

ヘッケカテゴリーの既約表現

琉大数理 小須田 雅 (Masashi KOSUDA)

1 Hecke Category

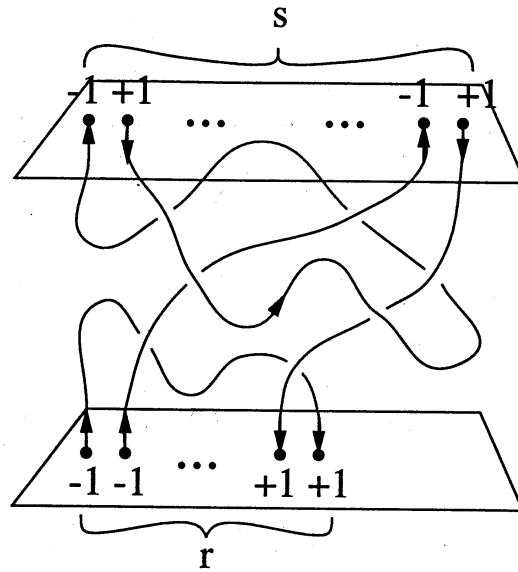
Hecke Category を定義する前に, Oriented Tangle Category について説明する.
 $\mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ 内の向きをついた arc と circle 有限個の集合で, 互いに交わらぬよう
 $\mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ に以下のように埋め込まれたものを考える.

- 境界 ∂T は $\partial = \{(i, 0, 0); i = 1, 2, \dots, r\} \cup \{(j, 0, 1); j = 1, 2, \dots, s\}$.
- T はその境界で $\mathbf{R}^2 \times 0$ および $\mathbf{R}^2 \times 1$ に垂直.

この集合において, 境界 ∂T を固定する isotopy で移り合うものを同一視した集合の元を oriented tangle と呼ぶ. 以下, 単にタングルと呼ぶことにする. 特に下側の端点の個数が r で, 上側の端点の個数が s 個のものは (oriented) (r, s) -tangle と呼ぶこともある (Figure 1). リンクは, $(0, 0)$ -tangle とみなすことが出来る. 各 arc の境界はタングルの境界をなす. arc の向きがその境界で上向きするとき境界点に符号 -1 を与え, 下向きするとき符号 1 を与えることにすると, タングルの下側の端点 $\partial_-(T)$ と上側の端点 $\partial_+(T)$ には次のように符号の列が与えられる:

$$\begin{aligned}\partial_-(T) &= \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r), \\ \partial_+(T) &= \epsilon' = (\epsilon^1, \epsilon^2, \dots, \epsilon^s).\end{aligned}$$

符号列 ϵ 中の $+1$ の数を $\text{Pos}(\epsilon)$, -1 の数を $\text{Neg}(\epsilon)$ と表わすことにする. 上記のように ϵ と ϵ' が一つのタングルの端点を表わしている場合には, $\text{Pos}(\epsilon) - \text{Neg}(\epsilon) = \text{Pos}(\epsilon') - \text{Neg}(\epsilon')$ が成り立つ. $\text{Pos}(\partial_-(T)) - \text{Neg}(\partial_-(T)) = p$ であるとき, T はクラス p のタングルであるという.

Figure 1: Oriented (r, s) -tangle

タングル T_2 の上側の端点の符号 $\partial^+(T_2)$ とタングル T_1 の下側の端点の符号 $\partial_-(T_1)$ とが一致するときには、それらを繋いで高さを半分にするにより、新しいタングル T_0 を作ることができる。これを合成積と呼び、 $T_1 \circ T_2$ と書くことにする (Figure 2(a)). 合成積は同じクラスのタングルでないと定義出来ない。タングル T を object $\partial_-(T)$ から、object $\partial^+(T)$ への morphism とみなすと、合成積 \circ を morphism の合成と考えることにより、タングルの集合はカテゴリーとみなすことが出来る。このカテゴリーを OTA と表わすことにする。 OTA には更にテンソル積 \otimes を Figure 22(b) のように定義することができる。この2つの積 (\circ と \otimes) の構造から、 OTA は群のように生成元と関係式で定義されることがわかる [1, 2].

定理 1.1. ([1, 2]) OTA は Figure 3 の生成元と Figure 4 の関係式による表示を持つ。

OTA を \mathbb{C} 上線型に拡張して考え、Figure 5 のスケイン関係式を入れたものをヘッケカテゴリーと呼び、 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{C}; a^{-1}, q - q^{-1})$ と表わす。このカテゴリーが完全可約であり、既約表現が構成できるというのが、主たる結果である。 \mathcal{H} も Figure 4 の関係式をみたすので、すべての既約表現はタングルの不変量を表わしている。

