

有限群の p -ブロックの分裂定理

千葉大学 理 越谷重夫 (Shigeo Koshitani)
ドイツ Jena 大学 Burkhard Külshammer

ここでの話は、いわゆる有限群のモジュラー表現についてです。体上有限群の群代数 (group algebra) は、少なくとも有限次元ホップ代数 (Hopf algebra) の、とても重要な例になっています (と言うより、ホップ代数に関する重要な結果のいくつかは、この群代数の定理を横目でにらみつつ、その一般化として考えられたものだと思います)。

今回の話は、上記の通り B. Külshammer (ドイツ Jena 大学) との共同の仕事です。実際に始めたのは、もう4年以上も前の話で、その結果は、昨年すでに発表されています ([2] を参照)。そこで、ここでは、この結果を得るために重要であった道具、並びにこの分野以外の人への解説を主に書いてみたいと思います。

記号と定義 $k :=$ 標数 $p > 0$ をもつ代数的閉体

$G, G_1, G_2, \dots :=$ 有限群

$H := G$ の正規部分群 (つまり, $H \triangleleft G$)

$kG, kG_1, kG_2, \dots :=$ 群代数 (group algebras)

$A := kG$ のブロック (block)

(つまり, kG を $kG = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n$ のように直既約両側イデアル分解させた時の、各 A_i を kG のブロックという)

$B := kH$ のブロック

$1_A, 1_B := A, B$ の (環としての) 単位元 (これらは、普通 A, B の block idempotents と呼ばれる)

$\otimes := \otimes_k$ (つまり、何も書いていない tensor product は k 上でのもの)

kG -加群 := 有限生成左 kG -加群

$P :=$ ブロック A の不足群 (defect group)

(直既約 kG -加群 M が $1_A \cdot M \neq 0$ を満たす時、 M はブロック A に属する、と言う事にする。また、 G の部分群 L と kG -加群 X に対して、 X 自身が $kG \otimes_{kL} X$ の直和因子 (kG -加群として、ただし、 $kG \otimes_{kL} X$ の kG -加群としての作用は、 $g \cdot (a \otimes x) := ga \otimes x$, $\forall g \in G, \forall a \in kG, \forall x \in X$ として定める。もちろん、ここでの tensor product は、 kL 上で取っている) になっている時、 X は L -projective (relatively L -projective) である、という。この意味で、 A の defect group P とは、 A に属するすべての kG -加群が L -projective であるような L のうちで極小なもの (位数が最小であるもの) のことである。一般に、 D は G の p -部分群になることがわかっていて、その上、 A に対して、 D は (G -共役を除いて) 一意に決まることもわかっています。というわけで、すぐに想像がつくように、defect group というものは、Sylow p -部分群の一般化になっています。)

さて、今回の話の出発点は、よく知られている、次のとても簡単な話です。

命題 G が2つの有限群 G_1, G_2 の直積 $G = G_1 \times G_2$ で書けていれば, k -代数同型 $kG \cong kG_1 \otimes kG_2$ が得られる.

さて, 次に以下のような設定を考えます. これからずっと, kH のブロック B は, kG のブロック A によって被覆されている (covered), と仮定しておきます ($\iff 1_A \cdot 1_B \neq 0$ in kG). また, B は G -安定 (不変) (G -stable $\iff g \cdot 1_B \cdot g^{-1} = 1_B, \forall g \in G$) であることも仮定します. この仮定は, 有名な Fong-Reynolds の定理より, 全然本質的なことではありません (森田同値を除いて) ([3, V 定理 5.10] を参照). この様な状況の下で, 次の問題を考えるのです.

問題 2つのブロック A と B は, どのくらい似ているのだろうか? あるいは違っているのだろうか?

さて, それでは, とにもかくにも我々の主定理を述べます.

定理 (Koshitani-Külshammer) k, G, H, A, B は上記と同じものとする. つまり, $H \triangleleft G$ であって, kH のブロック B は, kG のブロック A によって被覆されていて (covered), かつ, G -stable (G -安定, 不変) であるとする. また, P を, A の不足群 (defect group) とします. ここで, G/H は p -群であると仮定します. その上, P はアーベル群 (可換群) であることも仮定します. この時, $Q := P \cap H$ と置くと, これは B の defect group になりますが, 我々はさらに, Q は P の中で分裂している, つまり, $P = Q \times R, \exists R \leq P$ と書けることも仮定します (したがって, $G/H \cong R$). すると, 次の同型

$$A \cong B \otimes kR \quad (k\text{-代数同型})$$

が得られる.

この系として, すぐに次のことがわかります.

系 $H \triangleleft G, G/H$ は p -群, そして, P を G の Sylow p -部分群で, P は基本アーベル p -群であるとする ($\therefore G/H$ も基本アーベル p -群). また, A, B を, それぞれ, kG, kH の principal blocks (主ブロック, つまり, 自明な kG -, kH -加群を含むブロック) とします. 以上の仮定の下で, 次の事が成立する.

$$A \cong B \otimes k[G/H] \quad (k\text{-代数同型})$$

注意 この定理の言っている事は, 不足群 (defect group) の 分裂 が, ブロックの 分裂 を導く (誘導する) ということです. そして, ポイントは, 一番初めの例のように, 全体

の群 G 自身は分裂していなくても、不足群 (defect group) さえ分裂していればブロックの分裂を導く、ということです。

この定理の証明で、とつても重要で本質的な役割を果たしているのは、E.C.Dade による、いわゆる、ブロックに関する Clifford 理論 (有限群 G とその正規部分群 H の間での、それぞれの表現、ブロックについての理論、[1] 参照) と、渡辺アツミさん (熊本大学) による、可換不足群 (abelian defect group) を持つブロックの重要な結果 ([4] 参照)、の2つです。

Dade のこの話題についての論文は長くて、多くの人に理解されるのが必ずしも容易では無いと思いますが、とにかく、私の感じている標語 (定理?) を1つ述べさせてもらいます。それは、

標語, 教訓 群とその正規部分群の間の、それぞれの表現についての話 (もちろん、ブロックのことも入ります) を考える時は、是非 E.C. Dade のブロックの Clifford 理論の論文を見てみよ! 必ず、自明ではない何かが得られる。特に、[1, Corollary 12.6] は重要)。

謝辞 今回のこの研究集会は、いろいろな分野の話が聞けて、大変楽しく、また勉強になりました。いろいろお世話して頂いた土井幸雄さん (福井大)、ならびに竹内光弘さん (筑波大) に、とても感謝しております。

参 考 文 献

- [1] E.C. Dade, Block extensions, Illinois J. Math. 17 (1973), 198–272.
- [2] S. Koshitani and B. Külshammer, A splitting theorem for blocks, Osaka J. Math. 33 (1996), 343–346.
- [3] 永尾汎 - 津島行男, 有限群の表現, 裳華房, 1987.
- [4] A. Watanabe, Note on a p -block of a finite group with abelian defect group, Osaka J. Math. 26 (1989), 829–836.

E-mail address: koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp