u>定理 2(A).</u> $\vec{a}_j \in W^{1,\infty}_{\Omega}$, $\|\mathrm{rot}\vec{a}_j\|_{L^\infty(\Omega)} \ll 1$, $q_j \in L^\infty(\Omega)$, $\|q_j\|_{L^\infty(\Omega)} \ll 1$, $j = 1, 2$, とする。このとき、$\Lambda_{\vec{a}_1,q_1} = \Lambda_{\vec{a}_2,q_2}$ ならば、$\mathrm{rot}\vec{a}_1 = \mathrm{rot}\vec{a}_2$ in Ω である。

<u>定理 2(B).</u> $\vec{a} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\|\mathrm{rot}\vec{a}\|_{L^\infty(\Omega)} \ll 1$, $q_j \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\|q_j\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \ll 1$, $j = 1, 2$, とする。このとき、$\Lambda_{\vec{a},q_1} = \Lambda_{\vec{a},q_2}$ ならば、$q_1 = q_2$ in Ω である。

空間 3 次元以上の Schrödinger 作用素の場合、次の結果がある。[3] では、小さい磁場の$\vec{a} \in W^{2,\infty}_{\Omega}$と $q \in L^\infty(\Omega)$ に対して、成立。[2] では、小さい磁場を仮定せず$\vec{a} \in C^\infty_0(\Omega)$ と $q \in L^\infty(\Omega)$ あるいは、$\vec{a} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ と $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$ に対して、成立。

<u>2. 定理 1 の証明.</u>

定理 1, 2 の証明において次が基本となる。以下、ベクトル$\vec{a}$の "$\rightarrow$"を省略する。

<u>補題 2.1.</u> $u^{\pm}_j = P_{\pm}u_j$ とおく。$(L_{a_j,q_j} - 1)u_j = 0$, $u^+_j \in (H^1(\Omega))^4$, $u^-_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, 2$ のとき、$V_j = -\alpha a_j + q_j$, $j = 1, 2$, として、

$$_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} < \overline{u^+_2}, (\Lambda_{a_1,q_1} - \Lambda_{a_2,q_2})u^+_1 >_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \int_{\Omega} \overline{u_2} \cdot (V_1 - V_2)u_1\, dx.$$

<u>証明</u>. $(L_{a_j,q_j} - 1)u_j = 0$, $j = 1, 2$, と部分積分により、

$$\begin{aligned}(u_2, (V_1 - V_2)u_1) &= (L_0 u_2, u_1) - (u_2, L_0 u_1) \\ &= -i \int_{\Gamma} u^+_2 \cdot \overline{\alpha N u^-_1} + \alpha N u^-_2 \cdot \overline{u^+_1} dS \\ &= {}_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} < u^+_2, \overline{\Lambda_{a_1,q_1} u^+_1} >_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} - {}_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} < \Lambda_{a_2,q_2} u^+_2, \overline{u^+_1} >_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\end{aligned}$$

を得る。そして、${}_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} < \Lambda_{a_2,q_2} u^+_2, \overline{u^+_1} >_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = {}_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} < u^+_2, \overline{\Lambda_{a_2,q_2} u^+_1} >_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ を用いて、補題を得る。 □

この補題により、$\Lambda_{a_1,q_1} = \Lambda_{a_2,q_2}$ の時、

$$\int_{\Omega} \overline{u_2} \cdot (V_1 - V_2)u_1\, dx = 0 \tag{2.1}$$

を得る。以下、証明は、[1] あるいは [3] の方法と同様に行う。

$\zeta \in \mathbf{C}^3$に対し、

$$\Pi_\zeta = \frac{1}{2}(I + \frac{\alpha\zeta + \beta}{< \zeta >}), \quad < \zeta > = \sqrt{\zeta^2 + 1},$$

とおく。更に、$Z=\{\zeta\in\mathbf{C}^3|\,\zeta^2=0,|\zeta|>1\}$ とおく。この時、$\zeta\in Z$ に対し、$\Pi_\zeta=P_+ +\alpha\zeta/2$, $(\alpha\zeta+\beta)\Pi_\zeta=\Pi_\zeta$である。

$a\in C_0^2(\overline{\Omega})$, $q\in W^{1,\infty}(\Omega)$ とする。$(L_{a,q}-1)u=0$ の解として、$\zeta\in Z$ に対し、u_ζ, v_ζ を 4×4 行列とし、

$$u_\zeta(x)=e^{i\zeta x}e^{\varphi_\zeta(x)}(\Pi_\zeta+v_\zeta(x)) \tag{2.2}$$

の形で求める。ここで $\varphi_\zeta(x)$ は、

$$\zeta\cdot(a(x)-D\varphi_\zeta(x))=0 \tag{2.3}$$

を満たすものとする。(2.3) のひとつの解として、

$$\varphi_\zeta(x)=\mathcal{F}^{-1}(\frac{\zeta\hat{a}(\xi)}{\zeta\xi}) \tag{2.4}$$

をとると、次が知られている。

命題 2.2. [3] $\zeta\in Z$ に依らない定数 C が存在し、

$$\|\varphi_\zeta\|_{W^{2,\infty}(\mathbf{R}^3)}\le C\|a\|_{C_0^2(\overline{\Omega})},$$
$$\|a-D\varphi_\zeta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^3)}\le C\|\mathrm{rot}\,\overrightarrow{a}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

更に、$\zeta,\zeta_0\in Z$, $\zeta\to\zeta_0$, のとき、$\varphi_\zeta\to\varphi_{\zeta_0}$ in $W^{2,\infty}(\mathbf{R}^3)$.

証明. 前半の評価は、[3] による。後半は、一般に、$f\in C_0(\mathbf{R}^3)$ に対し、$\zeta=\eta+i\gamma\in Z$, $|\eta|=|\gamma|=1$ として、

$$(L_\zeta f)(x)\equiv\mathcal{F}^{-1}(\frac{\hat{f}(\xi)}{\zeta\xi})=\frac{i}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{f(x-\eta y_1-\gamma y_2)}{y_1+iy_2}dy_1dy_2\to(L_{\zeta_0}f)(x)\text{ in }L^\infty(\mathbf{R}^3),$$

より分かる (cf. [3])。 □

(2.2) を $(L_{a,q}-1)u=0$ へ代入すると、$(\alpha\zeta+\beta)\Pi_\zeta=\Pi_\zeta$を用いて、$v=v_\zeta$に関する方程式

$$(\alpha(D+\zeta)-2P_-+Q_\zeta)v=-Q_\zeta\Pi_\zeta, \tag{2.5}$$
$$\text{但し、}Q_\zeta=-\alpha(a-D\varphi_\zeta)+q,$$

を得る。$\tilde{q}\in W_0^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)=\{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ and コンパクト台 $\}$ を $q\in W^{1,\infty}(\Omega)$ のある拡張とし、また、$\overline{\Omega}$の近傍で 1 をとる$\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ をとり、

$$b_\zeta\equiv\chi(a-D\varphi_\zeta),$$
$$\tilde{Q}_\zeta\equiv-\alpha b_\zeta+\tilde{q}\in W_0^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$$

とおく。(2.5) において Q_ζ の代わりに$\tilde{Q}_\zeta$で置き換えた方程式

$$(\alpha(D+\zeta)-2P_-+\tilde{Q}_\zeta)v_\zeta=-\tilde{Q}_\zeta\Pi_\zeta,\quad\text{in }\mathbf{R}^3 \tag{2.6}$$

を $v_\zeta\in L^{2,-s}(\mathbf{R}^3)$, $1/2<s<1$, で考える。以下常に $1/2<s<1$ とし、$\|\cdot\|_{\alpha,\delta}=\|\cdot\|_{H^{\alpha,\delta}}$, $\|\cdot\|_\delta=\|\cdot\|_{L^{2,\delta}}$ と書く。

命題 2.3. $\zeta \in Z$ に対し、

$$(g_\zeta f)(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}(\frac{\hat{f}(\xi)}{\xi^2 + 2\zeta\xi})(x)$$

とすると、$g_\zeta \in B(L^{2,s}, H^{2,-s})$ で、

$$\|g_\zeta f\|_{\alpha,-s} \le C|\zeta|^{\alpha-1}\|f\|_s, \quad 0 \le \alpha \le 2.$$

