数理解析研究所講究録
997巻 1997年 1-16

ホップ代数と環論 －フロベニウス拡大を巡って－

福井大学教育学部 土井幸雄 (Yukio Doi)

有限次元ホップ代数はフロベニウス代数，という結果は1969年 Larson-Sweedler により発見された．ホップ加群の構造定理の見事な応用としてよく知られている．その後この結果はいろいろな方向に拡張され今日に至っているのであるが，最近 Fischman-Montgomery-Schneider は実に興味深い研究を行っている[FMS]．例えば，有限次元ホップ代数 H の中山自己同型は antipode の逆写像 $\overline{S}$ と(右)モジュラー関数 α を用いて

$$N(x) = \Sigma\alpha(x_1)\overline{S}^2(x_2),\ x \in H$$

となること，これから H が n 次元なら $N^{2n} = id_H$ が導ける．

[FMS] を分かりやすく整理し幾つかの結果の改良を行ってきた[D]が，ここでは，上記 Larson-Sweedler の定理の納得のいく証明を予備知識を仮定せず行い(§1)，その方法を一般化して有限次元ホップ代数の任意の対 $K \subset H$ が β-フロベニウス拡大になるという Schneider の結果の別証明を与える(§2)．また最後の節で，Yetter-Drinfeld 圏における有限次元ホップ代数もやはりフロベニウスになる(これも [FMS] の結果)ことの直接証明を行う．

§1. 有限次元ホップ代数 H のフロベニウス性

一般に，体 k 上の有限次元代数 A は右 A-加群として $A \cong A^*$ がなりたつとき，フロベニウス代数という．ただし $A^* = \mathrm{Hom}(A, k)$ は $(fa)(b) = f(ab)$, $f \in A^*$, $a, b \in A$ により右 A-加群とみる．A の単位元 1_A に対応する A^* の元 ϕ を A のフロベニウス写像という．自然な同型 $A\otimes A \cong A\otimes A^* \cong \mathrm{Hom}(A, A)$ により，id_A に対応する $A\otimes A$ の元 $\Sigma x_i\otimes y_i$ または $\{x_i, y_i\}$ を A の(ϕ に関する)双対基底と呼ぶ．次で特徴付けられる．

$$a = \Sigma x_i\phi(y_i a),\ \forall a \in A.$$

また条件: $\phi(xy) = \phi(yN(x))$, $(x, y \in A)$ により一意的に決まる A の自己同型代数射 N を中山自己同型という. この節では, 有限次元ホップ代数 H が常にフロベニウス代数であるという Larson-Sweedler の定理(1969年)の納得のいく証明(従来のものと異なる)を行い, 合わせて中山自己同型に関する最新の結果 [FMS] を解説したい.

以後 H を体 k 上の有限次元ホップ代数とし, H の余積を $\Delta: H \to H\otimes H$, 余単位を $\varepsilon: H \to k$, antipode を $S: H \to H$ で表す. また次の Σ-notation を使う:

$$\Delta(x) = \Sigma x_1\otimes x_2,\quad (id\otimes\Delta)\Delta(x) = (\Delta\otimes id)\Delta(x) = \Sigma x_1\otimes x_2\otimes x_3,\ \ldots (x\in H).$$

Step 1. H^* に右 H-余加群の構造を入れる. まず 写像 $\rho': H^* \to Hom(H, H)$ を

$$\rho'(f)(x) = \Sigma f(x_1)S(x_2),\quad f \in H^*,\ x \in H$$

で定義する. H は有限次元より canonical k-同型

$$can: H^*\otimes H \cong Hom(H, H),\quad f\otimes h \mapsto [x \mapsto f(x)h]$$

をもつ. ρ' と can^{-1} の合成を ρ とおくと, ρ は H^* から $H^*\otimes H$ への写像である. 任意の $f \in H^*$ に対し, $\rho(f) = \Sigma f_0\otimes f_1 \in H^*\otimes H$ で表すと, 定義より

$$\Sigma f_0(x)f_1 = \Sigma f(x_1)S(x_2),\quad x\in H$$

がなりたつ. $(\rho\otimes id)\rho = (id\otimes\Delta)\rho$ すなわち $\Sigma(f_0)_0\otimes(f_0)_1\otimes f_1 = \Sigma f_0\otimes(f_1)_1\otimes(f_1)_2$ in $H^*\otimes H\otimes H$ であることは, 次のようにして確かめられる.

$$\begin{aligned}\Sigma(f_0)_0(x)(f_0)_1\otimes f_1 &= \Sigma f_0(x_1)S(x_2)\otimes f_1 = \Sigma S(x_2)\otimes f_0(x_1)f_1\\ &= \Sigma S(x_3)\otimes f(x_1)S(x_2) = \Sigma f(x_1)S(x_3)\otimes S(x_2)\\ &= \Delta(\Sigma f(x_1)S(x_2)) \quad (S \text{ は anti-coalgebra map だから})\\ &= \Delta(\Sigma f_0(x)f_1) = \Sigma f_0(x)(f_1)_1\otimes(f_1)_2.\end{aligned}$$

また $(id\otimes\varepsilon)\rho = id$ は, "$\Sigma f_0(x)f_1 = \Sigma f(x_1)S(x_2)$" の両辺に ε を施せばよい. よって H^* は右 H-余加群になる.

Step 2. H^* を $(fh)(x) = f(hx)$, $f \in H^*$, $h, x \in H$, により右 H-加群とみる. このとき H^* は上の右 H-余加群構造と合わせて H-ホップ加群になる. すなわち

$$\Sigma(fh)_0\otimes(fh)_1 = \Sigma f_0h_1\otimes f_1h_2,\quad f \in H^*,\ h \in H.$$

実際任意の $x \in H$ に対し

$$\Sigma(f_0h_1)(x)f_1h_2 = \Sigma f_0(h_1x)f_1h_2 = \Sigma f(h_1x_1)S(h_2x_2)h_3$$

$= \Sigma f(h_1x_1)S(x_2)S(h_2)h_3$ (S は anti-algebra map だから) $= \Sigma f(hx_1)S(x_2)$

$= \Sigma(fh)(x_1)S(x_2) = \Sigma(fh)_0(x)(fh)_1$ だから.