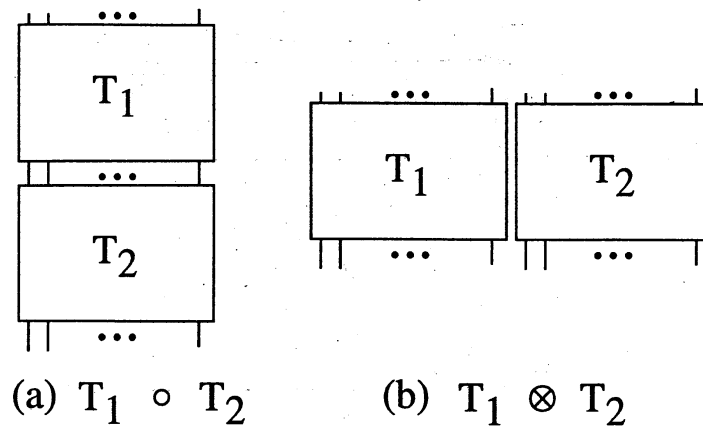


Figure 2: 合成積とテンソル積

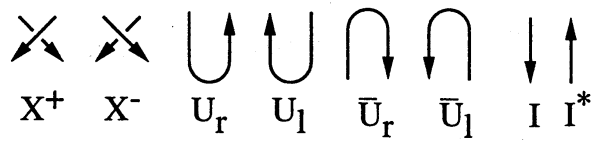


Figure 3: 生成元

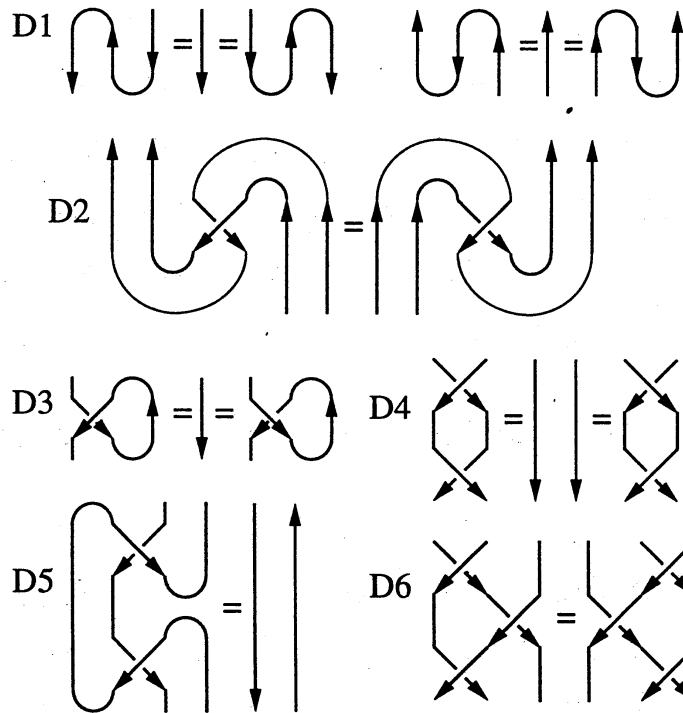


Figure 4: 関係式

$$a^{-1} \left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) - a \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) = (q - q^{-1}) \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right)$$

Figure 5: スケイン関係式

2 カテゴリーの既約表現

カテゴリーの既約表現について定義する。

K を体, \mathcal{A} を $Ob(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ であるような (小さい) カテゴリーとする. object $x, y \in Ob(\mathcal{A})$ に対し, x から y への morphism の集合を $A(x, y) = Mor_{\mathcal{A}}(x, y)$ で表わすことにする. また, $A(x, y)$ は K 上の有限次元ベクトル空間で morphism の合成 $A(y, z) \times A(x, y) \rightarrow A(x, z)$ は bilinear であると仮定する. 有限次元ベクトル空間のなすカテゴリーを \mathcal{V}_{ect} と表わすことにする.

定義 2.1. (表現) $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ を共変関手とする. 対応 $\alpha \in A(x, y) \rightarrow \mathbf{F}(\alpha) \in \mathcal{V}_{ect}$ が K -線型るとき, \mathbf{F} を \mathcal{A} の (線型) 表現 (representation) と呼ぶ.

定義 2.2. (表現の同値) $\mathbf{F} = (\mathbf{F}, \mathcal{V} = \{V_x\})$ と $\mathbf{G} = (\mathbf{G}, \mathcal{W} = \{W_x\})$ が同値 (equivalent) であるとは, \mathbf{F} と \mathbf{G} が自然同値であること. すなわち, 任意の object の組 $x, y \in Ob(\mathcal{A})$ と x から y への任意の morphism $\alpha \in A(x, y)$ に対し, $\mathbf{G}(\alpha) \circ \phi_x = \phi_y \circ \mathbf{F}(\alpha)$ となる K -同型射像の族 $\{\phi_x\}$ が存在することである.

定義 2.3. (部分表現) $\mathbf{F} = (\mathbf{F}, \mathcal{V})$ と $\mathbf{G} = (\mathbf{G}, \mathcal{W})$ を \mathcal{A} の表現とする. 任意の object の組 $x, y \in Ob(\mathcal{A})$ と x から y への任意の morphism $\alpha \in A(x, y)$ に対し, $\mathbf{G}(\alpha) \circ \iota_x = \iota_y \circ \mathbf{F}(\alpha)$ となる K -単射準同型の族 $\{\iota_x\}$ が存在するとき, \mathbf{G} を \mathbf{F} の部分表現 (subrepresentation) と呼ぶ.

定義 2.4. (制限) $\mathbf{F}(x) = V_x$ とするとき, \mathbf{F} は $A(x, x)$ の K -代数としての表現

$$\mathbf{F}|_x = F_x : A(x, x) \rightarrow \text{Hom}_K(V_x, V_x)$$

を定める. これを \mathbf{F} の x への制限 (restriction) と呼ぶ.