証明は、[5] Theorem1.1 を参照のこと。

命題 2.4. $\zeta \in Z$, $f \in L^{2,s}$とする。方程式 $(\alpha(D+\zeta) - 2P_-)u = f$ は、$L^{2,-s}$で唯一の解をもち、

$$u = (\alpha(D+\zeta) + 2P_+)g_\zeta f$$

である。従って、命題 2.3 より、$u \in H^{1,-s}$を得る。

証明. (1.2) より、任意の $a, b \in \mathbf{C}^3$に対し、

$$\alpha a \alpha b + \alpha b \alpha a = 2abI_4, \text{ and } \alpha a P_\pm = P_\mp \alpha a, \tag{2.7}$$

より、$(\alpha(D+\zeta)-2P_-)(\alpha(D+\zeta)+2P_+) = D^2+2\zeta D$ である。そして、[4], Proposition2.1 を適用すればよい。 □

$\tilde{Q}_\zeta \in W_0^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ と命題 2.3 より、$(\alpha(D+\zeta)+2P_+)g_\zeta\tilde{Q}_\zeta$は、$H^{1,-s}$ 上のコンパクト作用素である。

命題 2.5. $\varepsilon > 0$ と $r > 1$ が存在して、$\|\mathrm{rota}\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon$, $|\zeta| > r$, $\zeta \in Z$ のとき、方程式 (2.6) は $v_\zeta \in H^{1,-s}$なる唯一の解が存在し、

$$v_\zeta = -(I + F_\zeta g_\zeta M_\zeta)^{-1} F_\zeta g_\zeta M_\zeta \Pi_\zeta \tag{2.8}$$

と書ける。ここで、M_ζは掛け算作用素で、

$$M_\zeta \equiv \alpha D(-\alpha b_\zeta + \tilde{q}) + (b_\zeta^2 - \tilde{q}^+\tilde{q}^- + 2\tilde{q}^+)I_4, \tag{2.9}$$

又、

$$F_\zeta \equiv (I - g_\zeta 2b_\zeta D)^{-1}$$

は、$H^{1,-s}$上の有界作用素である。

証明. 初めに、解の存在と一意性を示す。$v_\zeta \in L^{2,-s}$に関する方程式 (2.6) は、命題 2.4 より

$$v_\zeta = -(\alpha(D+\zeta)+2P_+)g_\zeta(\tilde{Q}_\zeta v_\zeta + \tilde{Q}_\zeta \Pi_\zeta) \tag{2.10}$$

と同値である。それで、命題 2.3 より $v_\zeta \in H^{1,-s}$となる。Fredholm の交替定理より

$$(1 + (\alpha(D+\zeta)+2P_+)g_\zeta\tilde{Q}_\zeta)v = 0, \quad v \in H^{1,-s}, \tag{2.11}$$

が、$v = 0$ 以外に解をもたないことを示す。(2.11) より、

$$(\alpha(D+\zeta) - 2P_-)v = -\tilde{Q}_\zeta v, \tag{2.12}$$

$$(D^2 + 2\zeta D)v = -(\alpha(D+\zeta)+2P_+)\tilde{Q}_\zeta v. \tag{2.13}$$

(2.3), (2.7), (2.12) を用いると、(2.13) の右辺は、

$$-(\alpha(D+\zeta)+2P_+)\tilde{Q}_\zeta v = 2b_\zeta Dv - M_\zeta v$$

となる。従って、(2.13) は、

$$(D^2+2\zeta D)v = 2b_\zeta Dv - M_\zeta v \tag{2.14}$$

となる。$v\in H^{1,-s}$のとき、(2.14) の右辺は $L^{2,s}$、従って、(2.14) は次と同値である (cf. [4], Proposition 2.1):

$$(I-g_\zeta 2b_\zeta D)v = -g_\zeta M_\zeta v. \tag{2.15}$$

命題 2.2 と命題 2.3 より、

$$\|g_\zeta 2b_\zeta Dw\|_{1,-s} \le C\|\mathrm{rot}a\|_\infty \|w\|_{1,-s}, \quad w\in H^{1,-s}$$

なので、$\|\mathrm{rot}a\|_\infty$が十分小さいとき $H^{1,-s}$上で有界な逆 $F_\zeta = (I-g_\zeta 2b_\zeta D)^{-1}$が存在する。ここでひとつ補題を準備する。

補題 2.6. F_ζを $H^{1,-s}$から $L^{2,-s}$への作用素とみると、任意の $f\in L^{2,s}$に対し、

$$\|F_\zeta g_\zeta f\|_{-s} \le C|\zeta|^{-1}\|f\|_s.$$

この補題を認める。$\|M_\zeta\|_\infty \le C$, (C はζに依らない定数) より、

$$\|v\|_{-s} = \|F_\zeta g_\zeta M_\zeta v\|_{-s} \le C|\zeta|^{-1}\|M_\zeta v\|_s \le C|\zeta|^{-1}\|v\|_{-s}$$

より、十分大きい $|\zeta|$ に対し $v=0$ を得る。

次に、(2.8) を示す。(2.6) より、

$$(D^2+2\zeta D)v_\zeta = -(\alpha(D+\zeta)+2P_+)(\tilde{Q}_\zeta v_\zeta + \tilde{Q}_\zeta \Pi_\zeta).$$

再び (2.6) を用いて右辺を計算すると、

$$(D^2+2\zeta D)v_\zeta = 2b_\zeta Dv_\zeta - M_\zeta v_\zeta - M_\zeta \Pi_\zeta \in L^{2,s}.$$

これは、

$$(I-g_\zeta 2b_\zeta D)v_\zeta = -g_\zeta M_\zeta v_\zeta - g_\zeta M_\zeta \Pi_\zeta$$

と同値である。よって、

$$(I+F_\zeta g_\zeta M_\zeta)v_\zeta = -F_\zeta g_\zeta M_\zeta \Pi_\zeta.$$

一方、補題 2.6 より

$$\|F_\zeta g_\zeta M_\zeta w\|_{-s} \le C|\zeta|^{-1}\|M_\zeta w\|_s \le C|\zeta|^{-1}\|w\|_{-s}, \quad w\in L^{2,-s},$$

なので、$|\zeta|^{-1}$ が十分小ならば $I+F_\zeta g_\zeta M_\zeta$ は、$L^{2,-s}$上有界な逆が存在する。従って、

$$v_\zeta = -(I+F_\zeta g_\zeta M_\zeta)^{-1}F_\zeta g_\zeta M_\zeta \Pi_\zeta$$

となり、命題 2.5 が示された。 □

補題 2.6 の証明. まず、F_ζの有界性と命題 2.3 より、

$$\|F_\zeta g_\zeta f\|_{1,-s} \leq C\|g_\zeta f\|_{1,-s} \leq C\|f\|_s$$

に注意する。これより、$w = F_\zeta g_\zeta f$ とおくと、命題 2.3 より、

$$\begin{aligned}\|w\|_{-s} &\leq \|g_\zeta f\|_{-s} + \|g_\zeta 2b_\zeta Dw\|_{-s} \\ &\leq C|\zeta|^{-1}\|f\|_s + C|\zeta|^{-1}\|w\|_{1,-s} \leq C|\zeta|^{-1}\|f\|_s\end{aligned}$$

となり、補題 2.6 が示された。 □

$\lambda > 1$ に対し、$\{\zeta(\lambda) = \lambda(\omega(\lambda) + i\gamma)\}_{\lambda>1} \subset Z$ をとる。ここで、$\omega(\lambda)$, γ, ηは $\mathbf{R}^3$ の単位ベクトルとし、$\omega(\lambda) \perp \gamma$, $\eta \perp \gamma$, かつ$\lambda \to \infty$ で$\omega(\lambda) \to \eta$となるものとし、$\zeta_0 \equiv \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1}\zeta(\lambda) = \eta + i\gamma$ とする。

命題 2.7. $\zeta = \zeta(\lambda)$ に対する命題 2.5 の (2.6) の解 $v_\zeta = v_{\zeta(\lambda)}$に関して、

$$v_\zeta \to -N_{\zeta_0} M_{\zeta_0} \frac{\alpha\zeta_0}{2}, \quad in\, L^{2,-s}\, as\, \lambda \to \infty.$$

ここで、$(N_{\zeta_0} f)(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}(\dfrac{\hat{f}(\xi)}{2\zeta_0\xi})(x) \in B(L^{2,s}, L^{2,-s})$ である。

証明. (2.8) 式 $v_\zeta = -(I + F_\zeta g_\zeta M_\zeta)^{-1} F_\zeta g_\zeta M_\zeta \Pi_\zeta$ において、右辺の最初の因子は、命題 2.5 の証明より $L^{2,-s}$の作用素ノルムで

$$(I + F_\zeta g_\zeta M_\zeta)^{-1} \to I \quad (\lambda \to \infty).$$

そこで、

$$F_\zeta g_\zeta M_\zeta \Pi_\zeta \to N_{\zeta_0} M_{\zeta_0} \frac{\alpha\zeta_0}{2}, \quad \text{in } L^{2,-s}\, (\lambda \to \infty) \tag{2.16}$$

を示せば、命題が証明される。まず命題 2.2 より

$$\lambda^{-1} M_\zeta \Pi_\zeta \to M_{\zeta_0} \frac{\alpha\zeta_0}{2}, \quad \text{in } L^{2,s}\ (\lambda \to \infty). \tag{2.17}$$

である。次に、任意の $f \in L^{2,s}$に対し、

$$\lambda F_\zeta g_\zeta f \to N_{\zeta_0} f \quad \text{in}\, L^{2,-s}\, (\lambda \to \infty) \tag{2.18}$$

を示す。補題 2.6 より (2.18) は、$f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ で示せばよい。$w_\zeta = \lambda F_\zeta g_\zeta f$ とおくと、$\|\lambda g_\zeta f\|_{1,-s} \leq C\|f\|_{1,s}$より、

$$\|w_\zeta\|_{1,-s} \leq \|F_\zeta\|_{B(H^{1,-s},H^{1,-s})} \|\lambda g_\zeta f\|_{1,-s} \leq C\|f\|_{1,s}.$$

これより、

$$\|g_\zeta 2b_\zeta Dw_\zeta\|_{-s} \leq \|g_\zeta\|_{B(L^{2,s},L^{2,-s})} \|2b_\zeta Dw_\zeta\|_s \leq C\lambda^{-1}\|w_\zeta\|_{1,-s} \to 0. \tag{2.19}$$

又、[1] より、任意の $f \in L^{2,s}$ に対し、

$$\lambda g_{\zeta} f \to N_{\zeta_0} f \quad \text{in } L^{2,-s}\,(\lambda \to \infty). \tag{2.20}$$

(2.19, 20) より (2.18) を得て、(2.17, 18) より (2.16) を得る。 □

$k \neq 0, \eta, \gamma \in \mathbf{R}^3$を $k \cdot \eta = k \cdot \gamma = \eta \cdot \gamma = 0$, $|\eta| = |\gamma| = 1$ と固定する。$\lambda > 1$ に対し、$\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{C}^3$を

$$\begin{cases} \zeta_1 = \zeta_1(\lambda) = \lambda(\omega_1(\lambda) + i\gamma), & \omega_1 = (1 - \dfrac{k^2}{4\lambda^2})^{1/2}\eta - \dfrac{k}{2\lambda}, \\ \zeta_2 = \zeta_2(\lambda) = \lambda(\omega_2(\lambda) - i\gamma), & \omega_2 = (1 - \dfrac{k^2}{4\lambda^2})^{1/2}\eta + \dfrac{k}{2\lambda} \end{cases} \tag{2.21}$$

とおく。この時、$\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = 0$, $\overline{\zeta_2} - \zeta_1 = k$, $\frac{\zeta_1}{\lambda}, \frac{\overline{\zeta_2}}{\lambda} \to \eta + i\gamma, (\lambda \to \infty)$ である。

$\zeta_j = \zeta_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, に対し、(2.2) の形で求めた $(L_{a_j,q_j} - 1)u_{\zeta_j} = 0$, $j = 1, 2$, の解を (2.1) へ代入すると、

$$K(\lambda) \equiv \int_\Omega e^{-ikx + \varphi_1 + \overline{\varphi_2}} (\Pi_{\zeta_2} + v_{\zeta_2})^* (V_1 - V_2)(\Pi_{\zeta_1} + v_{\zeta_1}) dx = 0.$$

ここで、A^*は、A の随伴行列を表わし、

$$\varphi_j = \mathcal{F}^{-1}(\frac{\zeta_j \hat{a}_j(\xi)}{\zeta_j \xi}), \quad j = 1, 2,$$

とする。

まず $\mathrm{rot} a_1 = \mathrm{rot} a_2$を示す。命題 2.7 より、

$$\lambda^{-2} K(\lambda) \sim \lambda^{-2} \int_\Omega e^{-ikx + \varphi_1 + \overline{\varphi_2}} \Pi_{\zeta_2}^* (V_1 - V_2) \Pi_{\zeta_1} dx. \tag{2.22}$$

ここで $A \sim B$ は、$A - B = o(1)$, $(\lambda \to \infty)$ を意味する。$(\Pi_{\zeta_2})^* = \Pi_{\bar{\zeta}_2}$ と $\lambda^{-1}\Pi_{\zeta_1}$, $\lambda^{-1}\Pi_{\bar{\zeta}_2}$ $\to \alpha\zeta_0/2$ と

$$\varphi_1 + \overline{\varphi_2} \to \psi \equiv \mathcal{F}^{-1}(\frac{\zeta_0((\hat{a}_1 - \hat{a}_2)(\xi))}{\zeta_0 \xi}) \tag{2.23}$$

を用いると、(2.22) より、

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} K(\lambda) &\sim \int_\Omega e^{-ikx + \psi} \frac{\alpha\zeta_0}{2} (V_1 - V_2) \frac{\alpha\zeta_0}{2} dx \\ &= -\frac{\alpha\zeta_0}{2} \int_\Omega e^{-ikx + \psi} \zeta_0 (a_1 - a_2) dx. \end{aligned}$$

この左辺はゼロなので、$\alpha\zeta_0 \neq 0$ より

$$\int_\Omega e^{-ikx + \psi} \zeta_0 (a_1 - a_2) dx = 0.$$

これより [3, §4] に従って $\mathrm{rot}a_1 = \mathrm{rot}a_2$を得る。

次に、$q_1 = q_2$を示す。$\mathrm{rot}a_1 = \mathrm{rot}a_2$と仮定$\Lambda_{a_1,q_1} = \Lambda_{a_2,q_2}$ より、ゲージ不変性から、$\Lambda_{a_1,q_1} = \Lambda_{a_1,q_2}$を得る。従って、以下 $a_1 = a_2 = a \in C_0^2(\overline{\Omega})$ として証明する。

命題 2.8.

$$P_\pm \lambda^{-1} K(\lambda) P_\pm \to \frac{1}{4}\alpha k \int_\Omega e^{-ikx} P_\mp (q_1 - q_2) P_\mp dx \alpha\zeta_0, \quad (\lambda \to \infty). \tag{2.24}$$

これが証明されたとすると、(2.24) の右辺のζ_0を$\bar{\zeta_0}$ で置き換えたものと、(2.24) を加えて、

$$\alpha k \int_\Omega e^{-ikx} P_\mp (q_1 - q_2) P_\mp dx \alpha\eta = 0$$

を得る。この左辺に左からαk を、右から$\alpha\eta$を掛けると、

$$k^2 \int_\Omega e^{-ikx} P_\mp (q_1 - q_2) P_\mp dx = 0$$

となり、$q_1 = q_2$が得られる。

命題 2.8 の証明. $q \equiv q_1 - q_2$とおくと、$\overline{\varphi_{\bar{\zeta_0}}} = -\varphi_{\zeta_0}$より、

$$\lambda^{-1} K(\lambda) = \int_\Omega e^{-ikx} (L_1(\lambda) + L_2(\lambda) + L_3(\lambda) + L_4(\lambda)) dx, \tag{2.25}$$

但し、$L_1(\lambda) = \lambda^{-1} \Pi_{\overline{\zeta_2}} q \Pi_{\zeta_1}, \quad L_2(\lambda) = \lambda^{-1} \Pi_{\overline{\zeta_2}} q v_{\zeta_1},$
$L_3(\lambda) = \lambda^{-1} v^*_{\zeta_2} q \Pi_{\zeta_1}, \quad L_4(\lambda) = \lambda^{-1} v^*_{\zeta_2} q v_{\zeta_1},$

である。各 $L_j(\lambda)$ を調べる。

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) &= \lambda^{-1}(P_+ + \frac{\alpha\overline{\zeta_2}}{2}) q (P_+ + \frac{\alpha\zeta_1}{2}) \\ &\sim \frac{\alpha\zeta_0}{2} q P_+ + P_+ q \frac{\alpha\zeta_0}{2} + \lambda^{-1} \frac{\alpha\overline{\zeta_2}}{2} q \frac{\alpha\zeta_1}{2} \\ &\sim \frac{\alpha\zeta_0}{2} q^+ + \frac{1}{4}\alpha k\, q \alpha\zeta_0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

となる。最後の$\sim$で$\bar{\zeta_2} = \zeta_1 + k$ と $(\alpha\zeta_1)^2 = 0$ を用いた。$L_2(\lambda)$ については、命題 2.7 より

$$L_2(\lambda) \sim -\frac{\alpha\zeta_0}{2} q N_{\zeta_0} M_{1,\zeta_0} \frac{\alpha\zeta_0}{2}, \tag{2.27}$$

但し、$M_{1,\zeta_0} = \alpha D(-\alpha b_{\zeta_0} + \tilde{q}_1) + (b^2_{\zeta_0} - \tilde{q}_1^+ \tilde{q}_1^- + 2\tilde{q}_1^+) I.$

更に、$q\alpha\zeta_0 = \alpha\zeta_0 q^I$, $(q^I \equiv q^+ P_- + q^- P_+)$ を使って、

$$\begin{aligned} \text{(2.27) の右辺} &= -\frac{\alpha\zeta_0}{2} q N_{\zeta_0} (\alpha D(-\alpha b_{\zeta_0} + \tilde{q}_1)) \frac{\alpha\zeta_0}{2} \\ &= -\frac{\alpha\zeta_0}{2} q N_{\zeta_0} (\alpha D \frac{\alpha\zeta_0}{2} (\alpha b_{\zeta_0} + \tilde{q}_1^I)) \\ &= -\frac{\alpha\zeta_0}{2} q N_{\zeta_0} [-\frac{\alpha\zeta_0}{2} \alpha D(\alpha b_{\zeta_0} + \tilde{q}_1^I) + \zeta_0 D(\alpha b_{\zeta_0} + \tilde{q}_1^I)] \\ &= -\frac{\alpha\zeta_0}{4} q (\alpha b_{\zeta_0} + \tilde{q}_1^I) \end{aligned} \tag{2.28}$$

を得る。ここで $(\alpha\zeta_0)^2=0$ を第１，４の等式で、$\zeta_0 b_{\zeta_0}=0$ を第２の等式で、(2.7) を第２、３の等式で、$N_{\zeta_0}(\zeta_0 Df)=f/2$ $(f\in H^{1,s})$ を第４の等式で用いた。同様に、

$$L_3(\lambda)\sim-(\alpha b_{\zeta_0}+\tilde{q}_2^I)q\frac{\alpha\zeta_0}{4} \tag{2.29}$$

を得る。$L_4(\lambda)\to 0$ は明らか。(2.25,26,28,29) と $\alpha\zeta_0 q\alpha b_{\zeta_0}+\alpha b_{\zeta_0}q\alpha\zeta_0=0$ より、

$$\lambda^{-1}K(\lambda)\sim\int_\Omega e^{-ikx}(\frac{\alpha\zeta_0}{2}q^+ +\frac{1}{4}\alpha k\,q\alpha\zeta_0-\frac{\alpha\zeta_0}{4}q\tilde{q}_1^I-\tilde{q}_2^I q\frac{\alpha\zeta_0}{4})dx.$$

これと $P_\pm\alpha\zeta_0 P_\pm=0$ より、

$$P_\pm\lambda^{-1}K(\lambda)P_\pm\sim P_\pm\int_\Omega e^{-ikx}\frac{1}{4}\alpha k\,q\alpha\zeta_0 dxP_\pm$$

となり、命題 2.8 が示された。 □

3. 定理 2 の証明.

定理 2(A) の証明. $a\in W_\Omega^{1,\infty}$, $q\in L^\infty(\Omega)$ とする。又、$\{\zeta(\lambda)\}_{\lambda>1}\subset Z$ を前節命題 2.7 の直前に定義されたものとし、$\lambda^{-1}\zeta(\lambda)\to\zeta_0$ $(\lambda\to\infty)$ に注意する。

$\zeta=\zeta(\lambda)$ に対し、$(L_{a,q}-1)u=0$ の解として、

$$\begin{aligned}u_\zeta(x)&=e^{i\zeta x}e^{\varphi_{\zeta_0}(x)}(I+v_\zeta(x))\Pi_\zeta,\\ \varphi_{\zeta_0}(x)&=\mathcal{F}^{-1}(\frac{\zeta_0\hat{a}(\xi)}{\zeta_0\xi})(x)\end{aligned} \tag{3.1}$$

の形で求め、$\lambda\to\infty$ での極限を調べる。(3.1) を $(L_{a,q}-1)u=0$ に代入すると、$v=v_\zeta$ に対する方程式

$$\begin{aligned}&(\alpha(D+\zeta)-2P_-+Q_{\zeta_0})v\Pi_\zeta=-Q_{\zeta_0}\Pi_\zeta,\\ &\text{但し、}Q_{\zeta_0}=-\alpha(a-D\varphi_{\zeta_0})+q,\end{aligned} \tag{3.2}$$

を得る。$\tilde{q}\in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ を、q をΩ の外側でゼロで拡張したものとし、また、$\overline{\Omega}$の近傍で 1 をとる$\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ をとり、

$$\tilde{Q}_{\zeta_0}=-\alpha\chi(a-D\varphi_{\zeta_0})+\tilde{q}$$

とおくと、$\tilde{Q}_{\zeta_0}\in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ かつコンパクト台をもつ。そこで、(3.2) 式において、Q_{ζ_0} を $\tilde{Q}_{\zeta_0}$に置き換え、Π_ζ を取り去った方程式

$$(\alpha(D+\zeta)-2P_-+\tilde{Q}_{\zeta_0})v_\zeta=-\tilde{Q}_{\zeta_0}\quad\text{in }\mathbf{R}^3 \tag{3.3}$$

を $v_\zeta\in L^{2,-s}$で考える。

命題 3.1. $\|\mathrm{rot}a\|_{L^\infty(\Omega)}$ と $\|q\|_{L^\infty(\Omega)}$が十分小さいとき (3.3) の解は、$v_\zeta \in H^{1,-s}$で唯一存在し、

$$v_\zeta \to \tilde{v}_{\zeta_0} \equiv -\mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\hat{\tilde{Q}}_{\zeta_0}(\xi)) \quad in\, L^{2,-s}, (\lambda \to \infty). \tag{3.4}$$

$$\text{更に、}\tilde{v}_{\zeta_0}\alpha\zeta_0 = 0. \tag{3.5}$$

証明. $v_\zeta \in L^{2,-s}$のとき、命題 2.4 より (3.3) は、

$$v_\zeta + (\alpha(D+\zeta) + 2P_+)g_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0}v_\zeta = -(\alpha(D+\zeta) + 2P_+)g_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0} \tag{3.6}$$

と同値である。命題 2.3 より任意の $w \in L^{2,-s}$に対し、

$$\begin{aligned}
\|(\alpha(D+\zeta) + 2P_+)g_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0}w\|_{-s} &\le \|\alpha Dg_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0}w\|_{-s} + \|(\alpha\zeta + 2P_+)g_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0}w\|_{-s} \\
&\le \|g_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0}w\|_{1,-s} + C|\zeta|\|g_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0}w\|_{-s} \\
&\le \|\tilde{Q}_{\zeta_0}w\|_s + C|\zeta|C|\zeta|^{-1}\|\tilde{Q}_{\zeta_0}w\|_s \\
&\le C(\|\mathrm{rot}a\|_{L^\infty(\Omega)} + \|q\|_{L^\infty(\Omega)})\|w\|_{-s}.
\end{aligned}$$

これより、$\|\mathrm{rot}a\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|q\|_{L^\infty(\Omega)}$ が十分小ならば (3.3) は、一意的な解 $v_\zeta \in L^{2,-s}$が存在し、$A_\zeta \equiv (\alpha(D+\zeta) + 2P_+)g_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0} \in B(L^{2,-s})$ とおくと、

$$v_\zeta = -(I + A_\zeta)^{-1}(\alpha(D+\zeta) + 2P_+)g_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0}.$$

また (3.6) より、$v_\zeta \in H^{1,-s}$である。
次に (3.4) を示す。[1] より、次のふたつが分かる：

$$A_\zeta w \to \tilde{A}_{\zeta_0}w \equiv \mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_{\zeta_0}w)(\xi)] \quad \text{in } L^{2,-s} \text{ for any } w \in L^{2,-s}\,(\lambda \to \infty).$$

$$(\alpha(D+\zeta) + 2P_+)g_\zeta\tilde{Q}_{\zeta_0} \to \mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\hat{\tilde{Q}}_{\zeta_0}(\xi)) \quad \text{in } L^{2,-s}, (\lambda \to \infty).$$

従って、

$$v_\zeta \to -(I + \tilde{A}_{\zeta_0})^{-1}\mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\hat{\tilde{Q}}_{\zeta_0}(\xi)) \quad \text{in } L^{2,-s}, (\lambda \to \infty). \tag{3.7}$$

また、$\alpha\zeta_0\tilde{Q}_{\zeta_0}\alpha\zeta_0 = 0$ を用いて、

$$\tilde{A}_{\zeta_0}\mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\hat{\tilde{Q}}_{\zeta_0}) = 0.$$

これと (3.7) より (3.4) が示される。(3.5) は、$\alpha\zeta_0\tilde{Q}_{\zeta_0}\alpha\zeta_0 = 0$ より従う。 □
(2.21) で与えた$\zeta_j = \zeta_j(\lambda)$ $j = 1, 2$, に対し、(3.1) の形で求めた $(L_{a_j,q_j} - 1)u_{\zeta_j} = 0$ の解を (2.1) へ代入すると、

$$K(\lambda) \equiv \int_\Omega e^{-ikx+\psi}((I + v_{\zeta_2})\Pi_{\zeta_2})^*(V_1 - V_2)(I + v_{\zeta_1})\Pi_{\zeta_1}dx = 0.$$

ここで、ψは (2.23) で与えられている。命題 3.1 より、

$$\lambda^{-2}K(\lambda) \sim \int_\Omega e^{-ikx+\psi}((I+\tilde{v}_{\bar{\zeta}_0})\frac{\alpha\bar{\zeta}_0}{2})^*(V_1-V_2)(I+\tilde{v}_{\zeta_0})\frac{\alpha\zeta_0}{2}dx.$$

ここで (3.5) を用いると、

$$\lambda^{-2}K(\lambda) \sim \int_\Omega e^{-ikx+\psi}\frac{\alpha\zeta_0}{2}(V_1-V_2)\frac{\alpha\zeta_0}{2}dx.$$

これより、前節と同様にして、

$$\int_\Omega e^{-ikx+\psi}\zeta_0(a_1-a_2)dx = 0$$

が従い、$\mathrm{rot}a_1 = \mathrm{rot}a_2$を得る。 □

定理 2(B) の証明. $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$ とし、このひとつの拡張を $a' \in W_0^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ かつ $\mathrm{supp}a' \subset B_r$ととる。ここで $B_r \supset \Omega$は半径 r の開球とする。$r' > r$ をとり $B_{r'}$での Dirichlet ラプラシアン$\Delta_{B_{r'}}$ により

$$p \equiv (\Delta_{B_{r'}})^{-1}\ \mathrm{div}a'$$

とおくと、$p \in W^{1,\infty}_{B_{r'}} \cap H^2(B_{r'})$ である。

補題 3.2. $\overline{\Omega}$の近傍で 1 となる$\chi \in C_0^\infty(B_{r'})$ をとり、$\tilde{a} = \chi(a'-\nabla p)$ とおく。このとき、

$$\tilde{a},\ \mathrm{div}\tilde{a} = \nabla\chi(a'-\nabla p),\ \mathrm{rot}\tilde{a} = \nabla\chi\times(a'-\nabla p)\ \text{はすべて}\ L^\infty(B_{r'})$$

and

$$\|\tilde{a}\|_{L^\infty(B_{r'})} + \|\mathrm{div}\tilde{a}\|_{L^\infty(B_{r'})} + \|\mathrm{rot}\tilde{a}\|_{L^\infty(B_{r'})} \le C\|\mathrm{rot}a\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

証明. $\Delta_{B_{r'}}$のグリーン関数を $G(x,y)$ とすると、$\Delta_y G(x,y) = \delta_{x-y}$ と部分積分より、

$$\begin{aligned}\tilde{a}_j(x) &= \chi(x)(\int \Delta_y G(x,y)a'(y)dy - \nabla_{x_j}\int G(x,y)(\mathrm{div}a')(y)dy)\\ &= \chi(x)\sum_{k=1}^3\int \nabla_{y_k}G(x,y)(\nabla_{y_k}a'_j - \nabla_{y_j}a'_k)(y)dy, \quad j=1,2,3,\end{aligned}$$

となる。これと、$|\nabla_{y_k}G(x,y)| \le C|x-y|^{-2}$ を用いて $\|\tilde{a}\|_{L^\infty(B_{r'})} \le C\|\mathrm{rot}a\|_{L^\infty(\Omega)}$ を得る。他は明らか。 □

一般に $g \in W^{1,\infty}(\Omega)$ とすると、$\Lambda_{a,q_1} = \Lambda_{a,q_2}$ と $\Lambda_{a+\nabla g,q_1} = \Lambda_{a+\nabla g,q_2}$ は同値である。実際、$\Lambda_{a+\nabla g,q}e^{ig}f = e^{ig}\Lambda_{a,q}f$ より分かる。これより補題 3.2 の$\tilde{a}$によって、$\Lambda_{\tilde{a},q_1} = \Lambda_{\tilde{a},q_2}$ となる。

$\{\zeta(\lambda)\}_{\lambda>1} \subset Z$ を前節命題 2.7 の直前に定義されたものとし、$\lambda^{-1}\zeta(\lambda) \to \zeta_0\ (\lambda\to\infty)$ に注意する。$\zeta = \zeta(\lambda)$ に対し、$(L_{\tilde{a},q}-1)u_\zeta = 0$ の解として、

$$u_\zeta(x) = e^{i\zeta x}(I+v_\zeta(x))\Pi_\zeta, \tag{3.8}$$

の形で求め、$\lambda \to \infty$ での極限を調べる。(3.8) を $(L_{\tilde{a},q}-1)u=0$ に代入すると、$v=v_\zeta$ に対する方程式

$$(\alpha(D+\zeta)-2P_-+Q)v\Pi_\zeta = -Q\Pi_\zeta, \quad (3.9)$$
$$\text{但し、}Q=-\alpha\tilde{a}+q,$$

を得る。$q \in W^{1,\infty}(\Omega)$ を$\tilde{q} \in W_0^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ へ拡張し、

$$\tilde{Q}=-\alpha\tilde{a}+\tilde{q}$$

とおく。そこで、(3.9) 式において、Q を$\tilde{Q}$に置き換え、Π_ζ を取り去った方程式

$$(\alpha(D+\zeta)-2P_-+\tilde{Q})v_\zeta = -\tilde{Q} \quad \text{in } \mathbf{R}^3 \quad (3.10)$$

を $v_\zeta \in L^{2,-s}$で考える。

命題 3.3. $\|\mathrm{rot}a\|_{L^\infty(\Omega)}$と $\|q\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$が十分小さいとき (3.10) の解は、$v_\zeta \in H^{1,-s}$で唯一存在し、

$$v_\zeta \to \tilde{v}_{\zeta_0} \equiv -\alpha\zeta_0(I-B_{\zeta_0})^{-1}\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{2\zeta_0\xi}\hat{\tilde{Q}}(\xi)) \quad in\, H^{1,-s},\ (\lambda\to\infty). \quad (3.11)$$