したがってホップ加群の基本定理(cf. [M, §1.9.4])が適用でき，ホップ加群の同型

$$(H^*)^{coH}\otimes H \cong H^*,\ f\otimes h \mapsto fh$$

を得る. ここで

$f \in (H^*)^{coH} \Leftrightarrow \Sigma f_0\otimes f_1 = f\otimes 1_H \Leftrightarrow \Sigma f(x_1)S(x_2) = f(x)1_H,\ x\in H$

$\Leftrightarrow f(x)1_H = \Sigma f(x_1)x_2,\ x\in H$

($\because$ $\Leftarrow$ は明らか. $\Rightarrow$ は $f(x)1_H = \Sigma f(x_1)\varepsilon(x_2) = \Sigma f(x_1)S(x_2)x_3 = \Sigma f(x_1)x_2.$)

だから

$$(H^*)^{coH} = \{f\in H^* \mid f(x)1_H = \Sigma f(x_1)x_2,\ x\in H\}.$$

つまり $(H^*)^{coH}$ は H から基礎体 k への右 H-余加群射全体 $\mathrm{Hom}^{-H}(H,k)$ と一致する. ただし k は自明な方法 $k \ni \lambda \mapsto \lambda\otimes 1_H \in k\otimes H$ で右 H-余加群とみる. $\mathrm{Hom}^{-H}(H,k)$ の元を H^* <u>の右積分</u>という. 同型 $(H^*)^{coH}\otimes H \cong H^*$ の両辺の k-次元を比較して

$$\dim \mathrm{Hom}^{-H}(H,k) = 1$$

がでる. よって $0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}^{-H}(H,k)$ を一つ選ぶ(以後固定する)と，ホップ加群の同型

$$H \cong H^*,\ h \mapsto \phi h$$

が得られる. とくに H はフロベニウス代数で，任意の右積分 $\phi(\neq 0)$ がフロベニウス写像を与えることがわかった.

[注意] 系として，有限次元ホップ代数 H の antipode S の全射性(したがって全単射)が次のようにしてわかる: 一般の余代数 C および右 C-余加群 V に対し

$$R(V) := \{\Sigma\xi(v_0)v_1 \ ;\ v\in V,\ \xi\in V^*\}$$

とおく(C の部分空間). V, V' が C-余加群として同型なら $R(V) = R(V')$ に注意する. とくに $R(H) = R(H^*)$ である.

$R(H^*) = \{\Sigma f_0(x)f_1 \mid f\in H^*,\ x\in H\}$ ($(H^*)^* = H$ より)

$= \{\Sigma f(x_1)S(x_2) \mid f\in H^*,\ x\in H\}$

$= \{S(\Sigma f(x_1)x_2) \mid f\in H^*,\ x\in H\}$

だから $R(H^*) \subset S(H)$ となる. 一方明らかに $R(H) = H$ だから $S(H) \subset H$ となり，S は全射になる. 慣例により S の逆写像を $\overline{S}$ で表す. $S(xy) = S(y)S(x)$, $S(1) = 1$ から,

$$\overline{S}(xy) = \overline{S}(y)\overline{S}(x),\quad \overline{S}(1) = 1.$$

がでる．また $\Sigma S(x_1)x_2 = \varepsilon(x)1 = \Sigma x_1 S(x_2)$ に $\bar{S}$ を apply して，次の等式を得る．

$$\Sigma \bar{S}(x_2)x_1 = \varepsilon(x)1 = \Sigma x_2 \bar{S}(x_1), \quad x \in H.$$

<u>Step 3</u>. 同型 $H \cong H^*$, $h \mapsto \phi h$ から，$\phi t = \varepsilon$ (i.e. $\phi(tx) = \varepsilon(x)$, $\forall x \in H$) なる H の元 t が一意に定まる．任意の $x \in H$ に対し

$$\begin{aligned} x &= \Sigma \varepsilon(x_1)x_2 = \Sigma \phi(tx_1)x_2 \quad (\phi t = \varepsilon \text{ より}) \\ &= \Sigma \phi(t_1 x_1)\bar{S}(t_3)t_2 x_2 \quad (\Sigma \bar{S}(t_3)t_2 = \varepsilon(t_2)1 \text{ より}) \\ &= \Sigma \bar{S}(t_2)\phi(t_1 x) \quad (\phi \in \mathrm{Hom}^{-H}(H, k) \text{ より}) \end{aligned}$$

よって，$\{\bar{S}(t_2), t_1\}$ が H の双対基底となる．

[注意] 上の元 $t \in H$ は，$th = \varepsilon(h)t$ ($\forall h \in H$)，という性質をみたす．実際，

$\phi(thx) = \varepsilon(hx) = \varepsilon(h)\varepsilon(x) = \varepsilon(h)\phi(tx)$ だから $\phi th = \varepsilon(h)\phi t$となるから．

この性質をもつ H の元全体 $\{\Lambda \in H \mid \Lambda h = \Lambda\varepsilon(h), \forall h \in H\}$ を $\int^r(H)$ で表す．$\int^r(H)$ の元を H <u>の中の右積分</u>という．同様に左積分空間 $\int^l(H)$ も定義される．$\dim \int^r(H) = 1$ である．実際 augmention ε をもつ任意のフロベニウス代数 A に対し，ε を通して基礎体 k を右 A-加群とみれば，次の A-加群同形を得るからである：

$$\{\Lambda \in A \mid \Lambda a = \Lambda\varepsilon(a), \ a \in A\} \cong \mathrm{Hom}_{-A}(k, A) \cong \mathrm{Hom}_{-A}(k, A^*) = k\varepsilon$$

また S の全単射性を用いると，次が容易に示せる．

$$S(\textstyle\int^r(H)) = \int^l(H), \quad \bar{S}(\int^r(H)) = \int^l(H).$$

中山自己同型の形を調べるため，有限次元ホップ代数に対する右モジュラー関数の概念が必要になる．任意の $0 \neq \Lambda \in \int^r(H)$ に対して，$x\Lambda \in \int^r(H)$ ($\forall x \in H$) に注意すると，$\dim \int^r(H) = 1$ だったから

$$x\Lambda = \alpha(x)\Lambda, \quad \alpha(x) \in k$$

と表せる．この $\alpha \in \mathrm{Alg}(H, k)$ を H に対する<u>右モジュラー関数</u>という．右積分 $\Lambda \neq 0$ の選び方によらず確定する．(つまり $\Lambda = t$ としてもよい．)

[注意] もし $\varepsilon(t) \neq 0$ なら，$\alpha = \varepsilon$ となり $\int^r(H) = \int^l(H)$ すなわち H は<u>ユニモジュラー</u>となる．なぜなら，

$t(xt) = t(\alpha(x)t) = \alpha(x)t^2 = \alpha(x)\varepsilon(t)t$ であるが，一方

$(tx)t = \varepsilon(x)t^2 = \varepsilon(x)\varepsilon(t)t$ となり．これから $\alpha = \varepsilon$ がでる．

とくに t は H の左積分にもなっている．これを用いると H が分離多元環になることがわかる．実際任意の $x \in H$ に対し

$$\Sigma t_1 \otimes t_2 \otimes x = \Sigma \Delta(\varepsilon(x_1)t) \otimes x_2 = \Sigma \Delta(x_1 t) \otimes x_2 = \Sigma x_1 t_1 \otimes x_2 t_2 \otimes x_3$$

となる．よって

$$\Sigma t_1 \otimes S(t_2)x = \Sigma x_1 t_1 \otimes S(x_2 t_2)x_3 = \Sigma x t_1 \otimes S(t_2)$$

がなりたつ．これは H が分離的であることを示している．逆に H が分離的なら $\varepsilon(t) \neq 0$ も示せる [M, 2.2.1].