定義 2.5. (零表現) \mathcal{A} の任意の object を $\{0\}$ に, 任意の object の組 x, y に対し, $A(x, y)$ のすべての元を 0-射像に写す表現を零表現 (zero representation) と呼び $\mathbf{0}$ で表わす.

定義 2.6. (既約表現) 表 \mathbf{F} が, \mathbf{F} それ自身と $\mathbf{0}$ 以外の部分表現を持たないとき, \mathbf{F} は, 既約 (irreducible) であると言う. 但し, 零表現 $\mathbf{0}$ は既約表現に含めない.

定義 2.7. (直和) $\{\mathbf{F}_i\} = (\mathbf{F}_i, \mathcal{V}_i = \{V_{i,x}; x \in \text{Ob}(\mathcal{A})\})$ ($i \in I$) を \mathcal{A} の表現の族とする. 任意の object $x \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ に対し,

$$\sum_{i \in I} \dim V_{i,x} < \infty$$

であるとき, $\{\mathbf{F}_i\}$ の直和 (direct sum) $(\oplus_{i \in I} \mathbf{F}_i)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} (\oplus_{i \in I} \mathbf{F}_i)(x) &= \oplus_{i \in I} V_{i,x} \quad \text{for } x \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \\ (\oplus_{i \in I} \mathbf{F}_i)(\alpha) &= \oplus_{i \in I} (\mathbf{F}_i(\alpha)) : \oplus_{i \in I} V_{i,x} \rightarrow \oplus_{i \in I} V_{i,y} \\ &\quad \text{for } x, y \in \text{Ob}(\mathcal{A}) \text{ and } \alpha \in A(x, y). \end{aligned}$$

定義 2.8. (完全可約) 表現 \mathbf{F} が既約表現の直和になるとき, \mathbf{F} は完全可約 (completely reducible) であると言う.

定理 2.9. カテゴリー \mathcal{A} が更に次の条件を満たすと仮定する.

(1) $\text{Ob}(\mathcal{A})$ は, 整列集合

(2) 任意の object $x \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ に対し, K -代数 $A(x, x)$ のすべての有限次元表現は, 完全可約

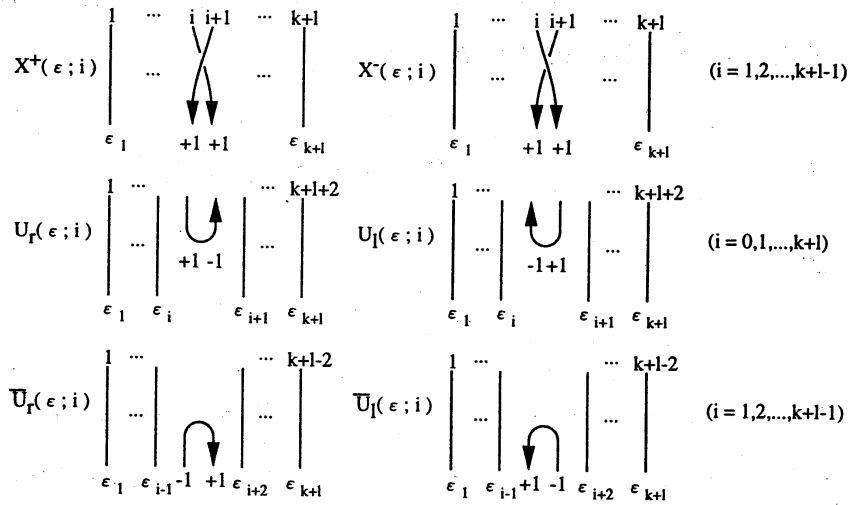


Figure 6: 新しい生成元

(3) $x \leq y$ かつ $A(x, y) \neq \{0\}$ なる任意の object の組 $x, y \in Ob(\mathcal{A})$ に対し, $A(y, x) \neq \{0\}$ であり, かつ $1_x = \tau_y \circ \tau'_y$ となるような morphism $\tau_y \in A(y, x)$ と $\tau'_y \in A(x, y)$ が存在する. ここで, 1_x は $A(x, x)$ の単位元である.

このとき \mathcal{A} の任意の表現 $F = (F, \mathcal{V})$ は完全可約である.

3 主結果

2 節で定義した表現をヘッケカテゴリー \mathcal{H} に適用するために, ヘッケカテゴリーの定義を少し修正する. 1 節で定義したヘッケカテゴリーは, テンソル積の構造を持っていたが, 2 節で定義した表現はテンソル積の構造の保存については言及していないことに注意する. そこで生成元については, あらかじめ I と I^* とのテンソルを取ったものを新たに生成元と決めることにする (Figure 6). また, ヘッケカテゴリーがテンソル積を持つという性質から, 特異点 (極大, 極小, 交叉) が 1 本の紐で繋がれていないときには, それらは可換であるということが導かれる [1]. そこで関係式としては, 局所的に Figure 4 の関係式が成り立つこと, スケイン関係式が成り立つことその他に, 特異点が紐で繋がれていないときには可換である, という関係式を加える. 新たに定義した生成元と関係式は元のヘッケカテゴリーのテンソル積の構造を忘れたも