ここで、$B_{\zeta_0} \in B(H^{1,-s})$ は、

$$B_{\zeta_0}w \equiv \mathcal{F}^{-1}(\frac{\mathcal{F}(\zeta_0\tilde{a}w)(\xi)}{\zeta_0\xi}) \quad for\ \ w \in H^{1,-s}.$$

更に、

$$v_{\zeta_0}^\bullet \equiv (I-B_{\zeta_0})^{-1}\varphi_{\zeta_0} \quad \text{但し、}\varphi_{\zeta_0}=\mathcal{F}^{-1}(\frac{\zeta_0\hat{\tilde{a}}(\xi)}{\zeta_0\xi}) \quad (3.12)$$

とおくと、

$$\tilde{v}_{\zeta_0}\alpha\zeta_0 = v_{\zeta_0}^\bullet\alpha\zeta_0, \quad (3.13)$$
$$and \quad 1+v_{\zeta_0}^\bullet = e^{\varphi_{\zeta_0}} \quad (3.14)$$

である。$v_{\zeta_0}^\bullet$は、スカラー関数であることに注意しておく。

証明. 命題 2.4 より (3.10) は、

$$v_\zeta + (\alpha(D+\zeta)+2P_+)g_\zeta\tilde{Q}v_\zeta = -(\alpha(D+\zeta)+2P_+)g_\zeta\tilde{Q} \quad (3.15)$$

と同値である。任意の $w \in H^{1,-s}$に対し、

$$\begin{aligned}
&\|(\alpha(D+\zeta)+2P_+)g_\zeta\tilde{Q}w\|_{1,-s} \le C\|\tilde{Q}w\|_{1,s} \\
&\le C(\|\nabla(\alpha\tilde{a}w)\|_{L^2(B_{r'})}+\|\nabla(\tilde{q}w)\|_{L^2(B_{r'})}+\|\alpha\tilde{a}w\|_{L^2(B_{r'})}+\|\tilde{q}w\|_{L^2(B_{r'})}) \\
&\le C[\|\alpha\nabla(\alpha\tilde{a}w)\|_{L^2(B_{r'})}+(\|\nabla\tilde{q}\|_\infty+\|\tilde{q}\|_\infty+\|\tilde{a}\|_\infty)\|w\|_{H^1(B_{r'})}] \\
&\le C(\|\mathrm{div}\tilde{a}\|_\infty+\|\mathrm{rot}\tilde{a}\|_\infty+\|\nabla\tilde{q}\|_\infty+\|\tilde{q}\|_\infty+\|\tilde{a}\|_\infty)\|w\|_{H^1(B_{r'})} \\
&\le C(\|\mathrm{rot}a\|_{L^\infty(\Omega)}+\|q\|_{W^{1,\infty}(\Omega)})\|w\|_{1,-s}
\end{aligned}$$

を得る。3つめの不等式で $\|\nabla w\|_{L^2(B_{r'})} = \|\alpha\nabla w\|_{L^2(B_{r'})}$, $w \in H_0^1(B_{r'})$ を、4つめの不等式で$\alpha\nabla(\alpha a) = \mathrm{div}aI + S\cdot \mathrm{rot}a$, $S = (\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1, \alpha_1\alpha_2)$ を、5つめの不等式で補題 3.2 を用いた。これより、$\|\mathrm{rot}a\|_{L^\infty(\Omega)}$ と $\|q\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$ が十分小ならば (3.10) の一意解 $v_\zeta \in H^{1,-s}$ が存在し、$C_\zeta \equiv (\alpha(D+\zeta)+2P_+)g_\zeta\tilde{Q} \in B(H^{1,-s})$ とおくと、

$$v_\zeta = -(I+C_\zeta)^{-1}(\alpha(D+\zeta)+2P_+)g_\zeta\tilde{Q}.$$

次に、(3.11) を示す。次のふたつに注意：

$$C_\zeta w \to \tilde{C}_{\zeta_0} w \equiv \mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\widehat{\tilde{Q}w}(\xi)) \quad \text{in } H^{1,-s} \text{ for any } w \in H^{1,-s}\ (\lambda\to\infty).$$

$$(\alpha(D+\zeta)+2P_+)g_\zeta\tilde{Q} \to \mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\hat{\tilde{Q}}(\xi)) \quad \text{in } H^{1,-s}\ (\lambda\to\infty).$$

従って、

$$v_\zeta \to -(I+\tilde{C}_{\zeta_0})^{-1}\mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\hat{\tilde{Q}}(\xi)) \quad \text{in } H^{1,-s}\ (\lambda\to\infty).$$

また、$\alpha\zeta_0\tilde{Q}\alpha\zeta_0 = -2\zeta_0\tilde{a}\alpha\zeta_0$ を用いて、整数 $n\geq 0$ に対して、

$$(-\tilde{C}_{\zeta_0})^n\mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\hat{\tilde{Q}}) = (B_{\zeta_0})^n\mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\hat{\tilde{Q}}).$$

よって (3.11) を得る。(3.13) は、(3.11) と再び$\alpha\zeta_0\tilde{Q}\alpha\zeta_0 = -2\zeta_0\tilde{a}\alpha\zeta_0$ を用いると明らか。次に (3.14) を示す。(3.12) より、自然数 $n\geq 1$ に対し

$$(B_{\zeta_0})^{n-1}\varphi_{\zeta_0} = \varphi_{\zeta_0}^n/n! \tag{3.16}$$

を示せばよい。帰納法による。$n=1$ のときは、明らか。$n=l$ まで (3.16) が正しいとすると、

$$(B_{\zeta_0})^l\varphi_{\zeta_0} = B_{\zeta_0}(\varphi_{\zeta_0}^l)/l!$$

より、

$$(l+1)B_{\zeta_0}(\varphi_{\zeta_0}^l) = \varphi_{\zeta_0}^{l+1}, \quad l\geq 1,$$

を示せばよい。これは、次のふたつに注意すると分かる：

$$\varphi_{\zeta_0}(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(\zeta_0\tilde{a})(x-\eta y_1-\gamma y_2)}{y_1+iy_2}dy_1dy_2. \quad (\zeta_0 = \eta+i\gamma)$$

$$\prod_{k=1}^{l+1}\frac{1}{z_k} = \sum_{j=1}^{l+1}\frac{1}{z_j\prod_{k\neq j}(z_k-z_j)} \quad \text{for } z_k\in\mathbf{C},\ 1\leq k\leq l+1, \text{ and } z_k\neq z_j,\ k\neq j.$$

□

(2.21) で与えた$\zeta_j = \zeta_j(\lambda)$ $j=1,2,$ に対し、(3.8) の形で求めた $(L_{\tilde{a},q_j}-1)u_{\zeta_j} = 0$ の解を (2.1) へ代入すると、

$$K(\lambda) \equiv \int_\Omega e^{-ikx}((I+v_{\zeta_2})\Pi_{\zeta_2})^*(q_1-q_2)(I+v_{\zeta_1})\Pi_{\zeta_1}dx = 0$$

である。

補題 3.4.

$$P_\pm\lambda^{-1}K(\lambda)P_\pm \to \frac{1}{4}\alpha k\int_\Omega e^{-ikx}P_\mp(q_1-q_2)P_\mp dx\alpha\zeta_0, \quad (\lambda\to\infty).$$

この補題より 2 節と同様に $q_1=q_2$が出る。

証明. $q\equiv q_1-q_2$とおくと、

$$\lambda^{-1}K(\lambda)=\int_\Omega e^{-ikx}(L_1(\lambda)+L_2(\lambda)+L_3(\lambda)+L_4(\lambda))dx,$$