Step 4 [FMS]．中山自己同型 $N: H \to H$ は

$$N(x) = \bar{S}^2(\Sigma \alpha(x_1)x_2) = \Sigma \alpha(x_1)\bar{S}^2(x_2),\ x \in H$$

で与えられる．（とくに H がユニモジュラーなら $N = \bar{S}^2$ となる．）実際，定義より $\phi(xh) = \phi(hN(x))$ だから

$$\begin{aligned} N(x) &= \Sigma \bar{S}(t_2)\phi(t_1 N(x)) = \Sigma \bar{S}(t_2)\phi(xt_1) = \bar{S}^2(\Sigma \phi(xt_1)S(t_2)) \\ &= \bar{S}^2(\Sigma \phi(x_1 t_1)x_2 t_2 S(t_3)) \quad (\phi \in \mathrm{Hom}^{-H}(H,k) \text{ より}) \\ &= \bar{S}^2(\Sigma \phi(x_1 t)x_2) \quad (t_2 S(t_3) = \varepsilon(t_2) \text{ より}) \\ &= \bar{S}^2(\Sigma \alpha(x_1)\phi(t)x_2) \quad (\alpha \text{ の定義より}) \\ &= \bar{S}^2(\Sigma \alpha(x_1)x_2) \ (\phi t = \varepsilon \text{ より } \phi(t) = 1 \text{ だから}). \end{aligned}$$

Step 5 [FMS]． $\dim H = n \Rightarrow N^{2n} = id_H$ である．

証明．まず $(0 \neq)\ S^2(t) \in \int^r(H)$ だから $xS^2(t) = \alpha(x)S^2(t)$．一方 $\bar{S}^2(x)t = \alpha(\bar{S}^2(x))t$ に S^2 を apply すると，$xS^2(t) = \alpha(\bar{S}^2(x))S^2(t)$．よって

$$\alpha(\bar{S}^2(x)) = \alpha(x),\ x \in H.$$

これを用いると

$$\begin{aligned} N^2(x) &= N(\Sigma \alpha(x_1)\bar{S}^2(x_2)) = \Sigma \alpha(x_1)\alpha(\bar{S}^2(x_2))\bar{S}^4(x_3) \ (\bar{S} \text{ は余代数射より}) \\ &= \Sigma \alpha(x_1)\alpha(x_2)\bar{S}^4(x_3) = \Sigma (\alpha * \alpha)(x_1)\bar{S}^4(x_2) \end{aligned}$$

よって induction より，

$$N^n(x) = \Sigma \alpha^{(n)}(x_1)\bar{S}^{2n}(x_2),\ x \in H$$

がわかる．ただし $\alpha^{(n)}$ は α の n 回の convolution 積 $\alpha * \alpha \cdots * \alpha$ を表す．ところが α

は双対ホップ代数 H^* の group-like 元であるから $\alpha^{(n)} = \varepsilon$ となる．(一般に n 次元ホップ代数の group-like 元は n 乗すると単位元になることが，Nichols-Zoeller の定理からただちに導ける)．よって $N^n(x) = \bar{S}^{2n}(x)$ となる．

また Radford の定理 [R] によれば，S^4 は H^* に対する右モジュラー関数 $c \in H$ (= H^{**}) を用いて

$$S^4(x) = c(\Sigma\alpha(x_1)x_2\alpha^{-1}(x_3))c^{-1}$$

と表せることがわかっている．したがって induction より

$$S^{4n}(x) = c^n(\Sigma\alpha^{(n)}(x_1)x_2(\alpha^{-1})^{(n)}(x_3))c^{-n}$$

となる．$c \in G(H)$ だから $c^n = 1$ に注意すれば $S^{4n} = id$ となり，$N^{2n} = \bar{S}^{4n} = id$ がなりたつ．

§2. フロベニウス拡大

フロベニウス代数の概念は環の拡大に対して一般化される．環の拡大 $B \subset A$ は，

(i) A が右 B-加群として有限生成射影的で，

(ii) (B, A)-両側加群として，$A \cong \mathrm{Hom}_{-B}(A, B)$

をみたすとき，フロベニウス拡大という．(ii) の代わりに，ある環自己同型射 $\beta: B \to B$ が存在して，

(ii') (B, A)-両側加群として，$A \cong {}_\beta\mathrm{Hom}_{-B}(A, B)$

がなりたつとき，$B \subset A$ は β-フロベニウス拡大または第２種フロベニウス拡大であるという．ただし ${}_\beta\mathrm{Hom}_{-B}(A, B)$ は $\mathrm{Hom}_{-B}(A, B)$ の通常の左 B-加群構造を β でねじったものを表す(右 A-作用は通常のもの)．つまり，

$$(bfa)(x) = \beta(b)f(ax),\ b \in B,\ f \in \mathrm{Hom}_{-B}(A, B),\ a,\ x \in A.$$

Schneider は1992年有限次元ホップ代数 H の任意の部分ホップ代数 K に対し，$K \subset H$ はある β に関して β-フロベニウス拡大になることを示した [S]．この節では§１の精神を生かしたより自然でわかりやすい証明を与えたい．一般の代数の拡大の場合の議論，例えばホップガロア拡大のフロベニウス性など，についてはここではふれられない([Z] 参照)．

H を有限次元ホップ代数とし，K を H の right coideal subalgebra とする，すなわ

ち部分代数で $\Delta(K) \subset K\otimes H$ をみたすとする．まず $\mathrm{Hom}_{-K}(H,K)$ に右 H-余加群の構造を定義しよう(§1の Step 1 で H^* に右 H-余加群の構造を定義したが，これはその拡張になっている)．写像 ρ: $\mathrm{Hom}_{-K}(H,K) \to \mathrm{Hom}_{-K}(H,K\otimes H)$ を，

$$\rho(f)(x) = \Sigma f(x_1)_1 \otimes f(x_1)_2 S(x_2),\ f \in \mathrm{Hom}_{-K}(H,K),\ x \in H$$

で定義する．canonical な 同一視 (H は有限次元に注意)

$$\mathrm{Hom}_{-K}(H,K)\otimes H \cong \mathrm{Hom}_{-K}(H,K\otimes H),\ f\otimes h \mapsto [x \mapsto f(x)\otimes h]$$

により，ρ は $\mathrm{Hom}_{-K}(H,K)$ 上の右 H-余加群構造を定める．すなわち

$$\rho(f) = \Sigma f_0 \otimes f_1 \in \mathrm{Hom}_{-K}(H,K)\otimes H$$
$$\Leftrightarrow \Sigma f_0(x)\otimes f_1 = \Sigma f(x_1)_1 \otimes f(x_1)_2 S(x_2) \in K\otimes H,\ \forall x \in H.$$

H-coinvariants $\mathrm{Hom}_{-K}(H,K)^{coH}$ は H-colinear 全体 $\mathrm{Hom}_{-K}{}^{-H}(H,K)$ と一致する．

さらに $\mathrm{Hom}_{-K}(H,K)$ は通常の右 H-作用と合わせて H-ホップ加群になることが確かめられる．したがってホップ加群の基本定理から，ホップ加群同型

$$\mathrm{Hom}_{-K}{}^{-H}(H,K)\otimes H \cong \mathrm{Hom}_{-K}(H,K),\ \phi\otimes h \mapsto \phi h$$

を得る．

ここでもし <u>H が右 K-加群として自由なら</u>(例えば K が H の部分ホップ代数なら OK)，H と $\mathrm{Hom}_{-K}(H,K)$ の k-次元が一致するので

$$\dim \mathrm{Hom}_{-K}{}^{-H}(H,K) = 1$$

がでる．よって $0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}_{-K}{}^{-H}(H,K)$ を一つ固定すると，ホップ加群同型

$$H \cong \mathrm{Hom}_{-K}(H,K),\ h \mapsto \phi h$$

が得られる．しかしながらこの同型は左 K-線形になってないので，これからただちに $K \subset H$ がフロベニウス拡大とは断定できない．$y \in K$ に対し，

$$(y \triangleright \phi)(x) = \Sigma y_1 \phi(S(y_2)x),\ x \in H$$

とおく．$y_1 \in K$ だから $y\triangleright\phi$ は H から K への写像になる．ϕ の右 K-線形性および右 H-余線形性から $y\triangleright\phi$ も右 K-線形かつ右 H-余線形がわかり

$$y\triangleright\phi \in \mathrm{Hom}_{-K}{}^{-H}(H,K)$$

となる．よって，ある $\tau \in \mathrm{Alg}(K,k)$ により

$$y\triangleright\phi = \tau(y)\phi,\ \forall y \in K$$

とかける．θ: $K \to H$ を

$$\theta(y) = \Sigma \tau(y_1)y_2,\ y \in K$$

で定義すると，θ は明らかに代数射である．さらに任意の $h \in H$ に対し，

$$\phi(\theta(y)h) = \Sigma\tau(y_1)\phi(y_2h) = \Sigma(y_1 \triangleright \phi)(y_2h)$$
$$= \Sigma y_1\phi(S(y_2)y_3h) = y\phi(h).$$

したがってもし θ が K から K への代数同型射なら，$\beta = \theta^{-1}$ として ϕ は H から ${}_\beta K$ への左 K-線形写像になる，ここで ${}_\beta K$ は左 β-ねじれ K-加群を表す．よって写像 $h \mapsto \phi h$ は H から ${}_\beta\mathrm{Hom}_{-K}(H, K)$ への左 K-線形となり，$K \subset H$ が β-フロベニウス拡大になることがわかった．K が部分ホップ代数なら上の θ は常に K の代数同型射になっている．($\theta(K) \subset K$ は明らか，逆は $\theta^{-1}(y) = \Sigma\tau(S(y_1))y_2$ で与えられる．) 以上まとめると，

K を有限次元ホップ代数 H の right coideal subalgebra でさらに H が K 上右自由なら，$\dim \mathrm{Hom}_{-K}{}^{-H}(H, K) = 1$ となる．(任意の) $0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}_{-K}{}^{-H}(H, K)$ に対し，$y \triangleright \phi = \tau(y)\phi$ ($\forall y \in K$) なる $\tau \in \mathrm{Alg}(K, k)$ が定まる．もし $\theta(y) = \Sigma\tau(y_1)y_2$ が K の自己同型射なら，$K \subset H$ は β-フロベニウス拡大となる．ただし $\beta = \theta^{-1}$．K が部分ホップ代数なら常に $K \subset H$ は β-フロベニウス拡大となる．$0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}_{-K}{}^{-H}(H, K)$ が β-フロベニウス写像を与える．

以後 K は部分ホップ代数とし，ϕ を具体的に構成する．

$\phi \in \mathrm{Hom}^{-H}(H, k)$，$t \in \int^r(H)$ を $\phi t = \varepsilon$ であるように選ぶ(§1，Step 3 参照)．また K の右積分 u ($\neq 0$) を任意に一つ選び固定する．この ϕ，t，u を材料にして

$$\phi(x) = \Sigma\phi(x_1\bar{S}(u))x_2, \quad x \in H$$

と定義する．これが求めるものになる．まず $\phi(H) \subset K$ であることをいう．

$K^+ = \{y \in K \mid \varepsilon(y) = 0\}$ とおく．HK^+ は H の coideal だから，quotient coalgebra

$$\pi : H \to \pi(H) = H/HK^+$$

が作れる．$\sigma : H \to \pi(H) \otimes H$，$\sigma(x) = \Sigma\pi(x_1) \otimes x_2$ により，H を左 $\pi(H)$-余加群とみる．${}^{co\pi(H)}H = \{x \in H \mid \Sigma\pi(x_1) \otimes x_2 = \pi(1) \otimes x\}$ とおけば，明らかに $K \subset {}^{co\pi(H)}H$ がなりたつ．H は K 上自由だから忠実平担で，したがって次の可換図式の1行目は完全である．また2行目も ${}^{co\pi(H)}H$ の定義より完全である．

$$\begin{array}{ccccc} K & \to & H & \overset{i_1}{\underset{i_2}{\rightrightarrows}} & H \otimes_K H \\ \downarrow & & \| & & \downarrow\gamma \\ {}^{co\pi(H)}H & \to & H & \overset{\sigma}{\underset{i_2'}{\rightrightarrows}} & \pi(H) \otimes H \end{array}$$