のになっている。こうして定義しなおしたヘッケカテゴリーに関して次が成立する。

定理 $\Lambda_{k,l}$ を次のような分割の組の集りとする:

$$\Lambda_{k,l} = \coprod_{m=0}^{\min(k,l)} \{[\alpha, \beta]; \alpha, \beta \text{ 分割}, |\alpha| = k - m, |\beta| = l - m\}.$$

Λ を $\Lambda_{k,l}$ の和集合

$$\Lambda = \bigcup_{r=0}^{\infty} \bigcup_{k+l=r} \Lambda_{k,l} = \prod_{p=-\infty}^{\infty} \bigcup_{k-l=p} \Lambda_{k,l}$$

とする。ヘッケカテゴリー $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{C}; a^{-1}, q - q^{-1})$ においてパラメータ $0 \neq q \in \mathbb{C}$ は 1 の巾根でなく、もう 1 つのパラメータ $0 \neq a \in \mathbb{C}$ は q の巾でないと仮定する。このとき、

(1) \mathcal{H} の任意の有限次元表現は完全可約。

(2) 任意の分割の組 $\gamma \in \Lambda$ に対し、 \mathcal{H} の既約表現 P^γ が存在する。既約表現 $P^\gamma, P^{\gamma'}$ ($\gamma, \gamma' \in \Lambda$) は $\gamma = \gamma'$ のときに限り同値である。逆に、 \mathcal{H} の任意の既約表現 P に対し、 P と同値になる既約表現 P^γ ($\gamma \in \Lambda$) が存在する。

(1) については、定理 2.9 を示すことにより、証明できる。今回は、(2) の P^γ の構成方法について述べる (4 節参照)。

定理の中で既約表現のラベル集合 $\Lambda_{k,l}$ の定義より、 $p = k - l = k' - l'$ のとき、 $k + l \leq k' + l'$ であるならば $\Lambda_{k,l} \subset \Lambda_{k',l'}$ であることに注意。

次節で $\gamma \in \Lambda$ に対し、表現 P^γ を構成するが、 $\text{Pos}(\epsilon) = k, \text{Neg}(\epsilon) = l$ なる object ϵ と $\text{Pos}(\epsilon') = k' \geq k, \text{Neg}(\epsilon') = l' \geq l$ なる object ϵ' を両端に持つクラス $p = k - l$ のタングル T について $\gamma' \in \Lambda_{k',l'} \setminus \Lambda_{k,l}$ をラベルとする表現 $P^{\gamma'}(T)$ は 0 になり、 $\gamma'' \in \Lambda_{k'',l''} (k'' - l'' \neq p)$ を添え字とする表現 $P^{\gamma''}(T)$ も 0 になることをあらかじめ注意しておく。

リンク L の場合、クラス 0 のタングルと考えることが出来るので、上の考察より、 $\gamma = [\emptyset, \emptyset]$ のときのみ、自明でない表現になる。これは、リンクの Homfly 多項式と一致する。

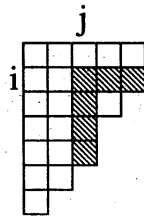


Figure 7: ヤング図形

4 表現 P^γ の構成

以下では、カテゴリー \mathcal{H} は体 $K(a, q)$ 上で考えているが、定理の仮定のもとでは、 \mathbb{C} 上でも同様に議論できる。

\mathcal{H} の表現 $\{P^\gamma\}$ の表現空間 \mathcal{L}^γ はベクトル空間 $K(a, q)\Omega(\epsilon)^\gamma$ の集まりである。各ベクトル空間 $K(a, q)\Omega(\epsilon)^\gamma$ の基底は tableaux と呼ばれる分割の組の並び、あるいは同じことであるが Bratteli Diagram Γ_ϵ の中の道によって定義される。

tableau と Bratteli Diagram Γ_ϵ を定義する前に、分割と階段について説明する。0でない成分の個数が有限個である整数列 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n)$ を考え、 $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$ と定める。 λ が、弱減少列で $|\lambda| = N$ のとき、大きさ N の階段と呼ぶ。特に、 λ が非負弱減少列であるとき、 λ を N の分割という。ヤング図形とは分割を Figure 7のような箱の配置によって表わしたものである。図の表わし方からわかるように、0でない成分が一致しているものについては、同じ分割とみなすことにする。また分割 λ の0でない成分の個数を分割の深さといい、 $l(\lambda)$ で表わす。ヤング図形 λ の箱の位置を行列のように表わすことにすると λ の (i, j) 成分の箱に対し、hook-length $h_\lambda(i, j)$ が次で定義される：

$$h_\lambda(i, j) = \lambda_i - j + \lambda_j^* - i + 1.$$

ここで、 λ_j^* は λ の第 j 列の長さを表わす。Figure 7の場合、斜線をつけた箱の数が hook-length を表わす。

減少列の長さを n に固定して考えるとき、階段は成分を正の部分と負の部分の2つに分けて考えることにより、分割の組で表わすこともできる [3]。分割の組 $\gamma = [\lambda, \mu]$

に対し, Schur 関数 $s[\gamma]$ が次で定義される.

$$s[\gamma] = \frac{\prod_{(i,j) \in \mu} \left([a; j - i - l(\lambda)] \prod_{r=1}^{l(\lambda)} \frac{[a; j - i + \lambda_r - r + 1]}{[a; j - i + \lambda_r - r]} \right) \prod_{(i,j) \in \lambda} [a; j - i]}{\prod_{(i,j) \in \lambda} [h_\lambda(i, j)] \prod_{(i,j) \in \mu} [h_\mu(i, j)]}.$$

ここで, $[x; i]$, $[i]$ はそれぞれ次で定義される.

$$[x; i] = \frac{x^{-1}q^i - xq^{-i}}{q - q^{-1}}, \quad [i] = [1; i] = \frac{q^i - q^{-i}}{q - q^{-1}}.$$

$s[\gamma]$ は $\mathbb{Q}(q)$ 上の a の Laurant 多項式となる.