但し、
$$L_1(\lambda)=\lambda^{-1}P_+(I+v^*_{\zeta_2})q(I+v_{\zeta_1})P_+,$$
$$L_2(\lambda)=\lambda^{-1}P_+(I+v^*_{\zeta_2})q(I+v_{\zeta_1})\frac{\alpha\zeta_1}{2},$$
$$L_3(\lambda)=\lambda^{-1}\frac{\alpha\bar{\zeta}_2}{2}(I+v^*_{\zeta_2})q(I+v_{\zeta_1})P_+,$$
$$L_4(\lambda)=\lambda^{-1}\frac{\alpha\bar{\zeta}_2}{2}(I+v^*_{\zeta_2})q(I+v_{\zeta_1})\frac{\alpha\zeta_1}{2}.$$

とおく。$L_1(\lambda)\to 0$ は明らか。命題 3.3 より、

$$\begin{aligned}L_2(\lambda) &\sim P_+(I+(\tilde{v}_{\bar{\zeta}_0})^*)q(I+\tilde{v}_{\zeta_0})\frac{\alpha\zeta_0}{2}\\ &= P_+(I+(\tilde{v}_{\bar{\zeta}_0})^*)\frac{\alpha\zeta_0}{2}q^I(I+v^\bullet_{\zeta_0})\\ &= P_+\frac{\alpha\zeta_0}{2}q^I(I+v^\bullet_{\zeta_0}).\end{aligned} \tag{3.17}$$

ひとつめの等号で (3.13) を、ふたつめの等号で$\alpha\bar{\zeta}_0\tilde{v}_{\bar{\zeta}_0}=0$を用いた。従って、$P_\pm\alpha\zeta_0P_\pm=0$ より、

$$P_\pm L_2(\lambda)P_\pm\to 0 \tag{3.18}$$

を得る。又、同じ計算によって、

$$P_\pm L_3(\lambda)P_\pm\to 0 \tag{3.19}$$

である。次に、$L_4(\lambda)$ を調べる。

$$L_4(\lambda)=\sum_{j=1}^4 M_j(\lambda),$$

但し、
$$M_1(\lambda)=\frac{1}{4\lambda}\alpha\bar{\zeta}_2q\alpha\zeta_1,$$
$$M_2(\lambda)=\frac{1}{4\lambda}\alpha\bar{\zeta}_2q\,v_{\zeta_1}\alpha\zeta_1,$$
$$M_3(\lambda)=\frac{1}{4\lambda}\alpha\bar{\zeta}_2v^*_{\zeta_2}q\alpha\zeta_1,$$
$$M_4(\lambda)=\frac{1}{4\lambda}\alpha\bar{\zeta}_2v^*_{\zeta_2}q\,v_{\zeta_1}\alpha\zeta_1,$$

とおく。$\bar{\zeta}_2 = \zeta_1 + k$ と $\alpha\zeta_1 q\alpha\zeta_1 = 0$ より、

$$M_1(\lambda) = \frac{1}{4\lambda}\alpha(\zeta_1 + k)q\alpha\zeta_1 \sim \frac{1}{4}\alpha k\, q\, \alpha\zeta_0 \tag{3.20}$$

を得る。次に、$M_2(\lambda)$ を調べる。$\tilde{Q}_j = -\alpha\tilde{a} + \tilde{q}_j$ $j = 1, 2,$ とおくと、(3.15) より、

$$v_{\zeta_j} = -\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha(\xi + \zeta_j) + 2P_+}{\xi^2 + 2\zeta_j\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_j(v_{\zeta_j} + 1))], \quad j = 1, 2. \tag{3.21}$$

又、(2.20) より、任意の $f \in H^{1,s}$ に対し、

$$\lambda\mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\xi + 2P_+}{\xi^2 + 2\zeta_1\xi}\hat{f}(\xi)) \to \mathcal{F}^{-1}(\frac{\alpha\xi + 2P_+}{2\zeta_0\xi}\hat{f}(\xi)) \text{ in } L^{2,-s}, (\lambda \to \infty). \tag{3.22}$$

更に、命題 3.3 より、

$$\tilde{Q}_1 v_{\zeta_1} \to \tilde{Q}_1 \tilde{v}_{\zeta_0} \text{ in } H^{1,s}, (\lambda \to \infty). \tag{3.23}$$

(3.21,22,23) より、

$$v_{\zeta_1}\, \alpha\zeta_1 \sim -\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\xi + 2P_+}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(\tilde{v}_{\zeta_0} + 1))]\alpha\zeta_0 - \mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\zeta_1}{\xi^2 + 2\zeta_1\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(v_{\zeta_1} + 1))]\alpha\zeta_1.$$

よって、$\bar{\zeta}_2 = \zeta_1 + k$, (2.20) と (3.13) に注意して、

$$\begin{aligned} M_2(\lambda) \sim & -\frac{1}{4}\alpha\zeta_0\, q\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\xi + 2P_+}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(\tilde{v}_{\zeta_0} + 1))]\alpha\zeta_0 \\ & -\frac{1}{4\lambda}\alpha\bar{\zeta}_2\, q\alpha\zeta_1\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{\xi^2 + 2\zeta_1\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(v_{\zeta_1} + 1))]\alpha\zeta_1 \\ \sim & -\frac{1}{4}\alpha\zeta_0\, q\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\xi + 2P_+}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(v^\bullet_{\zeta_0} + 1))]\alpha\zeta_0 \\ & -\frac{1}{4}\alpha k\, q\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(v^\bullet_{\zeta_0} + 1))]\alpha\zeta_0. \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} P_\pm M_2(\lambda)P_\pm \sim & P_\pm\Big(\frac{1}{4}\alpha\zeta_0\, q\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\alpha\tilde{a}(v^\bullet_{\zeta_0} + 1))]\alpha\zeta_0 \\ & + \frac{1}{4}\alpha k\, q\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\zeta_0\tilde{a}(v^\bullet_{\zeta_0} + 1))]\Big)P_\pm \\ = & \frac{1}{4}P_\pm(\alpha\zeta_0 q X_{\zeta_0}\alpha\zeta_0 + \alpha k\, q\alpha\zeta_0 v^\bullet_{\zeta_0})P_\pm, \end{aligned} \tag{3.24}$$

ここで、

$$X_{\zeta_0} \equiv \mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\alpha\tilde{a}(v^\bullet_{\zeta_0} + 1))]$$

とおき、

$$v^\bullet_{\zeta_0} = \mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\zeta_0\tilde{a}(v^\bullet_{\zeta_0}+1))], \quad ((3.12) \text{による})$$

を用いた。$M_3(\lambda)$ に関しては、同様の計算により、

$$P_\pm M_3(\lambda)P_\pm \sim \frac{1}{4}P_\pm(\alpha\zeta_0 Y_{\zeta_0} q\alpha\zeta_0 + \alpha k\, q\alpha\zeta_0\overline{v^\bullet_{\zeta_0}})P_\pm, \tag{3.25}$$

ここで、

$$Y_{\zeta_0} \equiv \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((\overline{v^\bullet_{\zeta_0}}+1)\alpha\tilde{a})\frac{\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}]$$

とおき、

$$\overline{v^\bullet_{\zeta_0}} = -\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\zeta_0\tilde{a}(\overline{v^\bullet_{\zeta_0}}+1))],$$

に注意する。次に $M_4(\lambda)$ を調べる。(3.21) によって、

$$M_3(\lambda) = \sum_{j=1}^{4} N_j(\lambda), \text{ 但し、}$$

$$N_1(\lambda) = \frac{1}{4\lambda}\alpha\bar{\zeta}_2\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((v^*_{\zeta_2}+1)\tilde{Q}_2)\frac{-\alpha\xi+2P_+}{\xi^2-2\bar{\zeta}_2\xi}]q\,\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\xi+2P_+}{\xi^2+2\zeta_1\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(v_{\zeta_1}+1))]\alpha\zeta_1,$$

$$N_2(\lambda) = \frac{1}{4\lambda}\alpha\bar{\zeta}_2\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((v^*_{\zeta_2}+1)\tilde{Q}_2)\frac{-\alpha\xi+2P_+}{\xi^2-2\bar{\zeta}_2\xi}]q\,\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\zeta_1}{\xi^2+2\zeta_1\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(v_{\zeta_1}+1))]\alpha\zeta_1,$$

$$N_3(\lambda) = \frac{1}{4\lambda}\alpha\bar{\zeta}_2\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((v^*_{\zeta_2}+1)\tilde{Q}_2)\frac{\alpha\bar{\zeta}_2}{\xi^2-2\bar{\zeta}_2\xi}]q\,\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\xi+2P_+}{\xi^2+2\zeta_1\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(v_{\zeta_1}+1))]\alpha\zeta_1,$$

$$N_4(\lambda) = \frac{1}{4\lambda}\alpha\bar{\zeta}_2\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((v^*_{\zeta_2}+1)\tilde{Q}_2)\frac{\alpha\bar{\zeta}_2}{\xi^2-2\bar{\zeta}_2\xi}]q\,\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\zeta_1}{\xi^2+2\zeta_1\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(v_{\zeta_1}+1))]\alpha\zeta_1.$$