(ただし
$i_1(x) = x \otimes 1$，$i_2(x) = 1 \otimes x$，
$\gamma(x \otimes h) = \Sigma\pi(x_1) \otimes x_2h$，
$i_2'(x) = \pi(1) \otimes x$)

ここで γ は全単射(逆写像は $\gamma^{-1}(\pi(x)\otimes h) = \Sigma x_1\otimes S(x_2)h$)だから，$K = {}^{co\pi(H)}H$ となる．したがって $\phi(H) \subset K$ をいうのに $\phi(x) := \Sigma\phi(x_1\bar{S}(u))x_2 \in {}^{co\pi(H)}H$ を示せばよい：

$$(\pi\otimes id)\Delta(\Sigma\phi(x_1\bar{S}(u))x_2) = \Sigma\phi(x_1\bar{S}(u)))\pi(x_2)\otimes x_3$$
$$= \Sigma\phi(x_1\bar{S}(u_2))\pi(x_2)\varepsilon(\bar{S}(u_1))\otimes x_3$$
$$= \Sigma\phi(x_1\bar{S}(u_2))\pi(x_2\bar{S}(u_1))\otimes x_3 \quad (\bar{S}(u_1) \in K \text{ に注意})$$
$$= \pi(\Sigma\phi(x_1\bar{S}(u_2))x_2\bar{S}(u_1))\otimes x_3 = \Sigma\pi(\phi(x_1\bar{S}(u))1)\otimes x_2 = \pi(1)\otimes\phi(x)$$

となり，$\phi(H) \subset K$ が示せた．ϕ が右 H-余線形であることは明らか．ϕ が右 K-線形であることを示す．$\forall y \in K$ に対し

$$\phi(xy) = \Sigma\phi(x_1y_1\bar{S}(u))x_2y_2$$
$$= \Sigma\phi(x_1\varepsilon(y_1)\bar{S}(u))x_2y_2 \ (\text{by } y_1\in K,\ \bar{S}(u) \in \textstyle\int^1(K))) = \phi(x)y.$$

よって ϕ はフロベニウス写像(のひとつ)となる．さらに

$$(y\triangleright\phi)(x) = \Sigma y_1\phi(S(y_2)x) = \Sigma\underline{y_1}\phi(S(y_3)x_1\bar{S}(u))\underline{S(y_2)}x_2 = \Sigma\phi(S(y)x_1\bar{S}(u))x_2$$
$$= \Sigma\phi(x_1\bar{S}(u)N(S(y)))x_2 \quad (N \text{ は } H, \phi \text{ の中山自己同型})$$
$$= \Sigma\alpha_H(S(y_2))\phi(x_1\bar{S}(u)\bar{S}(y_1))x_2 \quad (N(S(y)) = \Sigma\alpha_H(S(y_2))\bar{S}^2(S(y_1)) \text{ より})$$
$$= \Sigma\alpha_H(S(y_2))\phi(x_1\bar{S}(y_1u))x_2$$
$$= \Sigma\alpha_H(S(y_2))\phi(x_1\bar{S}(\alpha_K(y_1)u))x_2 \quad (\alpha_K \text{ は } K \text{ の右モジュラー関数})$$
$$= \Sigma\alpha_H(S(y_2))\alpha_K(y_1)\phi(x_1\bar{S}(u))x_2$$
$$= \Sigma\alpha_H(S(y_2))\alpha_K(y_1)\phi(x)$$
$$\therefore\ \tau(y) = \Sigma\alpha_K(y_1)\alpha_H(S(y_2))$$

よって

$$\beta(y) = \Sigma\tau(S(y_1))y_2 = \Sigma\alpha_K(S(y_2))\alpha_H(S^2(y_1))y_3$$
$$= \Sigma\alpha_H(y_1))\alpha_K(S(y_2))y_3 \ (\because\ \alpha_HS^2 = \alpha_H)$$

となり，β は H, K の右モジュラー関数 α_H, α_K を用いて記述できた．α_H の K への制限 $\alpha_H|K$ が α_K と一致すれば $\beta = id$ となり，$K \subset H$ は通常のフロベニウス拡大になる．

[例] Sweedler の 4-次元ホップ代数 H_4 を考える．H_4 は代数としては k 上２つの元 X, Y で生成され，次の基本関係をみたすものである．

$$X^2 = 1,\ Y^2 = 0,\ XY + YX = 0.$$

k 上4次元で基底 $\{1, X, Y, Z := XY\}$ をもつ．次の余代数構造と antipode により H_4 はホップ代数になる．

$\Delta(X) = X \otimes X$, $\Delta(Y) = 1 \otimes Y + Y \otimes X$, ［したがって $\Delta(Z) = X \otimes Z + Z \otimes 1$］

$\varepsilon(X) = 1$, $\varepsilon(Y) = 0$, ［したがって $\varepsilon(Z) = 0$］

$S(X) = X$, $S(Y) = Z$, $S(Z) = -Y$.

簡単な計算から $t := Z - Y$ が $H = H_4$ の右積分で，H に対する右モジュラー関数は

$$\alpha_H(1) = 1,\ \alpha(X) = -1,\ \alpha_H(Y) = \alpha_H(Z) = 0.$$

$\phi t = \varepsilon$ なる $\phi \in \mathrm{Hom}^{-H}(H, k)$ は

$$\phi(1) = \phi(X) = \phi(Y) = 0,\ \phi(Z) = 1.$$

(a) $K = k1 + kX$ とすると K は $H = H_4$ の部分ホップ代数で $u = 1+X$ が K の右(左)積分．よって $\phi(h) := \Sigma\phi(h_1\overline{S}(u))h_2$ は

$$\phi(1) = \phi(X) = \phi(Y) = 0,\ \phi(Z) = 1,\ (\beta(X) = -X).$$

(b) $K = k1 + kY$ とすると K は 部分ホップ代数ではないが right coideal subalgebra になる．$H = H_4$ は右 K-加群として自由である($\{1, X\}$ が K-基底)．$0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}_{-K}{}^{-H}(H, K)$ として

$$\phi(1) = 1,\ \phi(X) = 0,\ \phi(Y) = 0,\ \phi(Z) = 0$$

がある．これは明らかに左 K-線形になっている．よって $K \subset H$ は通常のフロベニウス拡大である($\beta = \mathrm{id}$)．

最後に双対基底の形を求めよう．まず $\phi(\overline{S}(t_H)) = 1$ に注意する．

$\because$) $\overline{S}(t) = \Sigma\overline{S}(t_2)\phi(t_1\overline{S}(t))$

($\{\overline{S}(t_2), t_1\}$ がフロベニウス代数 H の双対基底だから)

$= \Sigma\overline{S}(t_2)\phi(\varepsilon(t_1)\overline{S}(t))$ ($\overline{S}(t)$ は左積分) $= \overline{S}(t)\phi(\overline{S}(t))$.

