

曲面上のコード・ダイアグラムのなすポワソン 代数の量子化

東大 M2 柳沢 韻 (Yanagisawa Hibiki)

1. 量子化

Lie 代数 P が可換な積をもち、Leibniz 則

$\{a, b, c\} = \{a, c\}b + a\{b, c\}$ をみたすとき、 P を Poisson 代数とい
う。Poisson 代数 P の量子化は、 P の非可換な拡大である。

定義 \mathbb{C} 上の Poisson 代数 P の量子化とは、 $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 上の代数 A と
全射 $p: A \rightarrow P$ の組 (A, p) で次をみたすものである。

(1) $\varphi: \mathbb{C}[[\hbar]] \rightarrow \mathbb{C}$ ($\varphi(\hbar) = 0$) なる線形写像に関して、

$$p(dx) = \varphi(x) p(x) \quad (d \in \mathbb{C}[[\hbar]], x \in A)$$

(2) $a, b \in A$ に対して、

$$p(ab) - p(ba) = \hbar p(\{p(a), p(b)\}) \pmod{\hbar^2 A}$$

\mathbb{C} 上の

例 Lie 代数 \mathfrak{g} の対称代数 $S(\mathfrak{g})$ には、Leibniz 則によって、

bracket が (- 意的に) 拡張され、Poisson 代数となる。

\mathfrak{g} の bracket を $\{, \}$ とすると、 $\mathbb{C}[[\hbar]] \otimes S(\mathfrak{g})$ は $\hbar \{, \}$ なる

bracket に関して $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 上の Lie 代数となるが、この包絡代

数 $U_\hbar(\mathfrak{g})$ を考える。 $\hbar \rightarrow 0$ とすれば、線形写像

$p: U_h(\mathcal{G}) \rightarrow S(\mathcal{G})$ を得るが、これは定義により決ま
た。

$$a\ell - \ell a = h\{a, \ell\} = h p^{-1}\{p(a), p(\ell)\}$$

従って $(U_h(\mathcal{G}), p)$ は $S(\mathcal{G})$ の量子化である。

2. 曲面上のコードダイアグラム

Chord diagram とは、有限個の oriented circle と両端をそれ
らの上にもつ arc (以下 chord) の集まりである。ただし、chord
の端点はすべて異なり、向きを保つ circles の diffeomorphisms
によって同一視を行なう。

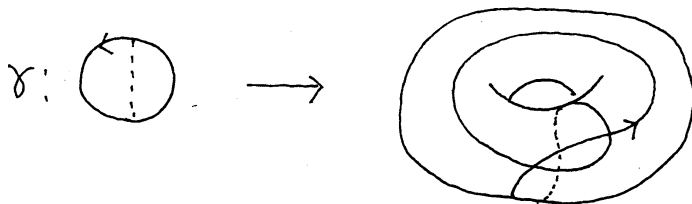
a chord diagram : 

Σ を oriented surface としたとき、chord diagram をなす
circles から Σ への連続写像 γ で決まるものを Σ 上の
chord diagram という。

* a, ℓ が一つの chord の両端ならば $\gamma(a) = \gamma(\ell)$

ただし、上の条件をみたす free homotopy による変形によっ
て同一視をする。また、端点の像を黒点で表わす。

例



$\mathcal{D}(\Sigma)$ を Σ 上の chord diagram で張られる \mathbb{C} 上のベクトル空間とし、 $D(\Sigma) = \mathcal{D}(\Sigma) / 4\text{term relation}$ とする。ここで、4term relation とは、

$$\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0$$

なる関係である。

Σ 上の chord diagram γ の self intersection が有限個で全て transverse double point であるとき、 γ は generic であるという。今、 $\alpha \cup \beta$ が generic となる α, β を選び bracket を

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{P \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(P; \alpha, \beta) \alpha \cup \beta(P)$$

$$\varepsilon(P; \alpha, \beta) = \begin{cases} +1 & (\beta \nearrow \alpha \text{ に対して}) \\ -1 & (\alpha \nearrow \beta \text{ に対して}) \end{cases}$$

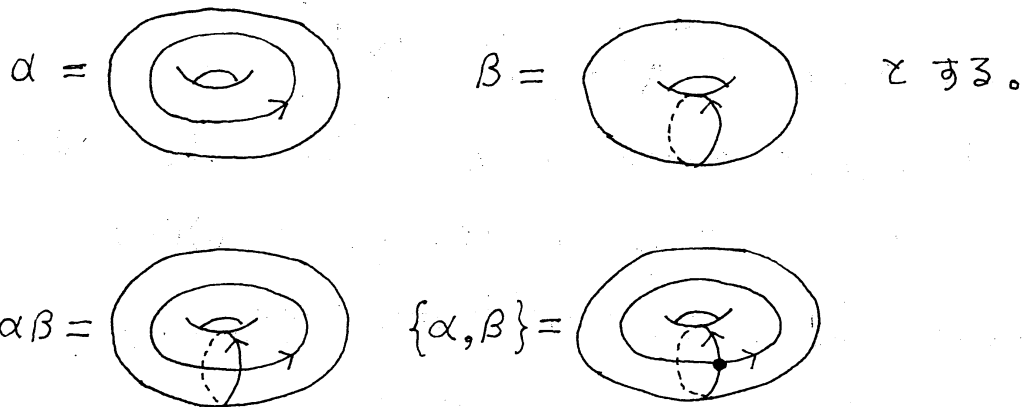
$\alpha \cup \beta(P)$ は $\alpha \cup \beta$ の一部 $\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \nwarrow \end{array}$ を $\begin{array}{c} \nwarrow \\ \times \\ \nearrow \end{array}$ で置きかえた diagram と定義する。また、 α, β の(可換な)積を $\alpha\beta = \alpha \cup \beta$ と定める。このとき次が知られている。