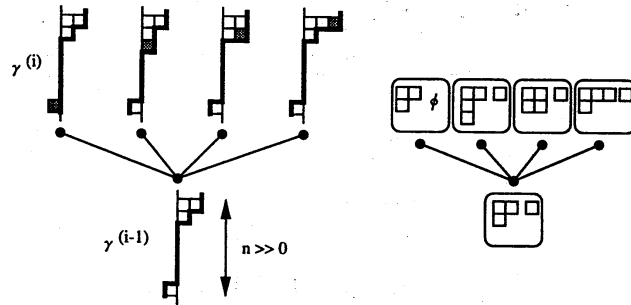
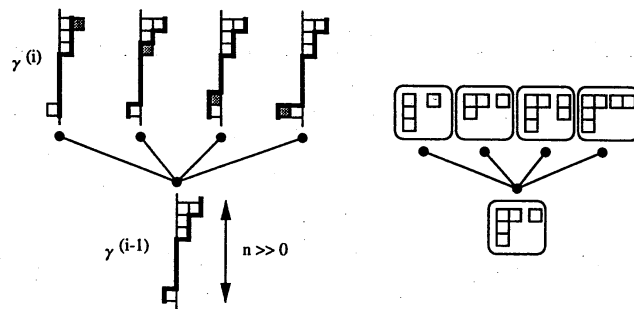
以上の準備の下で表現空間 $K(a, q)\Omega(\epsilon)^\gamma$ の基底をなす tableaux について説明する. ここで $\text{Pos}(\epsilon) = k, \text{Neg}(\epsilon) = l, \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{k+l}) \in \text{Ob}(\mathcal{OTA})$ とおく. 次のような $k+l$ 個の階段の並びの集合 $\{\xi = (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(k+l)})\}$ を考える: 始めに, $\gamma^{(0)} = [\emptyset, \emptyset]$ とおく. 次に, 各 $\gamma^{(i)} = [\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}]$ ($i = 1, 2, \dots, k+l$) を ϵ_i の符号により, $\gamma^{(i-1)} = [\alpha^{(i-1)}, \beta^{(i-1)}]$ から次のようにして得られる階段のうちの一つと定める:

(4.1) $\epsilon_i = +1$ のとき, $\gamma^{(i-1)} = [\alpha^{(i-1)}, \beta^{(i-1)}]$ の $\alpha^{(i-1)}$ に箱を一つ加えるか, $\beta^{(i-1)}$ から箱を一つ取り除く.

(4.2) $\epsilon_i = -1$ のとき, $\gamma^{(i-1)} = [\alpha^{(i-1)}, \beta^{(i-1)}]$ の $\alpha^{(i-1)}$ から箱を一つ取り除くか, $\beta^{(i-1)}$ に箱を一つ加える.

いずれの場合も, $\gamma^{(i-1)}$ と $\gamma^{(i)}$ はヤング図形の組として, 箱一つだけ異なることに注意する. 上の構成は Figure 8, Figure 9 に示されるように深さ $n \gg 1$ の階段に箱を加えたり, 取り去ったりしたものを 2 つの小さい分割の組で表わしたものと考えることも出来る [3]. このようにして出来る分割の並びのうち, $\gamma^{(k+l)} = \gamma$ であるような並びを台 γ タイプ ϵ の tableau と呼び, そのような tableaux の集合を $\Omega(\epsilon)^\gamma$ で表わす.

$\Omega(\epsilon)^\gamma$ はまた次のようなグラフ Γ_ϵ の道ととも考えることも出来る. Γ_ϵ の頂点を $(k+l+1)$ 個の集合に類別する. 各集合をフロアといい 0 階, 1 階, ..., $k+l$ 階と名前がついているとする. 最上階 ($k+l$ 階) のフロアには, $|\Lambda_{k,l}|$ 個の頂点を配置する. その各々の頂点を $\Lambda_{k,l}$ の元でラベル付けする. 一番下の階 (0 階) のフロアには一つ頂点を置き, 0 の分割の組 $\gamma^{(0)} = [\emptyset, \emptyset] \in \Lambda_{j_0, k_0}$ でラベル付ける. i_0 階には, $|\Lambda_{j_0, k_0}|$ 個の頂点を配置し, その頂点達を Λ_{j_0, k_0} の元でラベル付ける. ここで, $j_0 = |\{\epsilon_i > 0, i = 1, 2, \dots, i_0\}|$,

Figure 8: 分岐則 ($\epsilon_i = +1$)Figure 9: 分岐則 ($\epsilon_i = -1$)