次に $t = t'u$ となる H の元 t' が存在することを示す．

$\because$) Nichols-Zoeller の定理より，H は右 K 加群として自由である．$v_1, \ldots, v_s$ を H の右 K-基底とし，

$$t = v_1u_1 + \cdots + v_su_s\ (u_i \in K)$$

としよう．このとき各 u_i は K の右積分になる．実際，$\forall y \in K$ に対し，

$$t\varepsilon(y) = v_1u_1\varepsilon(y) + \cdots + v_su_s\varepsilon(y),$$

$$t\varepsilon(y) = ty = v_1(u_1y) + \cdots + v_s(u_sy)$$

より，$u_i y = u_i \varepsilon(y)$ ($\forall y \in K$) となり， $u_i \in \int^r(K)$ がわかった.
$\dim \int^r(K) = 1$ だから $u_i = c_i u$ ($c_i \in k$) とおけて

$$t = (c_1 v_1 + \cdots + c_s v_s)u$$

よって $t' = c_1 v_1 + \cdots + c_s v_s$ とおけば，$t = t'u$ となる.

以上の準備のもと，任意の $x \in H$ に対し

$$x = \phi(\bar{S}(t))x = \Sigma\phi(\varepsilon(x_1)\bar{S}(t))x_2 = \Sigma\phi(x_1\bar{S}(t))x_2 \quad (\bar{S}(t) \text{ は左積分})$$
$$= \Sigma\phi(x_1\bar{S}(t'u))x_2 = \Sigma\phi(x_1\bar{S}(u)\bar{S}(t'))x_2$$
$$= \Sigma\phi(\Lambda x_1\bar{S}(u))x_2 \quad [\text{ただし } \Lambda = N^{-1}(\bar{S}(t')) \text{ とおく}]$$
$$= \Sigma\bar{S}(\Lambda_3)\phi(\Lambda_1 x_1\bar{S}(u))\Lambda_2 x_2$$
$$= \Sigma\bar{S}(\Lambda_2)\phi(\Lambda_1 x)$$

となる. よって $\{\bar{S}(\Lambda_2), \Lambda_1\}$ が双対基底になる，ただし $\Lambda = N^{-1}(\bar{S}(t'))$.

§3. Yetter-Drinfeld 圏におけるホップ代数への拡張.

Yetter-Drinfeld 圏の中のホップ代数に対してもホップ加群の基本定理がなりたつことを示し，その応用として有限次元の場合フロベニウスになることを解説する. Braided monoidal 圏および Yetter-Drinfeld 圏については [M, §10] を参照されたい.

L を体 k 上のホップ代数で antipode S_L は全単射と仮定する. S_L の逆写像を $\bar{S}_L$ で表す. L に対する left Yetter-Drinfeld 加群からなる圏を Yetter-Drinfeld 圏といい ${}^L_L\mathbf{YD}$ または簡単に $\mathbf{Y}$ で表すことにする. すなわち $\mathbf{Y}$ の対象は，左 L-加群かつ左 L-余加群 V であって

(YD) $$\Sigma \ell_1 v^{-1} \otimes \ell_2 \rightarrow v^0 = \Sigma (\ell_1 \rightarrow v)^{-1} \ell_2 \otimes (\ell_1 \rightarrow v)^0$$

またはこれと同値な

(YD') $$\sigma(\ell \rightarrow v) = \Sigma \ell_1 v^{-1} S(\ell_3) \otimes \ell_2 \rightarrow v^0$$

をみたすもの. ただし L-action を $\ell \rightarrow v$ で，L-coaction を次のように表す.

$$\sigma_V(v) = \Sigma v^{-1} \otimes v^0, \quad \Sigma\Delta(v^{-1}) \otimes v^0 = \Sigma v^{-1} \otimes \sigma(v^0) = \Sigma v^{-2} \otimes v^{-1} \otimes v^0, \ldots$$

射は L-線形かつ L-余線形なものとする. $\mathbf{Y}$ は braided monoidal 圏 となり，その

braiding $\tau = \tau_{VW}$ ($V, W \in \mathbf{Y}$) は次で与えられる:

(Br) $\tau: V\otimes W \to W\otimes V$, $\tau(x\otimes y) = \Sigma x^{-1}\to y\otimes x^0$, $\tau^{-1}(y\otimes x) = \Sigma x^0\otimes \overline{S}_L(x^{-1})\to y$

したがって圏 $\mathbf{Y}$ の(中の)双代数, ホップ代数の概念が定義できる[M, §10.5]. 具体的に言い直すと $\mathbf{Y}$ の双代数 H とは, H ($\in \mathbf{Y}$) が通常の k-代数かつ k-余代数であり, さらに次の5条件をみたすものをいう (H の余積は $\Delta_H(x) = \Sigma x_1\otimes x_2$ で表す):

(ΔH) $\Delta_H(xy) = \Sigma x_1(x_2{}^{-1}\to y_1)\otimes x_2{}^0 y_2$, $\Delta(1) = 1\otimes 1$, $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$, $\varepsilon(1) = 1$

(i.e. $\Delta: H \to H\otimes H$, $\varepsilon: H \to k$ が alg. map)

(CA) $\sigma_H(xy)$ $(= \Sigma(xy)^{-1}\otimes(xy)^0\ ) = \Sigma x^{-1}y^{-1}\otimes x^0y^0$, $\Sigma 1_H{}^{-1}\otimes 1_H{}^0 = 1_L\otimes 1_H$

(i.e. H is a left L-comodule algebra)

(CC) $\Sigma x^{-1}\otimes(x^0)_1\otimes(x^0)_2 = \Sigma x_1{}^{-1}x_2{}^{-1}\otimes x_1{}^0\otimes x_2{}^0$, $\Sigma x^{-1}\varepsilon_H(x^0) = \varepsilon_H(x)1_L$

(i.e. H is a left L-comodule coalgebra)

(MA) $\ell\to(xy) = \Sigma(\ell_1\to x)(\ell_2\to y)$, $\ell\to 1 = \varepsilon(\ell)1$

(i.e. H is a left L-module algebra)

(MC) $\Delta_H(\ell\to x) = \Sigma(\ell_1\to x_1)\otimes(\ell_2\to x_2)$, $\varepsilon_H(\ell\to x) = \varepsilon_L(\ell)\varepsilon_H(x)$

(i.e. H is a left left L-module coalgebra)

さらに id: H → H が convolution 逆元 S_H ($\in$ Hom(H, H))をもつとき, すなわち

$$\Sigma x_1S_H(x_2) = \varepsilon(x)1_H = \Sigma S_H(x_1)x_2,\ \forall x \in H$$

なる S_H をもつとき H を <u>$\mathbf{Y}$ のホップ代数</u>といい, S_H をその <u>antipode</u> という.