命題 [AMR1]

上の bracket は $D(\Sigma)$ で well defined であり、 $D(\Sigma)$ は Poisson 代数になる。

Remark $D(\Sigma)$ は $[K]$ における $\mathcal{A}(\Sigma)$, [AMR] における $\text{ch}(\Sigma)$ と同じものである。

例

3. $D(\Sigma)$ の量子化

$\Sigma \times I$ ($I = [0, 1]$) 内の oriented singular link γ は、有限個の oriented circle の immersion

$$L: S^1 \cup \dots \cup S^1 \longrightarrow \Sigma \times I$$

であって、intersection が有限個ですべて transverse double point となるものことである。ただし、同値関係を次で定める。

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow \Sigma \times I \text{ の isotopy } h_t \text{ が存在して、} h_0 = \text{id}, \\ h_1(L_1) = L_2 \text{ かつ } h_t(L_1) \text{ は singular link となる。}$$

$\Sigma \times I$ 内の singular link が $\mathbb{Z}[h]$ 上張る加群を次の skein relation で割った加群を $Q(\Sigma)$ とする。

$Q(\Sigma) = \mathbb{C}[h] \{ \text{singular links in } \Sigma \times I \} / \text{skein relation}$

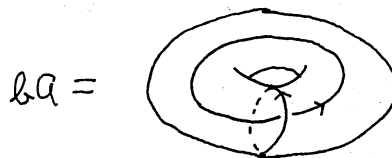
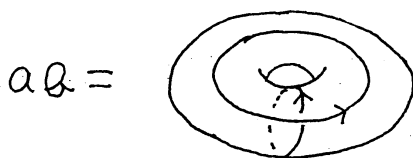
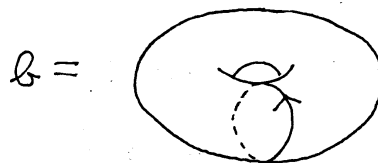
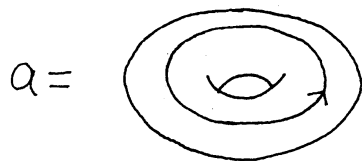
skein relation: $h \begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} \nearrow \\ / \\ \searrow \end{array} - \begin{array}{c} \nearrow \\ \backslash \\ \searrow \end{array}$

Remark $L_1, L_2 \in \text{intersection}$ をもたない links とする。このとき、 $L_1 \neq L_2$ ならば $L_1 \neq L_2$ in $Q(\Sigma)$

Singular links L_1, L_2 に対して積を次で定める。

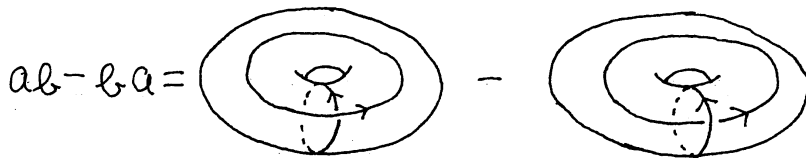
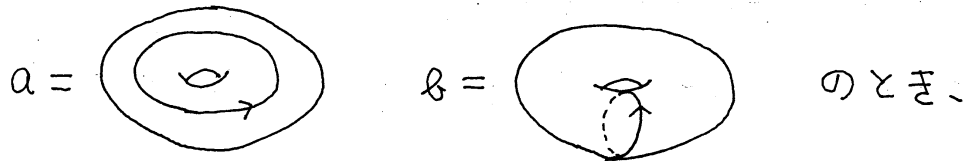
$$L_1 L_2 = \begin{array}{|c|} \hline L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} (a, t) \in \Sigma \times I ; \\ t > \frac{1}{2} \text{ のとき } (a, 2t-1) \in L_1 \\ t < \frac{1}{2} \text{ のとき } (a, 2t) \in L_2 \end{array} \right\}$$

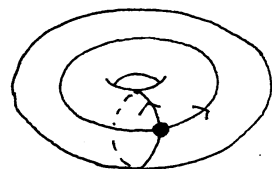
例



射影 $\pi: \Sigma \times I \rightarrow \Sigma$ は $h \rightarrow 0$ としたときの写像 $p: Q(\Sigma) \rightarrow D(\Sigma)$ を引き起こす。

定理 $p: Q(\Sigma) \rightarrow D(\Sigma)$ は量子化である。

例

$= h$  $= h p^{-1} \{ p(a), p(b) \}$

Remark 一般には、 $ab - ba$ の全てのcrossing についての同様の議論によって 定理は証明される。

4. 参考文献

ここで述べたことは、曲面上のloopの量子化に関する[T]の拡張であり、関連した事柄が[AMR2]で扱われている。

[AMR1] J.E. Andersen, J. Mattes and N. Reshetikhin: The Poisson structure on the moduli space of flat connections and chord diagrams. *Topology* 35(4) pp. 1069-1083, 1996

[AMR2] J.E. Andersen, J. Mattes and N. Reshetikhin: Quantization of the algebra of chord diagrams

MSRI Preprint 1996-072

[K] T. Kohno: Elliptic KZ system, braid group of the torus and Vassiliev invariant,

[T] V. Turaev: Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces. An. Sci. Éc. Norm. Sup., 24 pp. 635-704, 1991