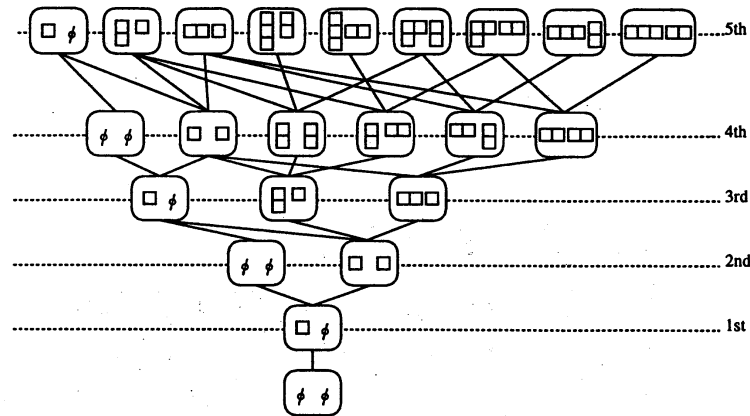


Figure 10: Bratteli Diagram

$k_0 = |\{\epsilon_i < 0, i = 1, 2, \dots, i_0\}|$ である. 互いに隣接するフロアに属する2つの頂点にラベル付けられた分割の組が, ヤング図形の組として, 箱1つのみ異なるとき, 2つの頂点を辺で結ぶ.

このようにして出来るグラフを ϵ により定まる **Bratteli Diagram** と呼び, Γ_ϵ で表わす.

例 4.3. Figure 10 は $\Gamma_\epsilon, \epsilon = (+1, -1, +1, -1, +1) \in \Lambda_{3,2}$ の Bratteli Diagram である.

Bratteli Diagram Γ_ϵ の 0 階の頂点 $\gamma^{(0)} = [\emptyset, \emptyset]$ から最上階の頂点 $\gamma^{(k+l)} = \gamma$ までの辺のつくる道は先程定義した tableau になっている. $\Omega(\epsilon)^\gamma = \{\xi\}$ が $K(a, q)$ 上張る空間を $K(a, q)\Omega(\epsilon)^\gamma$ と書き, その標準基を v_ξ で表わす.

$\mathbf{P}^\gamma(\epsilon)$ の定義

各 object ϵ に対し, $\mathbf{P}^\gamma(\epsilon) = K(a, q)\Omega(\epsilon)^\gamma$ と定義する. つまり, \mathbf{P}^γ の表現空間は $\mathcal{L}^\gamma = \{K(a, q)\Omega(\epsilon)^\gamma\}_{\epsilon \in \text{Ob}(\text{OTA})}$ となる.

$\text{Pos}(\epsilon) = k, \text{Neg}(\epsilon) = l$ のとき, $\gamma \notin \Lambda_{k,l}$ ならば, $\Omega(\epsilon)^\gamma = \emptyset$ なので, $\mathbf{P}^\gamma(\epsilon) = K(a, q)\Omega(\epsilon)^\gamma = \{0\}$ である.

$\mathbf{P}^\gamma(X^+(\epsilon; i))$ と $\mathbf{P}^\gamma(X^-(\epsilon; i))$ の定義

$\text{Pos}(\epsilon) = k, \text{Neg}(\epsilon) = l$ のとき, $\gamma \notin \Lambda_{k,l}$ ならば, $\mathbf{P}^\gamma(X^-(\epsilon; i)) = 0$ と定める.

$\gamma \in \Lambda_{k,l}$ のとき, 生成元 $X^+(\epsilon; i)$ は $K(a, q)\Omega(\epsilon)^\gamma$ からそれ自身への線型射像にうつされる. ここで, $\epsilon_i = \epsilon_{i+1} = 1$, すなわち,

$$\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, +1, +1, \epsilon_{i+2}, \dots, \epsilon_{k+l})$$

であることに注意する. 台 γ タイプ ϵ の tableau を

$$\xi = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(i-1)}, \gamma^{(i)}, \gamma^{(i+1)}, \dots, \gamma^{(k+l)} = \gamma)$$

と表わすとき, $\gamma^{(i+1)} = [\alpha^{(i+1)}, \beta^{(i+1)}]$ は, $\gamma^{(i-1)} = [\alpha^{(i-1)}, \beta^{(i-1)}]$ に (4.1) の操作を 2 回繰り返すことによって得られたものであり, 次の 3 つのいずれかの形をしている. (階段 $\gamma^{(i-1)} = [\alpha^{(i-1)}, \beta^{(i-1)}]$ を Figure 8 の左の方法で表わされる大きなヤング図形のようなものと考えている.)

- (a) $\gamma^{(i-1)}$ の同じ行に箱を 2 つ付け加えた.
- (b) $\gamma^{(i-1)}$ の同じ列に箱を 2 つ付け加えた.
- (c) $\gamma^{(i-1)}$ の行も列も異なる位置に箱を 2 つ付け加えた.