[注意] L = k (基礎体) の場合, $\mathbf{Y}$ は k-ベクトル空間の圏となり, $\mathbf{Y}$ の双代数, ホップ代数は通常のものと一致する.

容易にわかるように, $\mu(\ell\otimes x) = \ell\to x$ とおくと convolution 代数 Hom(L⊗H, H) において,

$$S\mu = \mu^{-1} = \mu(\mathrm{id}\otimes S)$$

がなりたつ. よって S_H は自動的に L-線形となる. また Hom(H, L⊗H) において

$$\rho S = \rho^{-1} = (\mathrm{id}\otimes S)\rho$$

となるので, S_H は L-余線形でもある. また次の意味で anti-alg. map かつ anti-coalg. map になる.

(S1) $S_H(xy) = \Sigma(x^{-1}\to S(y))S(x^0)$, $S_H(1_H) = 1_H$

(S2) $\Delta S(x) = \Sigma(x_1{}^{-1}\to S(x_2))\otimes S(x_1{}^0)$, $\varepsilon_H S_H = \varepsilon_H$

[定義] H を $\mathbf{Y}$ のホップ代数とする．右 H-加群かつ H-余加群 M が次の５条件をみたすとき，M は右 H-ホップ加群であるという．右ホップ加群全体の圏を $({}^L{}_L\mathbf{YD})_H{}^H$ または $\mathbf{Y}_H{}^H$ で表す．M の H-coaction を $\rho_M(m) = \Sigma m_0 \otimes m_1$ と記す．

(HM0) $\rho_M(mh) = \Sigma m_0(m_1{}^{-1} \to h_1) \otimes m_1{}^0 h_2$

(HM1) $\sigma_M(mh)\ (= \Sigma (mh)^{-1} \otimes (mh)^0\ ) = \Sigma m^{-1} h^{-1} \otimes m^0 h^0$

(HM2) $\Sigma m^{-1} \otimes (m^0)_0 \otimes (m^0)_1 = \Sigma (m_0)^{-1}(m_1)^{-1} \otimes m_0{}^0 \otimes m_1{}^0$ in $L \otimes M \otimes H$

(HM3) $\ell \to (mh) = \Sigma (\ell_1 \to m)(\ell_2 \to h)$

(HM4) $\rho_M(\ell \to m) = \Sigma (\ell_1 \to m_0) \otimes (\ell_2 \to m_1)$

[例] 自然な方法で $H \in \mathbf{Y}_H{}^H$ となる．条件 ΔH, MA, CA, MC, CC が上の HM0－4 に対応する．また

$$V \in \mathbf{Y} \Rightarrow V \otimes H \in \mathbf{Y}_H{}^H$$

ただし $V \otimes H$ 上の L-(co)action, H-(co)action は次の通り：

$$\ell \to (v \otimes x) = \Sigma (\ell_1 \to v) \otimes (\ell_2 \to x),\quad v \otimes x \mapsto \Sigma v^{-1} x^{-1} \otimes v^0 x^0$$

$$(v \otimes x)h = v \otimes xh,\quad v \otimes x \mapsto \Sigma v \otimes x_1 \otimes x_2.$$

任意の $M \in \mathbf{Y}_H{}^H$ に対して，$M^{coH} := \{m \in M \mid \rho_M(m) = m \otimes 1\}$ とおくと，

1) M^{coH} は M の L-部分加群かつ L-部分余加群になる．よって $M^{coH} \in {}^L{}_L\mathbf{YD}$ である，

2) $P(m) := \Sigma m_0 S(m_1)$ とおくと，$P(m) \in M^{coH}$，

3) $m' \in M^{coH} \Rightarrow \rho_M(m'h) = \Sigma m'h_1 \otimes h_2$，$P(m'h) = m'\varepsilon(h)$．

これらを用いて，次のホップ加群の基本定理が証明できる．

Theorem 1. $M \in ({}^L{}_L\mathbf{YD})^H{}_H$ に対し，写像

$$F: M^{coH} \otimes H \to M,\ m' \otimes h \mapsto m'h$$

はホップ加群として同型になる．逆写像は $G: m \mapsto \Sigma P(m_0) \otimes m_1$ で与えられる．

応用として，H が有限次元ホップ代数のとき，H はフロベニウスになることが証明できる．ストーリーは§１と全く同じであるが，計算は長く苦しい(ほとんど省略)．以後，H は $\mathbf{Y} = {}^L{}_L\mathbf{YD}$ のホップ代数で k 上有限次元とする．

$H^* = \mathrm{Hom}(H, k)$ は

(LA) $(\ell \rightharpoonup f)(h) = f(S_L(\ell) \rightharpoonup h)$

により左 L-加群になる．また H の有限性から H^* は自然な右 L-余加群構造をもつ．したがって $\bar{S}$ を通して左 L-余加群とみれる．すなわち

$\sigma: H^* \to L\otimes H^*$, $\sigma(f) = \Sigma f^{-1}\otimes f^0$, ただし

(LC) $\Sigma f^0(h)f^{-1} = \Sigma f(h^0)\bar{S}(h^{-1})$

Lemma 1. 上の構造により $H^* \in {}^L_L\mathbf{YD}$ となる．

Lemma 2. 任意の左 L-余加群 V に対し，写像

$\theta_V: H^*\otimes V \to \mathrm{Hom}(H, V)$, $\theta(f\otimes v)(x) = \Sigma f(v^{-1} \rightharpoonup x)v^0$, $f\in H^*$, $v\in V$, $x \in H$

は全単射である．また次の写像も全単射である．

$\theta^{(2)}: H^*\otimes H^* \to (H\otimes H)^*$, $\theta^{(2)}(f\otimes g)(x\otimes y) = \Sigma f(\bar{S}(y^{-1}) \rightharpoonup x)g(y^0)$,

$\theta^{(3)}: H^*\otimes H^*\otimes H^* \to (H\otimes H\otimes H)^*$,

$$\theta^{(3)}(f\otimes g\otimes j)(x\otimes y\otimes z) = \Sigma f(\bar{S}(y^{-1}z^{-2}) \rightharpoonup x)g(\bar{S}(z^{-1}) \rightharpoonup y^0)j(z^0).$$