とする。$N_1(\lambda) \to 0$ は明らか。(3.22), (2.20), (3.13) より

$$\begin{aligned}N_2(\lambda) &\sim \frac{1}{4}\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((\tilde{v}^*_{\bar{\zeta}_0}+1)\tilde{Q}_2)\frac{-\alpha\xi+2P_+}{-2\zeta_0\xi}]q\,\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(\tilde{v}_{\zeta_0}+1))]\alpha\zeta_0\\ &= \frac{1}{4}\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((\overline{v^\bullet_{\zeta_0}}+1)\tilde{Q}_2)\frac{-\alpha\xi+2P_+}{-2\zeta_0\xi}]q\,\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\zeta_0}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}((-\alpha\tilde{a})(v^\bullet_{\zeta_0}+1))]\alpha\zeta_0.\end{aligned}$$

よって、

$$P_\pm N_2(\lambda)P_\pm \sim \frac{1}{4}P_\pm\alpha\zeta_0 Y_{\zeta_0} q\alpha\zeta_0 P_\pm v^\bullet_{\zeta_0}. \tag{3.26}$$

同様の計算により、

$$P_\pm N_3(\lambda)P_\pm \sim \frac{1}{4}P_\pm\alpha\zeta_0 q X_{\zeta_0}\alpha\zeta_0 P_\pm\overline{v^\bullet_{\zeta_0}}. \tag{3.27}$$

又、$\alpha kq\,\alpha\zeta_0 = -\alpha\zeta_0 q\alpha k$ を用いて、

$$\begin{aligned}N_4(\lambda) &\sim \frac{1}{4}\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((\tilde{v}^*_{\bar{\zeta}_0}+1)\tilde{Q}_2)\frac{1}{-2\zeta_0\xi}]\alpha kq\,\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}(\tilde{Q}_1(\tilde{v}_{\zeta_0}+1))]\alpha\zeta_0\\ &= \frac{1}{4}\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((\overline{v^\bullet_{\zeta_0}}+1)\tilde{Q}_2)\frac{1}{-2\zeta_0\xi}]\alpha kq\,\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2\zeta_0\xi}\mathcal{F}((-\alpha\tilde{a})(v^\bullet_{\zeta_0}+1))]\alpha\zeta_0\\ &= -\frac{1}{4}\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}((\overline{v^\bullet_{\zeta_0}}+1)(-\alpha\tilde{a}))\frac{1}{-2\zeta_0\xi}]\alpha\zeta_0 q\,\alpha k(-v^\bullet_{\zeta_0})\\ &= \frac{1}{4}\overline{v^\bullet_{\zeta_0}}\alpha kq\,\alpha\zeta_0 v^\bullet_{\zeta_0},\end{aligned}$$

より、

$$P_{\pm}N_4(\lambda)P_{\pm} \sim \frac{1}{4}P_{\pm}\alpha kq\,\alpha\zeta_0 P_{\pm}\overline{v^{\bullet}_{\bar{\zeta}_0}}v^{\bullet}_{\zeta_0}. \tag{3.28}$$

従って、(3.18–20,24–28) より、

$$\begin{aligned} P_{\pm}\lambda^{-1}K(\lambda)P_{\pm} \sim \frac{1}{4}P_{\pm}[&\alpha kq\,\alpha\zeta_0(1+v^{\bullet}_{\zeta_0})(1+\overline{v^{\bullet}_{\bar{\zeta}_0}}) \\ &+ (1+v^{\bullet}_{\zeta_0})\alpha\zeta_0 Y_{\zeta_0}q\alpha\zeta_0 + (1+\overline{v^{\bullet}_{\bar{\zeta}_0}})\alpha\zeta_0 qX_{\zeta_0}\alpha\zeta_0]P_{\pm}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$(1+v^{\bullet}_{\zeta_0})(1+\overline{v^{\bullet}_{\bar{\zeta}_0}}) = e^{\varphi_{\zeta_0}}e^{\overline{\varphi_{\bar{\zeta}_0}}} = 1$$

に注意すると、

$$(1+v^{\bullet}_{\zeta_0})\alpha\zeta_0 Y_{\zeta_0}q\alpha\zeta_0 + (1+\overline{v^{\bullet}_{\bar{\zeta}_0}})\alpha\zeta_0 qX_{\zeta_0}\alpha\zeta_0 = 0 \tag{3.30}$$

が示されれば、命題3.4の証明は終わる。実際、X_{ζ_0}, Y_{ζ_0}の定義と (3.14) より、(3.30) の左辺は、$\varphi = \varphi_{\zeta_0}$と書いて、

$$\begin{aligned} &e^{\varphi}\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\frac{\mathcal{F}(e^{-\varphi}\alpha\tilde{a})\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}]q\alpha\zeta_0 + e^{-\varphi}\alpha\zeta_0 q\mathcal{F}^{-1}[\frac{\alpha\xi\mathcal{F}(\alpha\tilde{a}e^{\varphi})}{2\zeta_0\xi}]\alpha\zeta_0 \\ =&q^I\left(e^{\varphi}\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\frac{\mathcal{F}(e^{-\varphi}\alpha\tilde{a})\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}] - e^{-\varphi}\alpha\zeta_0\mathcal{F}^{-1}[\frac{\mathcal{F}(e^{\varphi}\alpha\tilde{a})\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}]\right)\alpha\zeta_0 \\ =&q^I\left(e^{\varphi}\mathcal{F}^{-1}[\frac{\mathcal{F}(e^{-\varphi}2\zeta_0\tilde{a})\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}] - e^{-\varphi}\mathcal{F}^{-1}[\frac{\mathcal{F}(e^{\varphi}2\zeta_0\tilde{a})\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}]\right)\alpha\zeta_0 \\ &- q^I\left(e^{\varphi}\mathcal{F}^{-1}[\frac{\mathcal{F}(e^{-\varphi}\alpha\tilde{a})\alpha\zeta_0\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}] - e^{-\varphi}\mathcal{F}^{-1}[\frac{\mathcal{F}(e^{\varphi}\alpha\tilde{a})\alpha\zeta_0\alpha\xi}{2\zeta_0\xi}]\right)\alpha\zeta_0. \end{aligned}$$

この最右辺第1項は$\dfrac{\mathcal{F}(e^{-\varphi}\zeta_0\tilde{a})}{\zeta_0\xi} = -\mathcal{F}(e^{-\varphi})$, $\dfrac{\mathcal{F}(e^{\varphi}\zeta_0\tilde{a})}{\zeta_0\xi} = \mathcal{F}(e^{\varphi})$ を用いて、第2項は $\alpha\zeta_0\alpha\xi\alpha\zeta_0 = 2\zeta_0\xi\alpha\zeta_0$ を用いて、ゼロになる。

References

[1] H.Isozaki, Inverse scattering theory of Dirac operators, Ann. Inst. Henri Poincare, Phys. Theor. (to appear).

[2] G.Nakamura, Z.Sun, G.Uhlmann, Global identifiability for an inverse problem for the Schrödinger equation in a magnetic field, Math. Annalen, **303** (1995), 377–388.

[3] Z.Sun, An inverse boundary value problem for Schrödinger operators with vector potentials, Trans. of AMS, **338** (1993), 953–969.

[4] J.Sylvester, G.Uhlmann, A global uniqueness theorem for an inverse bounbary value problem, Ann. of Math. (2) **125** (1987), 153–169.

[5] R. Weder, Generalized limiting absorption method and multidimensional inverse scattering theory, Math. Meth. in Appl. Sci., **14** (1991), 509–524.