(c) の場合, 箱を付け加える順序を逆にすることにより, Figure 11 のように ξ と異なる道が必ず一つ存在するが, この道を ξ と呼ぶことにする. 図からもわかるように, この 2 つの箱からフックが定まる. このフックの長さ (箱 2 つを加えたときの長さ) を h とおき, この 2 つの箱の位置と付け加える順番により, 座標距離 $d(\xi, i)$ を次のように定める.

$$d(\xi, i) = \begin{cases} h-1 & \text{左下の箱を先に付け加えるとき} \\ 1-h & \text{右上の箱を先に付け加えるとき} \end{cases}$$

座標距離は負になることもある. $\gamma^{(i-1)}$, $\gamma^{(i+1)}$ が共に分割であり, 最初に加えた箱の位置が r_i 行 c_i 列で, 次に加えた箱の位置が r_{i+1} 行 c_{i+1} 列とすると

$$d(\xi, i) = (c_{i+1} - r_{i+1}) - (c_i - r_i)$$

となる. この座標距離 d と q -整数 $[i]$ を使い, $\mathbf{P}^\gamma(X^+(\epsilon; i))$ を以下の様に定める.

$$\mathbf{P}^\gamma(X^+(\epsilon; i))v_\xi = \begin{cases} aqv_\xi & \text{((a) のとき),} \\ -aq^{-1}v_\xi & \text{((b) のとき),} \\ a \cdot \frac{q^n}{[d]}v_\xi + a \cdot \frac{[d-1]}{d}v_{\xi'} & \text{((c) のとき).} \end{cases}$$

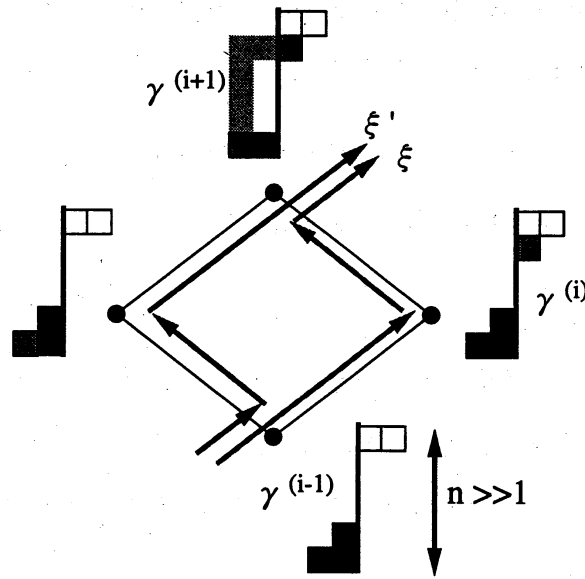


Figure 11: ξ と ξ'

ただし、座標距離に階段の深さ n が含まれるとき ($\alpha^{(i-1)} \neq \alpha^{(i+1)}, \beta^{(i-1)} \neq \beta^{(i+1)}$ のとき) は、 q^n を a^{-1} で置き換えて n を消去する。例えば、 $d = i + n$ のとき

$$[d] = [i + n] = \frac{q^{i+n} - q^{-i-n}}{q - q^{-1}} = \frac{a^{-1}q^i - aq^{-i}}{q - q^{-1}} = [a; i]$$

となる。

$P^\gamma(X^+(\epsilon; i))$ は可逆なので、 $P^\gamma(X^-(\epsilon; i))$ を $P^\gamma(X^+(\epsilon; i)) \circ P^\gamma(X^-(\epsilon; i)) = id$ を満たすものとして定義出来る。

$P^\gamma(U_r(\epsilon; i))$ と $P^\gamma(U_l(\epsilon; i))$ の定義

$\gamma \notin \Lambda_{k,l}$ のとき、 $P^\gamma(U_r(\epsilon; i)) = 0$ (resp. $P^\gamma(U_l(\epsilon; i)) = 0$) と定める。

$\gamma \in \Lambda_{k,l}$ のとき、生成元 $U_r(\epsilon; i)$ (resp. $U_l(\epsilon; i)$) は P^γ により $K(a, q)\Omega(\epsilon)^\gamma$ から $K(a, q)\Omega(\epsilon_r)^\gamma$ (resp. $K(a, q)\Omega(\epsilon_l)^\gamma$) への準同型に移される。ここで、

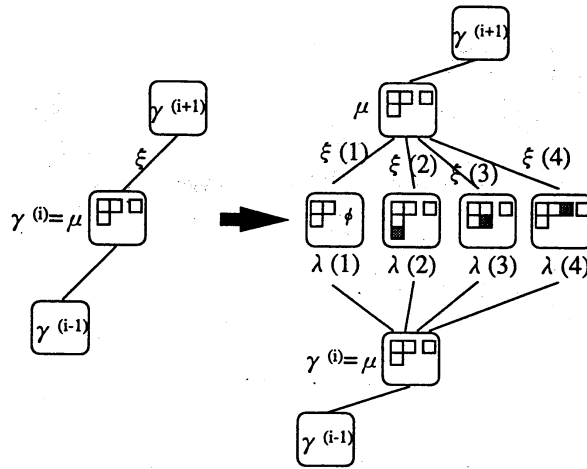
$$\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{k+l})$$

$$\epsilon_r = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_i, +1, -1, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{k+l})$$

$$\text{(resp. } \epsilon_l = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_i, -1, +1, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{k+l}))$$

である。台 γ タイプ ϵ の tableau

$$\xi = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(i-1)}, \gamma^{(i)} = \mu = [\alpha, \beta], \gamma^{(i+1)}, \dots, \gamma^{(k+l)} = \gamma)$$