Proposition 2. H^* は ${}^L_L\mathbf{YD}$ のホップ代数になる．ただし

積 $= \Delta_H{}^*\theta^{(2)}$, 単位元 $= \varepsilon_H$, 余積 $= [\theta^{(2)}]^{-1}(m_H)^*$,

余単位 $= 1\hat{}\ [f \mapsto f(1_H)]$, antipode $= S_H{}^*$

とする．すなわち H^* の積は

(M*) $(fg)(x) = \Sigma f(g^{-1} \rightharpoonup x_1)g^0(x_2) = \Sigma f(\bar{S}(x_2{}^{-1}) \rightharpoonup x_1)g(x_2{}^0)$, $\forall f, g \in H^*$, $x \in H$

で与えられる．また余積 $\Delta(f) = \Sigma\ f_1\otimes f_2$ は次で定義される．

(Δ*) $f(xy) = \Sigma f_1(f_2{}^{-1} \rightharpoonup x)f_2{}^0(y) = \Sigma f_1(\bar{S}(y^{-1}) \rightharpoonup x)f_2(y^0)$, $\forall x, y \in H$.

(これは次と同値: (Δ*)' $\Sigma f_1(x)f_2(y) = \Sigma f((y^{-1} \rightharpoonup x)y^0)$)

したがって H^{**} も ${}^L_L\mathbf{YD}$ のホップ代数になるが，もし $(S_L)^2 = id_L$ なら

can. iso $H \to H^{**}$, $x \mapsto x\hat{}$, $x\hat{}(f) = f(x)$

は (${}^L_L\mathbf{YD}$ における)ホップ代数同型になる．

Lemma 3. H^* は次の合成を構造射として右 H-余加群になる．

$$H^* \to \mathrm{Hom}(H, H) \xrightarrow{\theta_H{}^{-1}} H^*\otimes H$$

$f \mapsto [x \mapsto \Sigma f(x_1)S(x_2)]$

すなわち, $\rho(f) = \Sigma f_0 \otimes f_1 \in H^* \otimes H \Leftrightarrow$

(ρH^*) $\qquad \Sigma f_0(f_1{}^{-1} \rightharpoonup x) f_1{}^0 = \Sigma f(x_1)S(x_2),\ x \in H$

さらに, $H^{*coH} = \mathrm{Hom}^{-H}(H, k)(:= \{f \in H^* \mid \Sigma f(x_1)x_2 = f(x)1_H,\ x \in H\})$ となる.

<u>Theorem 2</u>. 上の (co)actions の下で $H^* \in ({}^L{}_L\mathbf{YD})^H{}_H$ となる. ただし, 右 H-加群構造は, $(fh)(x) = f(hx)$, $f \in H^*$, $h, x \in H$ とする.

したがって基本定理 (Theorem 1) から, 次の Cor の (1)(2) が導ける.

<u>Corollary</u>. (1) $\dim \mathrm{Hom}^{-H}(H, k) = 1$.

(2) H はフロベニウス代数である. とくに $\dim \int^r(H) = 1$.

(3) H の antipode S_H は全単射である. 逆写像を $\bar{S}_H$ で表すと次がなりたつ.

($\bar{S}$1) $\bar{S}_H(xy) = \Sigma \bar{S}_H(y^0)(\bar{S}_L(y^{-1}) \rightharpoonup \bar{S}_H(x))$, $\bar{S}_H(1_H) = 1_H$

($\bar{S}$2) $\Delta_H \bar{S}_H(x) = \Sigma \bar{S}_H(x_2{}^0) \otimes \bar{S}_L(x_2{}^{-1}) \rightharpoonup \bar{S}_H(x_1)$, $\varepsilon_H \circ \bar{S}_H = \varepsilon_H$

($\bar{S}$3) $\Sigma x_2{}^0(\bar{S}_L(x_2{}^{-1}) \rightharpoonup \bar{S}_H(x_1)) = \varepsilon(x)1_H = \Sigma \bar{S}_H(x_2{}^0)(\bar{S}_L(x_2{}^{-1}) \rightharpoonup x_1)$

(4) $0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}^{-H}(H, k)$ を一つ固定すると,

(4a) $\exists^1\ t \in \int^r(H)$ s.t. $\phi(tx) = \varepsilon(x)$, $\forall x \in H$

(4b) $\ell \in L$ に対し, 写像 $H \to k$, $x \mapsto \phi(\ell \rightharpoonup x)$ は right H-colinear である. とくに

$$\exists \chi_L \in \mathrm{Alg}(L, k) \text{ s.t. } \phi(\ell \rightharpoonup x) = \chi_L(\ell)\phi(x)$$

この χ は $\ell \rightharpoonup t = \chi(\ell)t$, $\forall \ell \in L$ をみたす.

(4c) $\{\bar{S}(t_2{}^0),\ \chi_L(t_2{}^{-1})\bar{S}_L(t_2{}^{-2}) \rightharpoonup t_1\}$ が双対基底対を与える.

[注意1] $x \in H$ に対し, $xt \in \int^r(H)$. よって Cor の (2) より

$$xt = \alpha(x)t,\ \alpha \in \mathrm{Alg}(H, k)$$

と表せる. この α を H のモジュラー関数とよぶ. $\alpha(\ell \rightharpoonup x) = \varepsilon(\ell)\alpha(x)$ となる.

[注意2] $\varepsilon(t) \neq 0$ なら, $t \in \int^l(H)$ かつ $\alpha = \varepsilon_H$, $\chi = \varepsilon_L$ となる. また

$$\Sigma t_1 \otimes S(t_2)x = \Sigma x t_1 \otimes S(t_2),\ \forall x \in H$$

がなりたち, H は分離的代数になる.

文 献

[D] Y. Doi, A note on Frobenius extensions in Hopf algebras. (preprint)

[FMS] D. Fischman, S. Montgomery, and H.-J. Schneider, Frobenius extensions of subalgebras of Hopf algebras, (preprint)

[M] S. Montgomery, Hopf algebras and Their Actions on Rings, CBMS Lectures vol. 82, AMS, Providence, RI, 1993.

[R] D. Radford, The order of the antipode of a finite-dimensional Hopf algebra is finite, Amer. J. Math 98(1976), 333-355.

[S] H.-J. Scneider, Normal basis and transitivity of crossed products for Hopf algebras, J. Algebra 151(1992), 289-312.

[Z] Y. Zhang, Hopf Frobenius extensions of algebras, Comm. algebra 20(1992), 1907-1915.