Figure 12: $\mathbf{P}^\gamma(U_r(\epsilon; i))$

に対し, 台 γ タイプ ϵ_r (resp. ϵ_l) の tableau $\xi(j)$ を次のように定義できる.

$$\begin{aligned} \xi(j) &= (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(i)} = \mu, \lambda(j), \mu, \gamma^{(i+1)}, \dots, \gamma^{(k+l)} = \gamma) \\ (\text{resp. } \xi(j) &= (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(i)} = \mu, \nu(j), \mu, \gamma^{(i+1)}, \dots, \gamma^{(k+l)} = \gamma)) \end{aligned}$$

ここで $\{\lambda(j)\}$ (resp. $\{\nu(j)\}$) はヤング図形 α (resp. β) に箱 1 つ加えるか, またはヤング図形 β (resp. α) から箱 1 つ取り除くことによって得られる全ての階段の集合である (Figure 12). これらの記号のもとで, $\mathbf{P}^\gamma(U_r(\epsilon; i))$ (resp. $\mathbf{P}^\gamma(U_l(\epsilon; i))$) を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\gamma(U_r(\epsilon; i))v_\xi &= \sum_j^{p(\mu)} v_{\xi(j)} \\ (\text{resp. } \mathbf{P}^\gamma(U_l(\epsilon; i))v_\xi &= \sum_j^{p'(\mu)} \frac{s[\nu(j)]}{s[\mu]} v_{\xi(j)}). \end{aligned}$$

$\mathbf{P}^\gamma(\bar{U}_r(\epsilon_r; i))$ と $\mathbf{P}^\gamma(\bar{U}_l(\epsilon_l; i))$ の定義

$\gamma \notin \Lambda_{k,l}$ のとき, $\mathbf{P}^\gamma(\bar{U}_r(\epsilon; i))v_\xi$ (resp. $\mathbf{P}^\gamma(\bar{U}_l(\epsilon; i))v_\xi$) は 0 と定める.

$\gamma \in \Lambda_{k,l}$ のとき, 生成元 $\bar{U}_r(\epsilon_r; i)$ (resp. $\bar{U}_l(\epsilon_l; i)$) は $K(a, q)\Omega(\epsilon_r)^\gamma$ (resp. $K(a, q)\Omega(\epsilon_l)^\gamma$) から $K(a, q)\Omega(\hat{\epsilon})^\gamma$ への準同型に写される. ここで,

$$\epsilon_r = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, -1, +1, \epsilon_{i+2}, \dots, \epsilon_{k+l})$$

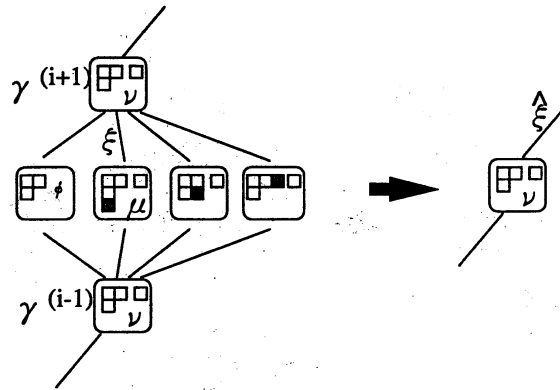


Figure 13: $\mathbf{P}^\gamma(\bar{U}_r(\epsilon; i))$

(resp. $\epsilon_l = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, +1, -1, \epsilon_{i+2}, \dots, \epsilon_{k+l})$)

$\hat{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+2}, \dots, \epsilon_{k+l})$

である.

台 γ タイプ ϵ_r (resp. ϵ_l) の tableau

$$\xi = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(i-1)} = \nu, \gamma^{(i)} = \mu, \gamma^{(i+1)}, \dots, \gamma^{(k+l)} = \gamma)$$

に対し, $\gamma^{(i-1)} \neq \gamma^{(i+1)}$ であれば $\mathbf{P}^\gamma(\bar{U}_r(\epsilon; i))v_\xi$ (resp. $\mathbf{P}^\gamma(\bar{U}_l(\epsilon; i))v_\xi$) は $\{0\}$ と定める. そうでないとき

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\gamma(\bar{U}_r(\epsilon; i))v_\xi &= v_{\hat{\xi}} \\ \text{(resp. } \mathbf{P}^\gamma(\bar{U}_l(\epsilon; i))v_\xi &= \frac{s[\mu]}{s[\nu]}v_{\hat{\xi}}) \end{aligned}$$

とする. ここで, $\hat{\xi}$ は tableau ξ の i 番目の成分 $\gamma^{(i)}$ と $(i+1)$ 番目の成分 $\gamma^{(i+1)}$ を取り除くことによって得られる台 γ タイプ $\hat{\epsilon}$ の tableau である (Figure 13). 以上のように定義した \mathbf{P}^γ 定理の (2) を満たすものになっている.

References

[1] V.G. Turaev. Operator invariants of tangles and r-matrices. *Math. USSR Izvestiya*, 35:411–444, 1990.

- [2] Y. Akutsu, T. Deguchi, and T. Ohtsuki. Invariants of colored links. *J. of Knot theory and Its Ramifications* 1, 2:161–184, 1992.
- [3] J.R. Stembridge. Rational tableaux and the tensor algebra of gl_n . *J. Combin. Theory*, A46:79–120, 1987.